

AVERTISSEMENT

Ce livre est écrit pour tous ceux qui, en suivant un enseignement scientifique, ont éprouvé le sentiment typique qu'il manquait quelque chose d'essentiel, qui aurait permis de *vraiment* comprendre. Il ne s'adresse donc qu'à ceux qui veulent réellement comprendre.

L'enseignement scientifique laisse les esprits curieux sur leur faim : Beaucoup de jeunes sont impressionnés en regardant des émissions ou en lisant des revues de vulgarisation scientifique qui font miroiter des mystères passionnants, et choisissent une filière d'études scientifique. L'enseignement supérieur scientifique a par contre pour but unique de transmettre des techniques. De ces techniques, la formation minimale indispensable pour faire un ingénieur, un chercheur, ou un enseignant, en comporte déjà plus qu'un jeune cerveau ne peut en supporter. Tout enseignant arrive à peine, dans le nombre d'heures de cours maximal qui lui est consenti compte tenu des possibilités horaires et du temps de travail personnel considérable que les étudiants devraient théoriquement fournir pour leur assimilation, à placer la totalité des techniques qu'il est chargé de transmettre. Comment voulez-vous, dans ces conditions, prendre du temps pour expliquer la *signification* des concepts introduits, ou bien pour expliquer *comment* et *pourquoi* les techniques qu'on enseigne ont été inventées ?

Beaucoup de scientifiques, éminents ou non, se plaignent de voir ainsi la *culture* scientifique peu à peu évincée par des formations purement techniques. On s'en plaignait déjà au siècle dernier. Peut-être croyait-on alors qu'en agitant publiquement le spectre d'un retour progressif à l'obscurantisme, on parviendrait à susciter un sursaut collectif. Il n'en a rien été. On a envoyé en 1914 les jeunes polytechniciens, auxquels les meilleurs professeurs avaient enseigné cette culture, au front se faire tuer. Puis la masse des connaissances à transmettre a continué à augmenter sans limite. Peut-être croit-on aujourd'hui qu'en répétant publiquement les mêmes craintes, dans les mêmes termes, mais à la télévision cette fois, on réussira là où nos ancêtres ont échoué ?

Je n'en crois évidemment rien. Il m'est apparu après réflexion que la seule action susceptible d'atteindre une certaine efficacité était d'écrire des livres comme celui-ci. Sans trop d'illusions, car contre les principaux obstacles, je n'ai aucun moyen d'action. Je ne peux agir qu'en affaiblissant des obstacles secondaires : si je n'ai pas le pouvoir de donner plus de temps à ceux qui

souhaitent approfondir et comprendre tout ce qui est resté caché derrière les masses de connaissances qu'ils ont dû assimiler à toute vitesse, je peux au moins les aider dans leur quête, raccourcissant par là le temps qui leur serait nécessaire pour faire tout le chemin eux-mêmes. Mais j'écris pour les lecteurs ayant une *volonté préalable* d'approfondir et de comprendre ; je ne cherche pas à la susciter chez ceux qui ne l'ont pas.

Il faudra cependant que cette volonté soit assez forte, car je n'ai pas été capable de fournir une matière prédigérée au point qu'un dimanche après-midi puisse suffire pour la comprendre. Ce livre exigera donc malgré tout un effort important de la part du lecteur.

Jusqu'ici, je n'ai fait que décrire mon objectif. Cela montre déjà que mon but n'était pas d'écrire un manuel scolaire ; cela n'aurait eu aucun sens, puisqu'il en existe déjà beaucoup. On peut certes estimer que les manuels existants sont mauvais, qu'ils expliquent le sujet d'une manière trop compliquée, trop abstraite, ou au contraire pas assez rigoureuse, etc., et nourrir l'ambition d'en écrire un qui soit enfin parfait. Mais pour éviter tout malentendu, je me permets d'insister : ce n'est pas cette ambition qui m'a poussé à réaliser ce livre. Bien sûr, je me suis toujours efforcé de ne pas rendre les choses plus compliquées qu'elles ne le sont naturellement et d'être aussi pédagogique que possible (par exemple en insérant de nombreuses figures). Mais mon but n'a pas été de faire un manuel "meilleur" ; j'ai voulu faire *autre chose* qu'un manuel. J'ai voulu expliquer ce qui est passé sous silence dans les manuels. Toutefois j'ai construit ce livre autour d'un cours d'initiation (au départ purement technique, lui aussi) au Calcul des probabilités ; il est donc possible à un bachelier scientifique d'apprendre les techniques du Calcul des probabilités dans ce livre, bien que ce ne soit pas le but de l'ouvrage. Dans ce cas, il ne faut pas hésiter à laisser de côté les discussions qui émaillent l'exposé. Mais tout dépend du niveau technique d'où part le lecteur. Je m'adresse aussi à ceux qui ont déjà suivi avec succès des cours de Calcul des probabilités, au niveau de la licence ou de la maîtrise ou même plus, et je veux leur raconter ce qu'ils n'y ont pas appris.

Je me suis efforcé d'écrire pour plusieurs niveaux de lecture très différents à la fois. Beaucoup d'exemples (souvent empruntés à la Physique) peuvent être difficiles pour un débutant, ou pour un lecteur ayant reçu une formation purement mathématique, mais ils ne sont pas nécessaires pour comprendre le reste et peuvent donc être omis. Inversement, le physicien aura beaucoup de mal à suivre certaines démonstrations mathématiques détaillées et rigoureuses ; le mieux pour lui sera de les sauter. Les lecteurs qui connaissent déjà le Calcul des probabilités et qui cherchent ce qu'on ne trouve pas dans les manuels, pourront, eux, laisser les passages qu'ils connaissent déjà,

et ne lire que les discussions et les exemples.

Quel que soit l'objectif visé, quelle que soit la formation scientifique antérieure, il ne faut donc pas vouloir absolument tout lire. Une lecture lacunaire est possible, ce livre a été construit pour le permettre; c'est pourquoi, si on le lit en entier, on trouvera bon nombre de redites.

Je ne donne pas ici d'instructions de lecture plus précises; ce serait vain car chaque lecteur est différent et nul ne sait mieux que lui-même comment il convient de lire.

Après ces remarques pragmatiques destinées au lecteur, j'éprouve encore le besoin de me justifier quant aux principes.

Je ne discuterai pas les raisons — évoquées plus haut — pour lesquelles l'enseignement scientifique se borne à aligner des formules et des techniques sans se préoccuper des questions qui se posent à leur sujet. Il est devenu courant de dévaloriser comme “philosophique” toute question non strictement technique, mais les questions auxquelles je tente de répondre dans ce livre ne sont pas de la philosophie, elles sont partie intégrante de la science au sens le plus strict. Il arrivera certes deux ou trois fois qu'un philosophe soit cité, mais c'est alors pour des remarques d'ordre scientifique. Je qualifierai ces questions de *sémantiques*, faute d'un meilleur terme.

Pour me faire bien comprendre, voici un exemple. En Calcul des probabilités, on définit formellement l'indépendance stochastique: deux événements A et B sont stochastiquement indépendants si la probabilité de leur intersection est égale au produit de leurs probabilités. Les questions *formelles* sont celles qui concernent les règles et astuces purement algébriques de calcul qui dérivent de cette définition. Les questions *sémantiques* par contre concernent la signification concrète de ce concept: à quelle réalité correspond cette définition? À quoi reconnaît-on que des événements réels sont indépendants? Pourquoi des événements réels qui ne s'influencent pas mutuellement satisfont-ils cette définition? Et que signifie au juste “ne pas s'influencer”?

Les questions formelles ne se posent qu'à l'intérieur de l'axiomatique. Les questions sémantiques se posent au contraire à l'extérieur: elles concernent la justification des définitions et axiomes, leur rapport avec une réalité qu'on modélise; elles peuvent être critiques et conduire à relativiser le formalisme, ou même à en contester la pertinence et à en percevoir les limites de validité.

Le danger d'une formation scientifique dépourvue de tout questionnement et de toute pensée critique (danger déjà largement dénoncé au *XIX^e* siècle) est la perte progressive de créativité de la pensée scientifique.

Si on prend la peine de faire certaines études historiques, et de se plonger dans l'ambiance très intime des grandes découvertes scientifiques du passé (de Kepler à Einstein), en lisant les articles originaux, les autobiographies, les commentaires et les polémiques des contemporains, etc., on est frappé par la prédominance des questions sémantiques. Ces dernières sont beaucoup moins présentes dans les périodes de développement qui suivent les découvertes. C'est pourquoi ma principale source d'inspiration a été le contexte historique des découvertes scientifiques majeures, où j'ai puisé la plupart de mes exemples. Les questions sémantiques sont aussi celles que posent les étudiants vraiment curieux, s'ils n'ont pas été trop découragés de le faire ou s'ils ne se sentent pas trop ridicules.

Bien entendu il ne suffit pas de poser des questions sémantiques pour faire des découvertes, mais les véritables découvertes commencent toujours par de telles questions. Ces découvertes consistent généralement à s'apercevoir que certaines évidences n'en étaient pas : par exemple que le mouvement diurne du firmament n'est pas dû à sa rotation, que la lune ne reste pas dans le ciel parce qu'elle est légère, que les calculs effectués par Euler ne marchent pas pour n'importe quelles fonctions mais seulement pour les fonctions analytiques, que la simultanéité de deux événements éloignés dépend de la vitesse de l'observateur, etc. Chacune de ces découvertes est la réponse à une certaine question sémantique.

Un enseignement purement technique, épuré de toute question sémantique, se présente généralement sous la forme d'une axiomatique posée a priori, dont on ignore l'origine et les motivations; on ignore *pourquoi* et *comment* ces axiomes ont été posés un jour parce que ce savoir là n'est pas transmis. Il devient impossible de les mettre en doute, d'en imaginer les limites. Peu à peu, la critique et donc la création deviennent impossibles.

Ce mal, ou du moins le risque d'y succomber, est aussi vieux que la science, il suffit de lire les Anciens pour s'en convaincre. Il n'est dû essentiellement, ni à la massification de l'enseignement scientifique, ni au culte effréné du rendement qui caractérisent la société moderne, puisque les philosophes grecs s'en plaignaient déjà. Il a simplement pris une *forme* moderne.

Un autre mal, réellement moderne celui-là (il est typique du XX^e siècle), est le cloisonnement de la science en *spécialités*, gardées par des clans jaloux de leur propriété intellectuelle. Cette dernière se réduit d'ailleurs le plus souvent à la simple possession de *mots-clés*, au contenu scientifique pauvre, et d'un jargon incompréhensible destiné à masquer ladite pauvreté. La science s'appelait autrefois *Philosophie de la Nature* et formait un tout. Jusqu'au tournant du siècle, tout grand mathématicien comprenait

la Physique aussi bien que la Mathématique ; plus que cela : il ne séparerait pas les deux. Une compréhension véritable des concepts du Calcul des probabilités est impossible à l'intérieur de l'un de ces clans définis par leurs mots-clés. C'est pourquoi je me suis efforcé de renouer avec la Philosophie de la Nature. Et pour que l'ouvrage ne tourne pas à l'encyclopédie (ce qui aurait fortement nui à son but), j'ai choisi de sacrifier un aspect secondaire du sujet, en ne parlant que de probabilités discrètes. Cela évite par exemple de recourir à l'intégrale de Lebesgue, et la place ainsi gagnée est mise à profit pour approfondir *la signification* des concepts. Cette tactique est d'autant plus efficace ici que les probabilités discrètes sont conceptuellement tout aussi riches que les probabilités dénombrables.

Déplorer les maux mentionnés ci-dessus ne changera rien à la situation sociologique. Il est vain de chercher à convaincre la grande masse ou les gouvernements de la gravité de la situation ; la grande masse a d'autres soucis, et pour ce qui est de la gravité, il se passe tant de choses bien plus tragiques qu'on ne mobilisera guère sur le thème de la science menacée. Publier un appel dans la presse, sur un ton de détresse invoquant le déclin de la France ou de l'Europe, équivaut à jeter une goutte d'eau dans le Rhin. D'ailleurs il n'est pas du tout évident que la science ait vraiment gagné à se transformer en cette gigantesque bureaucratie de type soviétique que nous connaissons aujourd'hui, et les appels à sauver l'*esprit* de la science ne seraient pas seulement noyés dans les innombrables appels d'intellectuels pétitionnaires qui se tuent à attirer l'attention sur des problèmes bien plus urgents ; ils seraient aussi noyés parmi les innombrables appels de la nomenklatura scientifique pour l'augmentation de ses crédits.

En conséquence, tout en étant bien conscient de la ténuité de mon action, j'ai pensé qu'il serait plus utile de jeter une bouée de sauvetage à ceux qui se noient. Je signale à ce propos que la bouée que je lance avait auparavant servi à me sauver moi-même de la noyade.

Strasbourg, le 15 mars 1995

I. LE HASARD.

I. 1. Le langage du Calcul des probabilités.

“La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité, qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles.”

Pierre-Simon Laplace
Théorie analytique des probabilités (1819).

Il n'existe pas de meilleure définition de la probabilité que celle-ci, vieille de plusieurs siècles, et c'est d'elle que nous partirons.

Par exemple si on tire “au hasard” un nombre entre 1 et 36, la probabilité d'obtenir 11 est $\frac{1}{36}$; si la probabilité d'obtenir 11 était $\frac{1}{32}$, qui est supérieur à $\frac{1}{36}$, cela signifierait que le nombre 11 est privilégié par la Fortune ou que la roulette est truquée. Il y aurait une cause agissant secrètement et le hasard pur ne pourrait éventuellement être retrouvé qu'au-delà de cette cause. On ne pourrait pas considérer que le tirage est soumis au seul hasard.

On appelle *épreuve* un tel résultat possible. Par principe, toutes les épreuves sont supposées équiprobables.

N.B. Lorsqu'on applique le Calcul des probabilités à la réalité il est bien rare que l'on ait le loisir de s'assurer rigoureusement et à l'avance que cette hypothèse d'équiprobabilité est bien vérifiée, car d'innombrables *causes* peuvent intervenir à notre insu pour fausser les chances. Le modèle mathématique postulant l'équiprobabilité peut être valable lorsque les différentes causes sont suffisamment nombreuses et de forces égales pour qu'aucune ne domine (par exemple dans le cas des accidents de la route), ou bien que des symétries fondamentales de l'espace-temps assurent a priori qu'il ne peut y avoir de domaine privilégié (par exemple dans le cas des phénomènes physiques). Dans le jeu de la roulette, c'est la conception même de la roulette qui garantit l'équiprobabilité avec une grande précision. Toutefois, nous verrons (§2) que l'hypothèse d'équiprobabilité ne signifie rien en soi : encore faut-il savoir quelles sont les épreuves équiprobables.

Un résultat attendu peut être tout un ensemble d'épreuves. Pour donner un exemple, revenons au tirage d'un nombre entre 1 et 36 : on peut se demander quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier. La réponse est $\frac{11}{36}$. Le seul moyen de trouver cette probabilité est de faire la liste exhaustive des nombres premiers compris entre 1 et 36 : 2, 3, 5, 7, 11, 13,

Le hasard

17, 19, 23, 29, 31. On constate qu'ils sont au nombre de onze, soit un peu moins que le tiers de 36. Le résultat attendu n'était pas une épreuve isolée, mais tout un ensemble d'épreuves réunies par une propriété commune.

On appelle *événement* un tel ensemble d'épreuves. L'équiprobabilité des épreuves a pour conséquence immédiate que la probabilité d'un événement est le rapport :

$$\frac{\text{nombre d'épreuves appartenant à l'événement}}{\text{nombre de toutes les épreuves possibles}} \quad (I.1)$$

Dans l'exemple des nombres premiers, le seul moyen de connaître la probabilité était de compter exhaustivement. Mais dans beaucoup de problèmes comportant des régularités, des symétries, ou des invariances, une méthode mathématique appropriée permet de calculer, sans avoir à compter. C'est l'ensemble de ces méthodes qui constitue le *Calcul de Probabilités*.

L'ensemble de toutes les épreuves possibles est évidemment spécifique du problème étudié. On l'appelle *espace des épreuves* (en anglais *sample space*) et on le note très souvent Ω . Dans le langage mathématique on écrit

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \\ & 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, \\ & 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 \} \end{aligned}$$

Le sous-ensemble des nombres premiers est, dans le même langage mathématique

$$A = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 \}$$

L'événement A est ainsi un sous-ensemble de Ω , qui est généralement défini par une propriété commune à tous ses éléments, à savoir ici, "être un nombre premier". Dans le langage du Calcul des probabilités, on désigne souvent un événement par une phrase imagée qui exprime cette propriété commune à tous ses éléments. On dira que A est l'événement "on a tiré un nombre premier". Ainsi on retrouve le sens du mot événement dans le langage courant. Dans le langage du Calcul des probabilités, on désigne indifféremment un événement par une phrase imagée exprimant une certaine propriété, ou comme un sous-ensemble de Ω . Le sous-ensemble en question est alors l'ensemble des épreuves qui possèdent ladite propriété. La phrase imagée permet de se faire comprendre facilement, elle exprime aussi le sens du problème; la traduction mathématique sous forme d'ensemble sert par contre à calculer. Il faut s'exercer à passer de l'un à l'autre. Nous verrons beaucoup d'exemples qui permettront de s'y entraîner.

Si A est un événement ($A \subset \Omega$) on note $\#A$ le nombre d'éléments (le cardinal) de l'ensemble A , c'est-à-dire le nombre d'épreuves qui constituent l'événement A . La probabilité d'un événement A est ainsi :

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad (I.2)$$

qui est une traduction immédiate de (I.1.)

La résolution de n'importe quel problème concret comporte traditionnellement deux étapes :

a) la modélisation (nom moderne de ce qu'on appelait autrefois "mise en équations")

b) la résolution analytique ou le traitement numérique de ces équations.

En Calcul des probabilités, la phase a) de modélisation consiste à trouver l'espace des épreuves Ω correspondant au problème; la phase b) consiste à calculer les probabilités à l'aide de I.2.

La théorie mathématique des probabilités développe une *algèbre*, c'est-à-dire des règles de calcul, qui s'appliquent en général aux probabilités des événements dans des espaces d'épreuves non nécessairement finis. Pour des espaces d'épreuves *finis* (le seul cas qui nous intéresse) cette théorie est élémentaire, mais suffit à traiter tous les problèmes. La suite de l'ouvrage traitera de problèmes classiques qu'il faut connaître, de méthodes de calcul approché, de lois asymptotiques, d'applications diverses.

Ainsi le langage du Calcul des probabilités est extrêmement simple. Pour le moment nous en avons présenté les bases, qui se réduisent au vocabulaire suivant.

— **épreuve** : un des résultats possibles, que le hasard peut choisir, sans en favoriser aucun.

— **espace des épreuves** : l'ensemble de toutes les épreuves.

— **événement** : un ensemble d'épreuves, généralement défini par une propriété commune à ses éléments.

— **cardinal** : nombre d'éléments d'un ensemble fini.

— **probabilité** : la probabilité d'un événement A est le rapport du cardinal de A au cardinal de Ω . C'est donc un nombre toujours compris entre 0 et 1.

Peu à peu ce vocabulaire de base sera enrichi par de nouvelles définitions.

Le mot *hasard* ne fait pas partie du vocabulaire technique du Calcul des probabilités, car ce dernier ne se préoccupe que des règles et des méthodes de calcul. Une discussion sur la nature du hasard est cependant essentielle;

Le hasard

sans cela, le Calcul des probabilités n'est qu'un formalisme vide, qu'on saura utiliser pour résoudre des problèmes scolaires énoncés dans le même formalisme, mais qu'on ne saura plus utiliser devant des problèmes concrets *dépourvus* de formalisation préalable. Nous avons dit que la *modélisation* d'un problème de probabilités consistait à trouver l'espace des épreuves adéquat. Mais "espace des épreuves" sous-entend équiprobabilité, et il n'est pas évident de savoir ce qui est équiprobable. C'est cela qui soulève toute une discussion sur la nature du hasard, à laquelle le reste de ce chapitre est consacré.

I. 2. Étude de deux exemples.

L'exemple extrêmement simple du tirage au hasard d'un nombre entre 1 et 36 ne pose aucun problème de modélisation : le choix de l'ensemble Ω adéquat est immédiat. Il ne laisse rien soupçonner de la profondeur du concept. C'est pourquoi nous étudions dans cette section deux problèmes non triviaux (quoique simples), afin d'illustrer dès maintenant le véritable sens des concepts déjà introduits.

Premier exemple : distribution au hasard de trois boules dans deux boîtes.

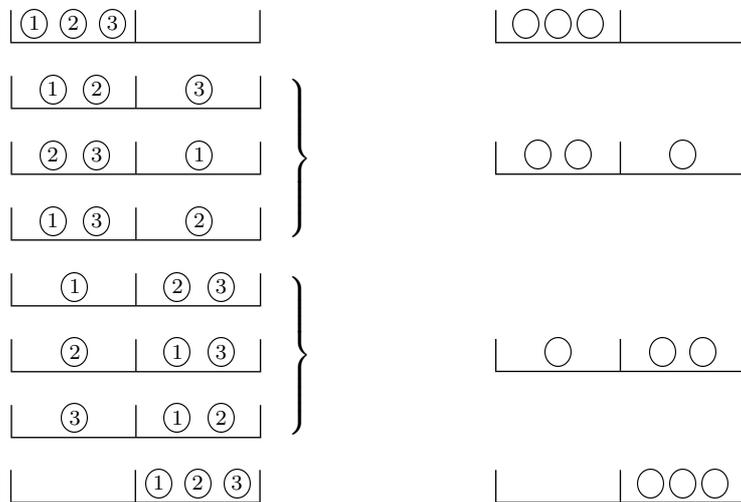


figure 1

On voit sur la figure 1 : dans la colonne de gauche, toutes les répartitions possibles de trois boules numérotées 1, 2, 3 dans les deux boîtes ; il y en a huit en tout. Si on supprime les marques sur les boules, on ne peut plus distinguer les répartitions (1, 2 | 3), (2, 3 | 1), et (1, 3 | 2), ni (1 | 2, 3),

(2 | 1, 3), et (3 | 1, 2). C'est pourquoi, sur la colonne de droite, il n'y a plus que quatre répartitions.

Question: pour des boules sans marques, l'espace des épreuves est-il formé des huit répartitions de la colonne de gauche, ou des quatre de la colonne de droite?

Il se trouve que la réponse dépend de la nature des boules: s'il s'agit de boules macroscopiques obéissant à la Mécanique classique, c'est la première réponse qui convient (et peu importe qu'elles soient numérotées ou non, car le problème n'est pas qu'elles soient subjectivement numérotées, mais qu'elles soient objectivement numérotées); s'il s'agit de particules quantiques obéissant à la statistique de Bose-Einstein, c'est la deuxième réponse qui convient. L'équiprobabilité est bien dans les deux cas l'expression du *pur hasard*, mais il se trouve que le pur hasard ne se situe pas au même niveau de causalité selon que les particules sont classiques ou quantiques.

Dans la plupart des ouvrages sur le Calcul des probabilités, on ne donne pas de la probabilité $\mathcal{P}(A)$ une définition directement dérivée de l'hypothèse d'équiprobabilité comme nous le faisons ici, mais une définition axiomatique du type suivant: "étant donné un ensemble fini Ω , appelé espace des épreuves, on appelle *probabilité* sur Ω une application \mathcal{P} de l'ensemble des parties de Ω sur l'intervalle $[0, 1[$ qui vérifie la propriété d'additivité $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$ pour tout couple de parties A et B disjointes, ainsi que la propriété $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ ". Il est bien clair que la probabilité telle que nous l'avons définie dans (I.2.) satisfait à cette définition axiomatique. Mais ce que la définition axiomatique recouvre est plus général et n'exige pas nécessairement que toutes les épreuves soient équiprobables; on peut donner à chaque épreuve un *poids*, c'est-à-dire un atome de probabilité. Si les poids sont différents il n'y a pas équiprobabilité et (I.2.) doit être remplacé par

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\text{somme des poids des épreuves appartenant à } A}{\text{somme des poids de toutes les épreuves}} \quad (II.2 \text{ bis.})$$

Ceci vérifie aussi la définition axiomatique et inversement, toute application de l'ensemble des parties de Ω sur l'intervalle $[0, +\infty[$ qui vérifie la propriété d'additivité sera de la forme (II.2 bis.), avec le poids $\mathcal{P}(\{\omega\})$ pour chaque épreuve ω .

Les auteurs qui procèdent ainsi ont pour cela une excellente raison: exposer le Calcul des probabilités pour des épreuves non nécessairement équiprobables ne coûte pas une seule phrase de plus que pour des épreuves équiprobables, car tout se déduit de l'additivité (ce qu'on déduit de I.2. passe toujours par l'intermédiaire logique de l'additivité). Pourquoi donc se priver de quelque chose d'absolument gratuit?

En fait l'enjeu est le *sens* du Calcul des probabilités, ou autrement dit, la signification du mot hasard.

La caractéristique du pur hasard est l'équiprobabilité. Nous reviendrons encore sur ce point au paragraphe suivant. Si des épreuves ne sont pas équiprobables, c'est que certaines sont favorisées et donc qu'une cause, qui n'est pas le hasard, agit secrètement. Il ne s'agit pas là d'un choix philosophique: si une étude statistique établit que le cancer du pancréas est plus fréquent dans la haute vallée de l'Isère que partout ailleurs, on en déduit qu'une cause, agissant dans cette haute vallée et non ailleurs (ou agissant plus fortement dans cette haute vallée qu'ailleurs) est responsable de cette surfréquence. Même si après de

Le hasard

longues recherches cette cause reste introuvable, il n'y aura pas de querelle philosophique sur la question de savoir si la Fortune est ou n'est pas aveugle; on ne parlera de hasard que si la fréquence est distribuée uniformément, car c'est là le sens même du mot hasard.

Il peut être commode de disposer de modèles théoriques où l'équiprobabilité n'est pas postulée a priori. Par exemple dans un problème où on jette r boules dans k cases identiques, mais où on ne s'intéresse qu'à l'alternative: "case 1" ou "autre case", il est préférable de modéliser la situation en ne parlant que de deux possibilités seulement, mais de sorte que la probabilité de la première soit $1/k$ et la probabilité de la deuxième $1 - 1/k$. Il s'agit alors d'un modèle phénoménologique et on retrouve le vrai hasard en creusant davantage. Il faut cependant admettre que dans ce cas le gain en simplicité qui résulte du modèle phénoménologique (comparé au modèle avec équiprobabilité) est médiocre. Une expérience plus poussée du Calcul des probabilités montrerait que le gain est médiocre dans tous les cas. Nous verrons au chapitre **IV** la *formule des probabilités conditionnelles* qui établit le lien entre de tels modèles phénoménologiques et le modèle équiprobable sous-jacent.

En revanche le fait de poser les problèmes de probabilité en remontant systématiquement au *pur hasard*, sans s'arrêter à des représentations phénoménologiques, est foncièrement instructif.

C'est justement ce que montre l'exemple ci-dessus de trois boules à disposer dans deux cases. On peut pour les deux situations discutées considérer un espace des épreuves à quatre éléments, les quatre éléments étant :

$$\begin{aligned}\omega_1 &: \begin{cases} \text{trois boules dans la case 1} \\ \text{zéro boule dans la case 2} \end{cases} \\ \omega_2 &: \begin{cases} \text{deux boules dans la case 1} \\ \text{une boule dans la case 2} \end{cases} \\ \omega_3 &: \begin{cases} \text{une boule dans la case 1} \\ \text{deux boules dans la case 2} \end{cases} \\ \omega_4 &: \begin{cases} \text{zéro boule dans la case 1} \\ \text{trois boules dans la case 2} \end{cases}\end{aligned}$$

Dans le cas de la statistique de Bose-Einstein, les boules sont par exemple des photons et les cases des états quantiques; les quatre épreuves $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ sont équiprobables; dans le cas des boules macroscopiques, par contre (et peu importe qu'elles soient numérotées ou non, elles sont toujours *objectivement* discernables, du fait qu'elles sont et restent situées dans l'espace-temps), les quatre épreuves ne sont pas équiprobables; leurs probabilités respectives sont $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$. On peut alors calculer tout ce qu'on veut sur les probabilités de tous les événements concernant ces épreuves, et on aboutira aux mêmes résultats dans le modèle à quatre éléments non équiprobables que dans le modèle à huit éléments équiprobables. Mais bien entendu, il aura fallu auparavant trouver les valeurs $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$. Et pour cela il n'y avait aucun autre moyen que de sortir du modèle à quatre éléments, venir en secret dans le modèle à huit éléments équiprobables pour y déterminer les valeurs des poids, puis retourner au modèle à quatre éléments en faisant semblant de les avoir devinées grâce au génie.

Si on analyse bien cet exemple, on comprend que le *pur hasard* est une expression des symétries fondamentales: si les huit épreuves du modèle à huit éléments sont effectivement équiprobables c'est parce que les trois boules peuvent être isolées dans l'espace. Quoiqu'il arrive à l'une des trois boules, cela n'affecte pas l'état des deux autres. Lorsque la Fortune dispose la deuxième dans l'une des deux cases, sa cécité consiste à ne pas percevoir l'état d'occupation des deux cases par la première boule, mais seulement les positions spatio-temporelles relatives de la deuxième boule et des

deux cases. En revanche, lorsque la même Fortune dispose le second photon dans l'un des deux états, sa cécité consiste à ne pas percevoir les positions spatio-temporelles relatives des photons (ces positions n'ont d'ailleurs aucun sens objectif) et des deux états quantiques, mais seulement les états d'occupation. Ainsi dans le premier cas aucune des boules ne favorise une case, tandis que dans le second cas aucun des photons ne favorise un état d'occupation. Dans le premier cas le pur hasard est le reflet d'une invariance spatio-temporelle (les deux cases sont équivalentes car ce sont des lieux symétriques de l'espace, et chacune des trois boules agit indépendamment des autres, c'est-à-dire que sa trajectoire ne dépend pas du fait que les autres boules ont été lancées avant ou après). Dans le second cas le pur hasard est le reflet d'une indiscernabilité objective des trois photons; seuls peuvent être objectivement distingués les quatre états d'occupation.

Or aucun problème de probabilité ne peut être résolu sans recourir directement au postulat que la Fortune est aveugle. Si une possibilité est favorisée par rapport à une autre (dans le sens qu'elle est plus probable) on ne peut calculer a priori sa probabilité qu'en recherchant le hasard pur à un niveau supérieur. Mais on ne peut évidemment appliquer le postulat que si on sait quelle symétrie intervient dans le problème. Cela est tellement vrai qu'on peut le vérifier par exemple dans le livre de William FELLER *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (John Wiley ed.) Je choisis ce livre parce que c'est, sur le sujet, le livre de référence: il est pratiquement impossible d'enseigner mieux que FELLER les questions traitées dans son livre; c'est pourquoi certaines parties de ce cours sont simplement reprises d'après FELLER (voir par exemple le chapitre *marches aléatoires*). Bien qu'ennemi juré du formalisme mathématique, FELLER ne renonce pas à la commodité de l'approche axiomatique qui, comme nous l'avons dit plus haut, ne coûte aucun effort supplémentaire, et laisse la porte ouverte aux espaces d'épreuves non équiprobables. De ce fait il est conduit à donner des exemples ou des exercices où interviennent des espaces d'épreuves non équiprobables. Mais bien sûr dans chacun de ces exemples ou exercices, les poids qui sont "parachutés" au lecteur ont été déterminés par l'auteur à partir d'un modèle à épreuves équiprobables.

Ainsi, exercice 4. page 24:

"A coin is tossed until for the first time the same result appears twice in succession. To every possible outcome requiring n tosses attribute probability $1/2^{n-1}$. Describe the sample space. Find the probability of the following events: (a) the experiment ends before the sixth toss, (b) an *even* number of tosses is required."

Voir aussi les deux exercices qui suivent celui-ci.

Le choix du poids $1/2^{n-1}$ provient d'une équiprobabilité à un niveau supérieur (nous reviendrons là-dessus au chapitre *probabilités conditionnelles*). On trouvera encore un tel exemple pages 47 – 48 (chap *II* §7: Examples for waiting times). Fréquemment dans son ouvrage, FELLER exprime la condition "assuming perfect randomness, ...". Cette condition signifie toujours que le problème possède un modèle avec équiprobabilité, et dans lequel cette équiprobabilité résulte d'une symétrie évidente (le tout étant de la trouver). On appellera *probabilités a priori* les probabilités ainsi obtenues par considération d'une symétrie. En l'absence de symétrie connue on peut aussi mesurer a posteriori les probabilités par la statistique; on ignore alors où est intervenu le pur hasard, et on parlera de *probabilités empiriques*. On peut toujours construire a posteriori un modèle phénoménologique reprenant ces probabilités empiriques. Mais j'ai estimé préférable de recourir à la formule des probabilités conditionnelles (chap. **IV**).

Deuxième exemple: tirage au hasard d'une corde dans un cercle.

Cet exemple est célèbre: il est tiré du *Calcul des probabilités* de Joseph Bertrand, un ouvrage paru en 1888. Sa célébrité provient de ce qu'il a été repris et commenté par Henri Poincaré, puis encore par Émile Borel. Il examine trois manières différentes de tirer au hasard une corde dans un cercle de rayon R :

1. on tire au hasard deux points sur le cercle (ce qui équivaut à deux nombres compris entre 0 et 2π): ils définissent une corde, celle qui joint les deux points;
2. on tire au hasard une direction (ce qui équivaut à un nombre θ entre 0 et 2π) et une distance d au centre du cercle (ce qui équivaut à un nombre entre 0 et R); ces deux données définissent univoquement une corde perpendiculaire à la direction donnée et à la distance d du centre;
3. on tire au hasard un point à l'intérieur du cercle: ce point définit univoquement une corde dont le centre est ce point.

À première vue le problème relève du Continu: il y a un continuum de cordes, et les nombres qui les déterminent sont des nombres réels. Cela ne pose aucune difficulté particulière, mais il est de toute façon aisé de discrétiser le problème: on découpe les intervalles dans lesquels les nombres doivent être choisis au hasard en un grand nombre de parties égales. Cela est montré sur la figure 2 pour les trois cas.

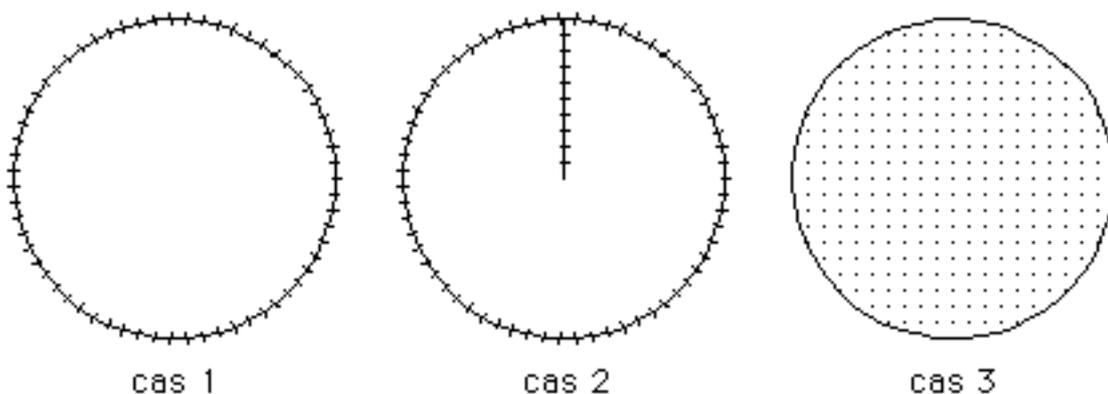


figure 2

On a représenté la discrétisation du problème dans les trois cas. Afin de ne pas surcharger la figure, on n'a représenté la discrétisation que radialement pour les cas 1 et 2. Dans le cas 3, le quadrillage détruit bien sûr la symétrie sphérique, mais celle-ci est conservée statistiquement.

Problème: quelle est la probabilité pour que la distance de la corde au

centre du cercle soit inférieur à $R/2$ ou ce qui est équivalent, quelle est la probabilité pour que la longueur de la corde soit supérieure à $R\sqrt{3}$?

Les réponses dépendent du modèle : dans le cas 1 elle vaut $\frac{1}{3}$, dans le cas 2 elle vaut $\frac{1}{2}$, dans le cas 3 elle vaut $\frac{1}{4}$. La différence provient du fait que l'espace Ω de toutes les cordes possibles n'est pas le même dans les trois cas. Les figures 3.1, 3.2, et 3.3 montrent quel est l'espace Ω respectivement dans les cas 1, 2 et 3 (on n'a représenté que la partie radiale). Dans son livre, Joseph Bertrand présentait cet exemple dans un but de critique, comme un problème mal posé. Il avait raison, puisque l'énoncé ci-dessus ne permet pas à lui seul de déterminer lequel des trois modèles est le bon.

Une analyse détaillée du phénomène permet de comprendre la différence entre les trois figures. Introduisons les coordonnées suivantes :

- u l'angle polaire de la médiatrice de la corde
- v le demi-angle d'ouverture de la corde
- d la distance de la corde au centre du cercle et $t = \frac{d}{R}$
- x, y les coordonnées cartésiennes du milieu de la corde.

On peut dire que dans le modèle 1 on choisit les nombres u et v au hasard, c'est à dire que u est pris au hasard dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ et v au hasard dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ (en présentant ce modèle, nous avons dit qu'on choisissait au hasard les deux extrémités u_1 et u_2 de la corde, et non les paramètres u et v introduits ci-dessus, mais nous verrons que cela est équivalent). L'expression *au hasard* signifie que dans ces intervalles il n'y a pas de région privilégiée. Si on discrétise le problème comme dans la figure 2, cela conduit à diviser ces intervalles en parties égales.

Par contre dans le modèle 2 ce sont les nombres u et t qui sont choisis au hasard dans les intervalles $[0, 2\pi]$ et $[0, 1]$.

Enfin, dans le modèle 3 ce sont les nombres x, y qui sont choisis au hasard dans le domaine $x^2 + y^2 < R^2$.

Ces choix *au hasard* se traduisent mathématiquement par le fait que les probabilités sont les rapports des aires :

cas 1.

$$P_1 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dv du}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv du}$$

cas 2.

$$P_2 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} dt du}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 dt du}$$

Le hasard

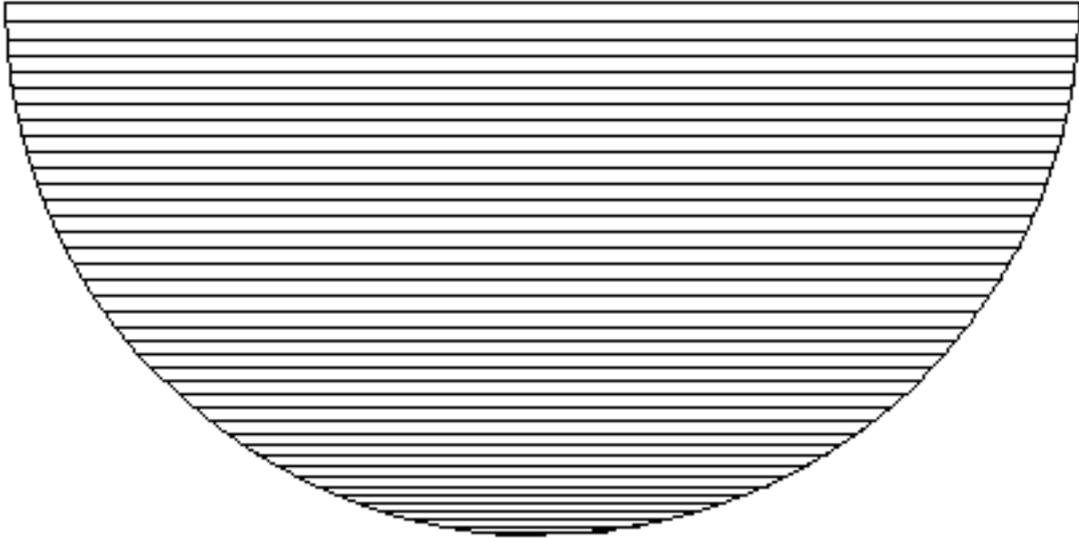


figure 3.1.

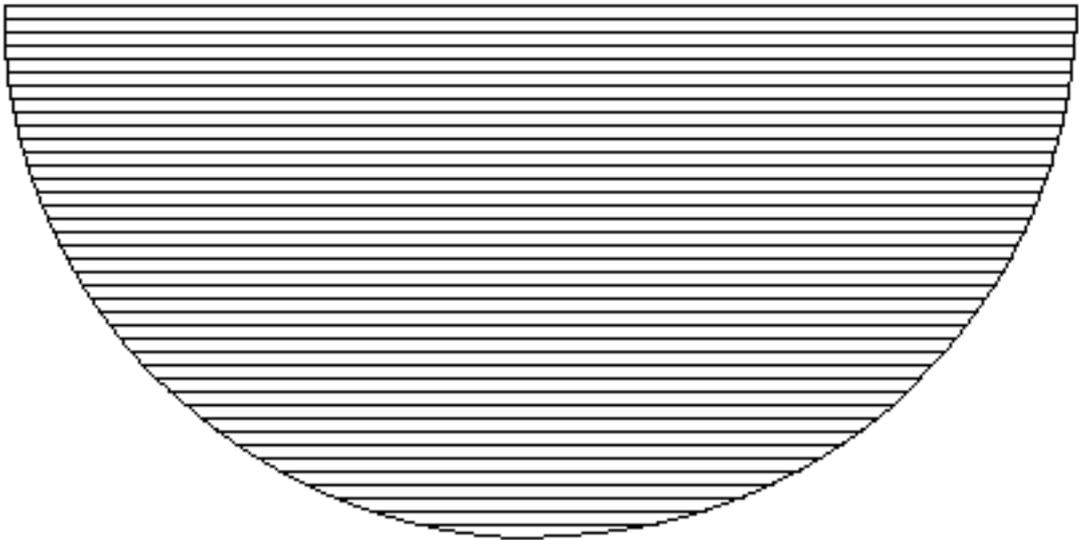


figure 3.2.

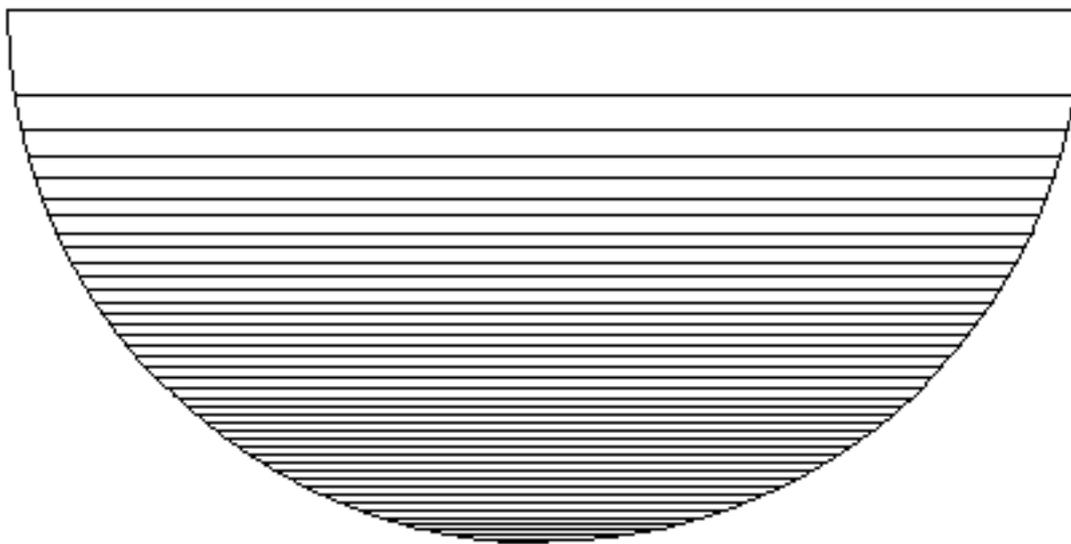


figure 3.3

cas 3.

$$P_3 = \frac{\iint_{x^2+y^2 < R^2/4} dx dy}{\iint_{x^2+y^2 < R^2} dx dy}$$

Entre ces différents paramètres on a les relations suivantes :

$$d = R \cos v$$

$$x = d \cos u$$

$$y = d \sin u$$

de sorte que si on les exprime tous en fonction de u, t cela donne

$$v = \arccos t$$

$$x = R t \cos u$$

$$y = R t \sin u$$

Si maintenant on rapporte les cas 1 et 3 aux coordonnées u, t , c'est-à-dire si on fait le changement de variable correspondant dans les intégrales, les probabilités deviennent respectivement :

$$P_1 = \frac{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dv}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} dv} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt} \quad P_2 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} dt}{\int_0^1 dt} \quad P_3 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} t dt}{\int_0^1 t dt}$$

Le hasard

(Les intégrales en du se factorisent puis se simplifient, ce qui résulte simplement de la symétrie de rotation).

On voit ainsi que le changement de coordonnées a introduit des densités, $1/\sqrt{1-t^2}$ dans le cas 1 et t dans le cas deux, qui sont plus grandes pour t proche de 1 que pour t proche de 0. Cela signifie que le choix au hasard du nombre v dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ ou le choix au hasard d'un point x, y sur le cercle ne correspondent plus à un choix au hasard du nombre t . Si on choisit au hasard v dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, de sorte qu'aucune région de cet intervalle ne soit favorisée, alors, pour les valeurs correspondantes de t , on favorise la région proche de 1 par rapport à la région proche de 0.

Cette différence de répartition est due à la non linéarité du changement de variable. Elle apparaît clairement sur les figures 3.1 et 3.3 : les cordes proches du bord (ce qui correspond à t proche de 1) sont favorisées par rapport à la figure 3.2. Par contre le passage des coordonnées u_1, u_2 (abscisses angulaires des extrémités) aux coordonnées u, v est linéaire : $u_1 = u - v/2$ et $u_2 = u + v/2$; c'est pourquoi dans le cas 1 il est indifférent de choisir u_1, u_2 au hasard ou u, v .

C'est ce qui explique que les probabilités pour que $t < 1/2$ soient plus petites dans les cas 1 et 3 (resp. $1/3$ et $1/4$) que dans le cas 2 ($1/2$). Joseph Bertrand attribue l'ambiguïté au continu ; il est vrai que lorsqu'on discrétise, comme sur les figures 3, on voit bien la différence, qui ne se verrait pas dans le continu. Cependant Émile Borel⁽¹⁾ a critiqué cette critique de Bertrand en montrant que l'ambiguïté ne vient pas du continu, mais du fait que le niveau où intervient le hasard n'est pas précisé.

Ainsi *il n'est pas équivalent* de choisir au hasard les deux extrémités de la corde (cas 1), ou de choisir au hasard son milieu (x, y) (cas 3), ou encore de choisir au hasard sa direction et sa distance au centre (cas 2). Mais supposons qu'on fasse l'expérience concrète que voici : on jette, à partir d'une ouverture pratiquée dans le plafond, des millions de fétus de paille sur le plancher. Afin d'assurer une bonne dispersion des brins, on place un puissant ventilateur près de l'ouverture dans le plafond. Sur le sol, on a tracé un grand cercle à la craie. Pour chaque brin de paille, on considère la droite qui le prolonge ; dans beaucoup de cas, la droite ne coupera pas le cercle, mais on ne compte pas ces brins. Pour chaque brin dont le prolongement coupe le cercle, on considère la corde que ce prolongement découpe sur le cercle.

Comment se distribuent ces cordes ?

On a ici affaire à une situation pratique : ce n'est plus *nous* qui décidons d'une manière de choisir les cordes, les cordes se distribuent toutes seules.

⁽¹⁾ Émile Borel *Le hasard* (Librairie Félix Alcan, 1914), page 84

Où intervient alors le hasard? L'étude des trois cas a montré qu'il y a différentes distributions possibles pour les cordes, mais dans une expérience réelle il y aura forcément une certaine distribution particulière.

Dans cette expérience, c'est le modèle $N^{\circ}2$ qui est le bon. On peut s'en convaincre sans faire l'expérience, et sans calculer le mouvement des brins. Pour cela, il suffit de remarquer que la distribution des brins sur le plancher ne peut pas dépendre de la présence du cercle: il serait absurde que les brins se distribuent différemment selon qu'on a tracé un cercle ou qu'on n'en a pas tracé (sauf si par exemple le cercle n'était pas matérialisé par de la craie, mais par de petits aimants, qui attireraient les brins de paille supposés aimantés, ou tout autre artifice de ce type). De même, les brins seront distribués à peu près de la même façon dans toutes les régions du plancher (sauf bien sûr si on s'écarte trop du trou dans le plafond). Par conséquent, la distribution des cordes que le prolongement des brins découpe sur un cercle sera la même quelle que soit la région où on trace le cercle. Il est donc impossible que se produisent les situations 1 ou 3, dans lesquelles les cordes sont plus denses près du bord du cercle: si tel était le cas pour un cercle particulier, ce ne pourrait plus l'être pour un autre cercle tracé un mètre plus loin. Il faudrait que les brins "sentent" la présence du cercle et tombent délibérément d'une manière qui favorise le bord du cercle. Seul le modèle $N^{\circ}2$ correspond à une distribution des droites qui soit indépendante de l'existence du cercle.

I. 3. La signification de l'équiprobabilité.

Jusqu'ici nous avons souvent évoqué le "pur hasard", qui ferait des "choix équiprobables". Ces considérations sur le *pur hasard* ne sont pas nécessaires pour un exposé axiomatique et déductif, qui suppose un modèle mathématique (c'est-à-dire un espace des épreuves Ω) déjà donné, et récuse toute question sur l'origine ou sur le sens de ce modèle. Elles le deviennent cependant si on veut maîtriser l'art de la modélisation et être capable devant une situation concrète de construire soi-même le modèle adéquat.

L'affirmation que *le pur hasard* fait des choix équiprobables n'est pas un postulat métaphysique. C'est un *principe*, qui est au Calcul des probabilités ce que le principe de relativité de Galilée est à la Mécanique. Toutefois il peut laisser le sentiment qu'il s'agit de métaphysique à cause de l'invocation du "pur hasard". Ce n'est pas le mot hasard qui insulte ainsi le positivisme, mais plutôt l'épithète qui l'accompagne et qui évoque "les pures idées", "la Raison pure", etc. C'est pourquoi l'explication qui va suivre est nécessaire.

Afin que la discussion soit bien concrète, voyons comment les choses se passent dans l'exemple simple des cordes sur un cercle. Nous avons vu

Le hasard

à ce propos qu'il y avait différentes manières de choisir une corde sur un cercle. Imaginez maintenant un physicien qui observe pendant longtemps l'apparition aléatoire de cordes sur un cercle, mais qui ignore "comment le hasard a choisi les cordes" (vous pouvez imaginer que c'est un programme écrit par vous-même qui fait apparaître, au rythme de une par seconde, des cordes sur l'écran de l'ordinateur; pour le choix de chaque corde le programme fait appel deux fois – puisqu'il faut deux coordonnées – à une fonction **random**; le physicien qui observe le résultat ignore comment sont écrits les programmes). Il accumule les observations et, sachant qu'il y a la symétrie de rotation, il ne note la position des cordes que si, à ε près, elles sont parallèles à une direction fixée; il obtient ainsi, disons, la figure 3.1. Ce physicien peut *en déduire* que les cordes ont été distribuées en laissant le hasard choisir les deux extrémités, indépendamment l'une de l'autre, sur le cercle. Dans le graphique qu'il obtient (semblable, donc, à la figure 3.1), les cordes ne sont pas distribuées uniformément le long des ordonnées, c'est-à-dire le long du rayon. "Le hasard pur" n'est donc pas intervenu à ce niveau (celui de la distribution le long du rayon, qui est aussi le choix de la coordonnée t) mais au niveau du choix des extrémités. (si les cordes sont tracées par votre programme, le physicien peut ainsi savoir que la fonction **random** choisit les deux extrémités, comme dans le cas 1, et non les coordonnées x, y du centre ou les coordonnées t, u). Le physicien peut donc, par l'observation, départager les différentes manières d'agir du hasard. Cela montre qu'il s'agit d'une information pratique et observable, et non d'une hypothèse métaphysique.

Lorsqu'on dit "le hasard pur est intervenu à ce niveau" ou "le hasard pur choisit les deux extrémités", cette manière imagée de s'exprimer peut suggérer qu'il y aurait une divinité douée de volonté et veillant, par une vigilance de tous les instants, à ne favoriser aucun de ses choix par rapport aux autres, et que par conséquent le problème posé ci-dessus (trouver le niveau où le hasard fait son choix), consisterait à pénétrer les desseins de cette divinité. Il ne s'agit que d'une façon de parler, comme par exemple lorsqu'on dit "la Nature obéit à des lois".

On ne postule aucune divinité, et on peut au contraire postuler que le hasard provient de causes toutes rationnelles, qu'il n'est que l'effet d'un enchevêtrement d'innombrables influences qui se contrarient mutuellement, créant ainsi l'illusion appelée hasard. Mais si ces causes, rationnelles ou non, favorisent certains résultats au détriment d'autres, on dira que ce favoritisme a une explication causale et non qu'il est un effet du hasard.

Pour illustrer cela, revenons encore à l'exemple des cordes sur un cercle. Dans ce problème il n'y avait pas de phénomène physique; il s'agissait de géométrie abstraite et "les choix du hasard" portaient sur des nombres.

Ainsi “le hasard” devait choisir, soit deux nombres α, β dans l’intervalle $[0, 2\pi[$, soit deux nombres u, t dans (respectivement) les intervalles $[0, 2\pi[$ et $[0, 1]$, soit un point dans le disque. Pour tout calculer, nous sommes partis du seul postulat que quand “le pur hasard” choisit un nombre dans un intervalle, il ne favorise aucune région de l’intervalle: par exemple les nombres de $[0, 1]$ n’ont pas plus de chances d’être choisis s’ils sont proches de 0, que s’ils sont proches de 1. Ce qu’on exprime mathématiquement en disant que la probabilité pour que le nombre choisi dans $[0, 1]$ se trouve “par hasard” entre a et b est égale à $b - a$. Il n’y a rien de plus dans cette expression mathématique que l’intuition première, que tout le monde comprend a priori. De même pour un point “pris au hasard” dans le disque: la probabilité pour que “par hasard” il se trouve dans la région A du disque est le rapport

$$\frac{\text{aire de } A}{\text{aire du disque}}$$

Or l’étude détaillée des différentes formes de choix a montré que si par exemple les deux extrémités α, β de la corde sont choisies dans l’intervalle $[0, 2\pi[$, sans favoriser aucune région de cet intervalle, alors *ipso facto* la coordonnée t (distance au centre rapportée au rayon) sera choisie – dans l’intervalle $[0, 1]$ – de manière que les nombres proches de 1 soient favorisés par rapport à ceux qui sont proches de 0. Mathématiquement, la probabilité pour que t se trouve “par hasard” entre a et b n’est plus $b - a$, mais

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Le physicien que nous évoquions plus haut, qui observe ce favoritisme, ne dira pas (*personne* ne le dira) “le hasard préfère les cordes proches du bord que les cordes proches du centre”. Il dira “il y a un choix aléatoire, *biaisé* par un phénomène déterministe”.

Attention! Il ne s’agit pas d’une querelle de mots. Si on change les mots, on ne supprime pas l’insatisfaction du physicien, qui veut savoir pourquoi les valeurs de t ont plus de chances d’être proches de 1 que de 0. On pourrait *convenir* – dans le sens où Henri Poincaré⁽²⁾ disait que la mesure du temps est une convention et qu’aucune n’est plus objective qu’une autre – que le hasard choisit t de façon non équiprobable, avec la densité $1/\sqrt{1-t^2}$. Mais cela ne nous épargnerait pas les questions, cela ne ferait que nous rendre l’ensemble des calculs effectués pour les trois cas plus compliqués, car nous devrions traîner partout la répercussion de cette densité, de même que si on voulait absolument mesurer le temps selon une échelle différente, et non

⁽²⁾ Henri Poincaré *La valeur de la science*, chapitre II “La mesure du temps”.

Le hasard

linéaire par rapport à l'usuelle, on devrait traîner la répercussion de ce changement de variable dans toutes les équations de la Physique. Poincaré a certes écrit que la mesure du temps est une convention et qu'aucune n'est plus objective qu'une autre, mais la phrase qui est écrite immédiatement avant dans son texte est "le temps doit être défini de telle façon que les équations de la Mécanique soient aussi simples que possible".

C'est de là que dérive la notion de repère galiléen, et c'est pourquoi "le niveau où les choix du hasard sont équiprobables" joue en Calcul des probabilités un rôle analogue à celui du repère galiléen en Mécanique. Lorsque le physicien observe les cordes, distribuées le long du rayon selon la loi $1/\sqrt{1-t^2}$, il peut *en déduire* que le niveau où les choix étaient équiprobables était celui du choix des extrémités de la corde, de même qu'un physicien enfermé dans une capsule loin de toute source de gravitation, qui observe que les billes qu'il lâche dans sa cabine suivent un mouvement uniformément accéléré, peut en déduire que sa capsule subit de l'extérieur un mouvement uniformément accéléré en sens opposé à celui des billes.

Afin de ne pas trop surcharger ce chapitre, la discussion sur le "conventionnalisme" de Poincaré, ses propres commentaires sur le paradoxe de Bertrand, et la parenté avec le principe de relativité de Galilée ne sont ici que résumés succinctement. Le sujet est davantage développé dans un article, "*Le paradoxe de Bertrand*", qui peut être trouvé à l'adresse U.R.L. :

[http : //moire4.u-strasbg.fr/hist/bertrand.htm](http://moire4.u-strasbg.fr/hist/bertrand.htm)

Tout cela est bien beau, direz-vous, mais ne nous dit pas comment on va trouver le niveau où agit le hasard pur, c'est-à-dire le niveau où on a affaire à des choix équiprobables. En outre, il pourrait y avoir des niveaux différents, mais équivalents, et on ne pourrait pas savoir dans lequel des deux le hasard agirait "vraiment".

Il se trouve qu'il n'existe pas de méthode pour cela. Quant à la question de trancher entre deux niveaux équivalents, elle par contre est métaphysique; elle est exactement aussi métaphysique que la question de savoir quel repère galiléen est "vraiment" immobile. Dans le cas des cordes sur un cercle, la recherche du niveau où agit le pur hasard a été facile, car nous connaissions déjà trois différentes manières de distribuer les cordes et il a suffi d'en reconnaître une parmi les trois. Dans les problèmes d'urnes, de boules, de marches aléatoires, etc. (autrement dit dans les problèmes scolaires de Calcul des probabilités) cette recherche du "niveau où agit le hasard pur" relève de la *modélisation*; le "niveau où agit le hasard pur" est très souvent suggéré, ou même tout simplement donné, par l'énoncé du problème.

La modélisation a toujours fait peur aux étudiants car elle demande de

l'imagination, de l'astuce, et sa réussite n'est pas prévisible ou chiffrable ; tandis que si la modélisation est déjà faite, ou suggérée de façon évidente, il n'y a plus qu'à calculer en appliquant quelques théorèmes ou formules vues dans le cours. Tout cela est classique.

Mais il y a plus grave. Après tout, lorsqu'un étudiant n'arrive pas à trouver le modèle correct, c'est parce qu'il n'est pas encore habitué aux poncifs des problèmes scolaires, et dans ce cas l'enseignant connaît la bonne réponse, qu'il avait lui-même apprise quand il était étudiant, par mimétisme plus que par imagination. Par contre il y a des problèmes posés par la Physique pour lesquels *personne* ne sait au départ à quel niveau agit le hasard pur, et le trouver est une affaire de génie (ce qui justifie tout-à-fait, d'ailleurs, le malaise que les étudiants éprouvent face à la modélisation). L'exemple historique le plus spectaculaire est évidemment la découverte de la Mécanique quantique : à partir de faits expérimentaux (rayonnement du corps noir, diffraction des électrons par des cristaux, etc.) il a fallu trouver par la recherche le niveau auquel le hasard pur agissait ; on ne l'a toujours pas vraiment trouvé. Il serait donc absolument naïf de vouloir disposer d'une méthode générale et systématique pour le trouver.

Il semble ressortir de cette discussion que l'équiprobabilité des choix du hasard, tout comme pour la mesure du temps ou les repères galiléens, est en quelque sorte *la définition même* du hasard. On pourrait penser que le hasard peut se définir autrement, indépendamment de la manière dont s'opèrent ses choix, à partir de considérations plus fondamentales, de telle sorte que l'équiprobabilité serait une propriété qui se déduirait de la définition, et non un postulat a priori. Il se trouve que pour le temps ou les repères galiléens, la Physique ne fournit pas de connaissance plus profonde que ce conventionnalisme (c'est le nom donné à la position de Poincaré citée précédemment), du moins jusqu'à nos jours. En revanche, l'Histoire de la Physique contient beaucoup d'exemples où un progrès dans la connaissance apporte une explication plus approfondie d'un phénomène dont la description avait été jusque là purement conventionnaliste. Ainsi nous comprenons aujourd'hui *pourquoi* le mouvement apparent des planètes dans le firmament (c'est-à-dire par rapport à la *sphère des fixes*) est comme il est ; par exemple nous comprenons pourquoi une planète avance (dans le même sens que les étoiles), puis ralentit, puis revient en arrière, selon une trajectoire apparemment erratique : l'explication en est que nous la voyons en perspective à partir de la Terre qui est elle-même en mouvement.

Cette explication est l'*idée* du système de Copernic. Mais dans le système de Ptolémée, où la Terre était supposée immobile au centre, il fallait supposer plusieurs sphères imbriquées les unes dans les autres et tournant autour d'axes différents, la plus éloignée étant la sphère des fixes qui portait les

Le hasard

étoiles, les sphères intérieures portant chacune une planète. Dans ce système de Ptolémée le mouvement erratique des planètes était certes expliqué par les mouvements relatifs des différentes sphères, mais il n’y avait pas *une* combinaison unique de sphères compatible avec le mouvement observé. De sorte que dans ce système la question de savoir laquelle de ces combinaisons était “réellement” en fonction dans le ciel était une question métaphysique ; on ne pouvait répondre que par le conventionnalisme, en disant que parmi toutes les combinaisons de sphères produisant les mouvements planétaires apparents observés, il fallait choisir celle pour laquelle les calculs sont les plus simples possibles. Dans l’astronomie moderne, au contraire, il n’y a pas de choix conventionnel : le système solaire est tel qu’il est, nous ne savons pas pourquoi il est précisément comme cela plutôt qu’autrement, mais nous ne pouvons pas décider de décrire autrement la trajectoire de Mars dans le seul but de simplifier les calculs. Si nous n’avons plus cette liberté, c’est parce que nous en savons trop : les astronomes du Moyen-Age considéraient que seul le mouvement apparent des planètes dans le ciel (donc sa projection radiale sur la voûte céleste) était une connaissance objective. Aujourd’hui leur mouvement dans les *trois* dimensions est soumis à la connaissance objective, ce qui détruit toute possibilité de conventionnalisme à ce niveau. L’Histoire de la Physique regorge d’autres exemples semblables.

C’est pourquoi la question posée plus haut à propos du hasard mérite d’être approfondie. Le hasard peut-il être conçu comme objectif, de sorte que l’équiprobabilité de ses choix soit une nécessité, ou au contraire, à l’instar du temps et de l’espace, est-il – du moins jusqu’à nouvel ordre – impensable autrement que comme convention ?

Il se trouve que, selon les présupposés, l’une ou l’autre réponse est possible. C’est ce que nous allons examiner dans les deux sections suivantes.

I. 4. Hasard et déterminisme mathématiques.

Tous les événements, ceux mêmes qui par leur petitesse semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du soleil. Dans l’ignorance des liens qui les unissent au système entier de l’univers, on les a fait dépendre des causes finales, ou du hasard, suivant qu’ils arrivaient et se succédaient avec régularité, ou sans ordre apparent ; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles que l’expression de l’ignorance où nous sommes des véritables causes.

Pierre-Simon Laplace
Théorie analytique des probabilités (1819).

Ce passage célèbre est le manifeste du déterminisme : rien n’est aléatoire, tout est rigoureusement déterminé, mais souvent le développement déterministe d’un processus est tellement chaotique que nous ne pouvons rien

calculer du processus exact, que seules des probabilités peuvent être calculées. La présente section et la suivante sont consacrés à cette explication du hasard. L'affirmation de Laplace n'a jamais été démentie depuis, puisque là où elle pourrait éventuellement l'être nous sommes ignorants: c'est ce qu'on appelle un postulat métaphysique (il ne peut être tranché par l'expérience). Avec la Mécanique quantique nous *ne savons pas* d'où provient le hasard qu'elle postule. Mais par exemple le hasard dans le jeu de la roulette obéit entièrement à la conception de Laplace. La question de savoir si le hasard postulé par la Mécanique quantique peut s'expliquer à la manière de Laplace est ouverte, mais il faut dire que tant que la valeur d'une telle explication ne peut pas être tranchée par l'expérience, elle reste spéculative. Peut-être une telle explication, même sans être tranchée par l'expérience, pourrait-elle du moins réduire le mystère de ce hasard dont nul ne comprend la cause; mais pourquoi un déterminisme serait-il moins mystérieux que le hasard?

Aujourd'hui on appelle *chaos déterministe* le mécanisme par lequel, comme l'entendait Laplace, le déterminisme se transforme en hasard. Mais il faut aussitôt ajouter que le déterminisme aussi peut être l'effet du hasard, par l'intermédiaire de la loi des grands nombres (nous reviendrons là-dessus aux chapitres suivants, notamment à la fin du chapitre **II**, ainsi qu'aux chapitres **VI** et **VII**). De sorte que, du déterminisme ou du hasard, chacun peut être la cause première de l'autre.

Comme nous l'avons toujours fait jusqu'ici (et, rassurez-vous, nous continuerons) nous allons rendre la discussion concrète par l'étude de quelques exemples simples.

Voici un premier exemple extrêmement simple de chaos déterministe: on prend un nombre irrationnel, disons $e \simeq 2.718\,281\,828\dots$ pour fixer les idées. Puis on considère la suite de nombres $u_n =$ la partie décimale de $n \cdot e$ (c'est-à-dire qu'on ne retient du nombre $n \cdot e$ que les chiffres après la virgule). Ainsi les nombres u_n sont tous compris entre 0 et 1. Pour donner une idée, voici les cinq premiers termes de cette suite:

$$u_1 = 0.718\,281\,828\dots$$

$$u_2 = 0.436\,563\,656\dots$$

$$u_3 = 0.154\,845\,485\dots$$

$$u_4 = 0.873\,127\,313\dots$$

$$u_5 = 0.591\,409\,142\dots$$

Si on calcule un très grand nombre de termes de cette suite, disons un milliard, on obtiendra donc un gros échantillon de nombres compris entre 0 et 1.

Le hasard

Il se trouve que cette suite de nombres a apparemment les mêmes propriétés qu’une suite tirée au hasard ; d’après le préjugé que nous avons sur le hasard, à savoir qu’il ne favorise pas une région particulière de l’intervalle, 10^9 nombres “pris au hasard” se répartissent uniformément dans l’intervalle : dans n’importe quel sous-intervalle $[a, b] \subset [0, 1[$, il y en aura environ $(b-a) \cdot 10^9$. Mais il en va de même pour la suite déterministe u_n : ces nombres se répartissent uniformément dans l’intervalle. Si, en évitant soigneusement de révéler comment la suite u_n a été engendrée, on en confiait le résultat à un statisticien pour qu’il le soumette aux tests usuels de la statistique, il serait impossible à celui-ci de détecter un écart par rapport aux lois du hasard ; le seul écart, infime, qui pourrait être observé, diminuerait en augmentant la taille de l’échantillon (nous verrons au chapitre **XI** comment on peut effectuer de tels tests). Dans l’exemple des cordes sur un cercle, si au lieu de confier le choix des coordonnées au hasard, on avait tiré les nombres selon la suite u_n (ou $2\pi u_n$ pour les nombres devant être pris entre 0 et 2π), tout se serait passé exactement de la même façon. Cette définition mathématique du hasard vient d’Émile Borel⁽³⁾

Plusieurs fois nous avons évoqué l’emploi d’une fonction **random** pour simuler le hasard, ce qui fait évidemment plus sérieux que d’évoquer la Fortune. Mais les fonctions **random** du commerce fonctionnent exactement sur le même principe que la suite u_n ; tout au plus elles font appel à des algorithmes plus sophistiqués afin de mieux brouiller les pistes⁽⁴⁾. On va voir en effet que la suite u_n ne brouille pas suffisamment bien les pistes.

Supposons que, au lieu d’avoir pris le nombre $e \simeq 2.718281828$, nous ayons pris le nombre 0.5. La suite des $v_n =$ partie décimale de $n \cdot 0.5$ ne respecte pas la règle de ne favoriser aucune région, puisqu’elle ne donne que 0 ou 0.5, et défavorise donc les nombres situés dans $[0.1, 0.4]$ ou dans $[0.6, 0.9]$. Dans ce cas on ne peut plus parler de hasard. La différence entre les deux situations ne provient pas du déterminisme, qui serait absent dans un cas et présent dans l’autre (et si même il y avait indéterminisme, on ne serait pas plus avancé, puisqu’on aurait juste remplacé le mot hasard par le mot indéterminisme). Il y a déterminisme dans les deux cas, mais dans le premier la règle de l’uniformité est respectée, tandis que dans le second elle ne l’est pas. Toutefois, si le statisticien auquel on a confié la suite u_n pour expertise, considère la suite $w_n = u_{n+1} - u_n$, il constatera que les

⁽³⁾ Émile Borel *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, vol. **27** (1909, pp. 247 – 270).

⁽⁴⁾ On peut cependant considérer que plus l’algorithme est tortueux et cryptique, plus le hasard qui en résulte est de bonne qualité. Ce point de vue est à la base de la théorie des suites aléatoires. Voir par exemple le livre de Donald Knuth *The Art of Computer Programming* Vol. 2 : Seminumerical Algorithms (Addison-Wesley, 1969) ou celui de Jean-Paul Delahaye *Information, complexité, et hasard* (Éd. Hermès, Paris, 1994).

nombres w_n ont le même défaut que les v_n , car ils sont tous égaux, soit à $e - 2 \simeq 0.718\,281\,828$, soit à $e - 3 \simeq -0.281\,718\,171$.

On ne peut donc pas vraiment admettre que la suite u_n soit au hasard car “il fallait avoir fait exprès” de choisir les u_n pour que leurs différences soient toujours les mêmes. On a donc en tête le préjugé que le hasard ne peut pas avoir choisi des nombres que l’application d’un algorithme aurait également pu engendrer (nous avons déjà le préjugé que le hasard ne favorise pas certains nombres au détriment d’autres; voilà donc un autre préjugé). On pourrait alors donner du hasard la définition suivante: un ensemble de N nombres réels pris dans l’intervalle $[0, 1]$ sont distribués au hasard si leur liste ne peut être engendrée par aucun algorithme. L’ennui, c’est que (du moins pour un nombre fini N de nombres) il y a toujours un algorithme, ne serait-ce que la donnée directe de ces N nombres. On peut corriger cette incohérence en précisant davantage: on dira que N nombres réels de l’intervalle $[0, 1]$ sont distribués au hasard si leur liste ne peut être engendrée par aucun algorithme *plus court que la simple liste de ces N nombres*. Pour bien comprendre cela, imaginons qu’on veuille écrire un programme qui écrit les N nombres dans un fichier de données. Pour $N = 10^9$ et huit octets par nombre (il s’agit de flottants), ce fichier est très gros: 8 gigaoctets. Mais le programme qui engendre la suite u_n est très court, car l’algorithme est très simple:

```
var i : integer ;
    N : longinteger ;

begin
  N := 1e+9 ;
  for i := 1 to N do
    begin
      writeln(i * exp(1) - trunc(i * exp(1))) ;
    end
  end.
```

Ce programme, même en code exécutable, va occuper au plus 1000 octets de mémoire. Ce qui permet cette énorme économie par rapport à la *liste* des nombres, est la boucle qui n’est écrite qu’une fois, bien que dans l’*exécution* du programme elle soit répétée 10^9 fois. Si les 10^9 nombres n’étaient liés entre eux par aucune récurrence, on ne pourrait pas utiliser de boucle; le programme devrait comporter autant d’entrées ou d’initialisations que de nombres, et serait donc aussi long que la liste des nombres.

Autrement dit la suite u_n peut être écrite par un programme court car il suffit de connaître $u_1 = e$ pour déduire par récurrence tous les autres. Si les 10^9 nombres n’étaient liés entre eux par aucune relation, il ne suffirait

Le hasard

pas d'en connaître un ou même quelques uns pour en déduire les autres, de sorte qu'on ne pourrait pas trouver de programme *plus court* que la liste directe.

Ce qui a permis à notre statisticien de découvrir la tricherie, est la possibilité de faire apparaître le déterminisme de la suite par les soustractions. Mais si *le plus court* algorithme qui engendre la suite est horriblement long, celui-ci échappera forcément aux investigations et aux tests. On peut donc mesurer le degré de hasard ou – inversement – le degré de déterminisme d'une suite de nombres à la longueur en *Ko* du plus court programme qui engendre la suite. Ainsi un degré élevé de hasard signifie uniquement que la suite est engendrée par un algorithme suffisamment tortueux pour pouvoir échapper à la surveillance des inspecteurs. Cette idée découle naturellement de celle de Borel mentionnée plus haut, mais elle n'a été érigée en système que plus tard, et est le résultat d'une lente maturation qui s'étale de 1900 à 1960 environ. Le lecteur intéressé pourra lire le livre de Knuth ou celui de Delahaye (déjà cités en note 4) pour en savoir plus.

La conclusion ultime de toute cette lente maturation d'idées sur ce que seraient "vraiment" des nombres pris au hasard dans un intervalle, est qu'il n'y a pas de "vrai" hasard, il n'y a que des algorithmes déterministes, mais suffisamment cryptés et tortueux pour que *en pratique* aucun expert ne puisse découvrir le déterminisme sous-jacent. C'est ainsi, en tous cas, que fonctionnent les fonctions **random** des logiciels de calcul.

Dans le domaine des choix de nombres, c'est-à-dire du hasard *mathématique*, il n'y a pas d'autre forme de hasard que le cryptage du déterminisme. La boutade de Laplace est donc parfaitement juste.

I. 5. Hasard et déterminisme dans la Nature.

Se pourrait-il alors que dans la Nature, au moins, on rencontre du véritable hasard, c'est-à-dire des processus pour lesquels, même si on pouvait les reproduire avec un algorithme déterministe, du moins la Nature n'y aurait pas recouru. Là, le problème est plus délicat, car nous n'avons de la Nature qu'une connaissance approchée, ce qui a pour première conséquence que si deux modèles mathématiques différents donnent des prévisions qui ne diffèrent numériquement que d'une petite quantité, il est impossible de dire que l'un est plus vrai que l'autre, au cas où ces prévisions seraient toutes deux conformes à l'observation. Il est donc absurde de conférer une validité absolue à une description de la Mécanique en termes d'équations différentielles. Par exemple, on peut dire que la bille de la roulette obéit à la Mécanique classique et que son mouvement est décrit par des équations

différentielles, mais cette description n'est qu'un modèle mathématique approché. Le mouvement de la bille est un exemple de chaos déterministe, mais lorsqu'on dit cela il faut avoir en vue que le déterminisme n'existe que dans le modèle mathématique; dans le mouvement réel de la bille, rien ne prouve qu'il ne pourrait être décrit tout aussi bien par un autre modèle mathématique, prédisant le même mouvement pour la bille *dans les limites de précision expérimentales*, mais indéterministe; le déterminisme approximatif du mouvement observé étant alors expliqué comme un effet de la loi des grands nombres et non d'un déterminisme absolu. Or si on parle de modèle indéterministe, on entend par là que le modèle postule un hasard *ontologique*, c'est-à-dire un hasard premier, supposé exister sans explication plus profonde, comme celui qui est invoqué par la Mécanique quantique, par exemple. Mais il suffirait d'ajouter à ce modèle mathématique une annexe "expliquant" le hasard invoqué comme l'application d'un algorithme du type indiqué ci-dessus, pour le transformer en modèle déterministe. De sorte que la question du déterminisme ou de l'indéterminisme *de la Nature* est tout simplement dépourvue de sens logique. Pour que cette question puisse acquérir un sens logique, il faudrait avoir de la Nature une connaissance mathématique rigoureusement exacte et non approchée. L'existence d'innombrables exégèses philosophiques sur le sujet ne suffit pas à transmuter cette question absurde en question sensée (et d'autant moins que la plupart de ces exégèses philosophiques, surtout depuis Emmanuel Kant, s'efforcent précisément de montrer l'absurdité de cette question). On pourra lire à ce sujet Richard P. Feynman *Lectures on Physics*, Tome **3, II. 6.**)

Poincaré aurait dit qu'entre les deux modèles il faut choisir le plus simple. Cela ne signifie pas que le plus simple est le plus vrai, mais ne signifie pas non plus que rien n'existe réellement et que tout serait convention. Et cela signifie encore moins que si par hasard le plus simple des deux se trouve être déterministe, on soit fondé à en déduire que la science (en faisant ce choix) aurait prouvé que la Nature est déterministe, ou inversement. Indépendamment de Poincaré, un certain bon sens nous ferait juger très artificiel, ou même farfelu, d'ajouter à un modèle indéterministe une annexe qui ne le rendrait pas plus juste dans ses prédictions, et dont la seule fonction serait de le rendre déterministe. Ce bon sens est simplement le sentiment de la naïveté d'une telle entreprise, et ce sentiment de naïveté provient d'une expérience millénaire, qui nous a toujours montré que lorsqu'on découvre une explication plus profonde à un phénomène, celle-ci est bien plus surprenante et plus retorse que ce qu'on aurait pu imaginer.

Pour comprendre de façon plus précise les conséquences du caractère *approché*, et non mathématique, de la connaissance, nous allons analyser un modèle simplifié de roulette: nous supposons que la bille se déplace

Le hasard

à l'intérieur d'un cercle, mais sur un plan (et non une cuvette); qu'elle rebondit sur le bord du cercle comme une boule de billard; et pour simuler le frottement nous supposons simplement que la vitesse de la bille diminue exponentiellement avec le temps. La description de la vraie roulette serait plus difficile et plus compliquée, mais ne comporterait rien d'essentiellement différent.

Cette roulette simplifiée (ou plutôt, ce *modèle* de roulette simplifiée) est un cas de chaos déterministe intermédiaire entre l'exemple extrêmement simple de la suite $u_n =$ partie décimale de $n \cdot e$ et la vraie roulette. En outre, une bille dans un billard circulaire est un exemple qui, contrairement à la suite u_n , n'est pas uniquement mathématique, car on peut à la fois imaginer une bille matérielle sur un tapis vert, rebondissant sur une bordure circulaire, et le modèle mathématique correspondant. Ce modèle est donc exactement ce qu'il nous faut pour comprendre le hasard dans la Nature. Fondamentalement ce modèle permet non seulement de deviner par analogie ce qui se produit pour la roulette, mais également pour de nombreux phénomènes analogues dans leur principe, tels que par exemple l'agitation thermique, le mouvement brownien, la dissémination de poussières dans l'atmosphère, etc.

La bille est lancée à l'instant 0, avec une vitesse initiale v . La trajectoire qu'elle va décrire est formée de cordes successives, l'extrémité de chacune étant l'origine de la suivante (voir la figure 4). La réflexion sur le bord obéit bien sûr à la loi de la réflexion, à savoir que la bissectrice de l'angle formé par deux cordes consécutives passe par le centre du cercle. Cet angle reste le même pour toutes les cordes; appelons le θ . Si la bordure du billard n'était pas un cercle, cet angle changerait à chaque rebondissement; le problème en serait rendu plus compliqué, mais sans aucun bénéfice pour la discussion.

Si l'angle θ est commensurable avec π , c'est-à-dire s'il existe un nombre *rationnel* $\alpha = p/q$ (quotient de deux entiers p et q) tel que $\theta = \alpha\pi$, alors la trajectoire de la bille, formée d'une suite de cordes contiguës, est un polygone régulier: les cordes se superposent périodiquement, et la bille repasse périodiquement sur ses traces. Ce cas particulier est l'analogue de la suite $v_n =$ partie décimale de $n \cdot 0.5$, ou plus généralement $v_n =$ partie décimale de $n \cdot \alpha$ (avec α fractionnaire). Par contre si θ est incommensurable avec π , par exemple si $\pi/\theta = e$, alors la bille ne repasse jamais deux fois sur la même corde. Si la bille roule très longtemps (si donc le frottement est faible) elle parcourt un très grand nombre de cordes, toutes distinctes, et ces cordes remplissent complètement une couronne (voir figure 4). Remplir complètement signifie que n'importe quelle petite région de la couronne, aussi petite soit-elle, finira tôt ou tard par recevoir la visite de la bille.

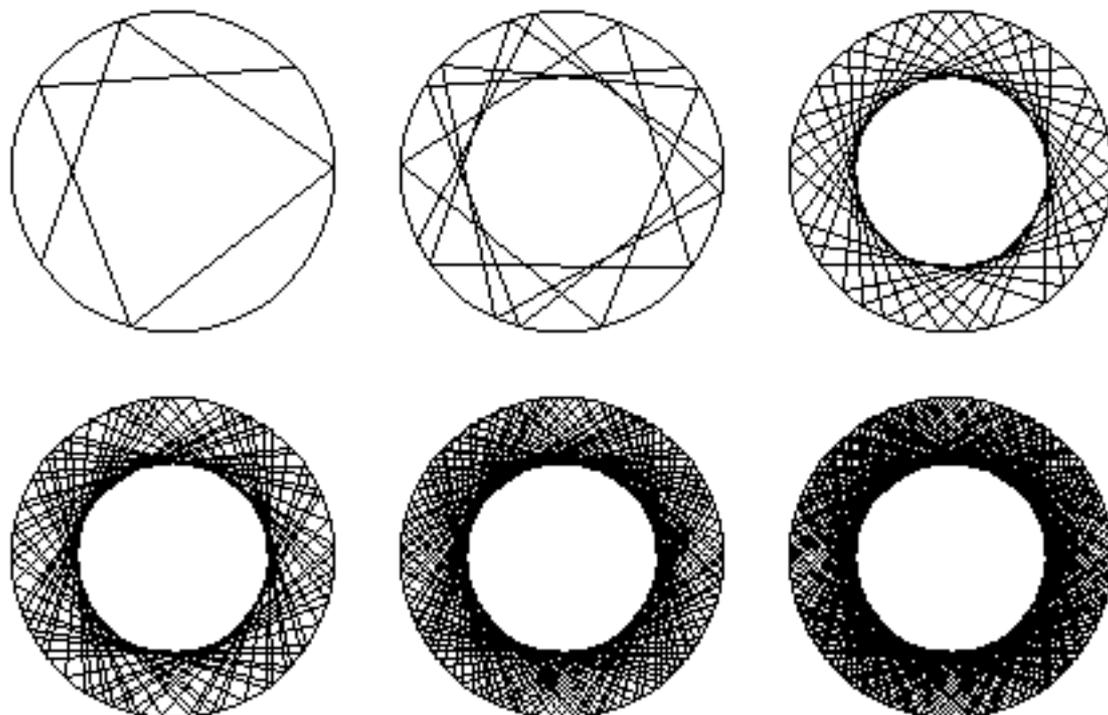


figure 4

Évolution de la trajectoire d'une bille dans un cercle.

Supposons maintenant que le disque soit subdivisé en beaucoup de petites régions. On lance la bille avec une vitesse initiale v_0 , un angle $\theta = \pi/e$, et le coefficient de frottement est k , de sorte que la vitesse de la bille décroît en fonction du temps t selon la loi $v(t) = e^{-kt}$. Les petites régions situées en dehors de la couronne ne seront de toute façon jamais atteintes par la bille. Par contre la bille finira par s'arrêter (plus exactement, elle se rapprochera indéfiniment d'une position limite), forcément dans une région située à une distance du centre supérieure à $R \sin(\pi/2e)$. Le modèle est entièrement déterministe, puisque si on connaît v_0 , θ , k , et la position initiale M_0 de la bille, alors le point où la bille s'arrêtera est parfaitement déterminé, et la petite région dans laquelle ce point se trouve peut donc être prédite. Voyons comment.

La trajectoire est de toute façon déterminée par la seule donnée de M_0 et θ . Le paramètre de frottement k ne détermine que la distance parcourue sur cette trajectoire. On supposera M_0 situé sur le bord (c'est-à-dire qu'on lance la bille à partir du bord), et en outre l'invariance par rotation permet de ne faire le calcul que pour un point M_0 particulier : si on change M_0 en M'_0 par une rotation, le point d'arrivée sera changé selon la même rotation. La dépendance par rapport à M_0 ne montre donc rien d'intéressant. Mais

Le hasard

supposons qu'on change un tout petit peu θ en $\theta' = \theta + \varepsilon$. La première corde parcourue par la bille sera légèrement tournée, d'un angle égal à ε ; la seconde sera tournée du double, la troisième du triple, etc. Si on appelle M_1, M_2, \dots les points de la circonférence touchés successivement – après M_0 – par la bille, la distance angulaire de deux consécutifs de ces points est $\pi - \theta$, qui se trouve donc modifié en $\pi - \theta'$. Étant donné que M_0 est fixé, cela se traduit par un déplacement angulaire de $-\varepsilon$ pour M_1 , de -2ε pour M_2 , de -3ε pour M_3 , etc. Au bout d'un nombre N de réflexions, le point M_N sera déplacé, par rapport à la trajectoire de référence, de $-N\varepsilon$; si N est assez grand pour compenser la petitesse de ε , la bille pourra se trouver dans une région éloignée de celle qu'elle aurait atteinte après le même nombre de réflexions sur la trajectoire de référence.

Voyons maintenant comment le mouvement dépend de k (paramètre de frottement). La trajectoire, qu'elle soit de référence ou modifiée, ne change pas lorsqu'on change la valeur de k ; seule change la *distance parcourue* sur cette trajectoire. Les réflexions successives ne changent rien à la vitesse, seule la direction du mouvement est affectée. On peut donc, bien que la trajectoire soit une ligne brisée, traiter le mouvement *sur cette trajectoire* comme s'il s'agissait d'un mouvement sur un axe. Soit donc $x(t)$ la distance parcourue *sur cette trajectoire* par la bille à l'instant t , depuis l'instant 0 où elle était en M_0 . La dérivée de $x(t)$ est sa vitesse à l'instant t , dont nous avons supposé qu'elle était égale à $v_0 e^{-kt}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}x'(t) &= v_0 e^{-kt} \quad ; \\x(0) &= 0 \quad .\end{aligned}$$

Par un calcul de primitive immédiat, on obtient :

$$x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

On voit que lorsque t tend vers l'infini, $x(t)$ tend vers v_0/k . En pratique $x(t)$ sera pratiquement égal à v_0/k déjà pour $t \sim 10/k$, et n'en bougera pratiquement plus ensuite, ce qui signifie que la bille s'arrêtera au bout d'un temps de l'ordre de $10/k$, après avoir parcouru une distance égale à v_0/k .

La question est maintenant de savoir en quel lieu du disque la bille aboutira. Pour des valeurs données des paramètres k et θ , la longueur d'une seule corde est $2R \cos(\theta/2)$ et la distance parcourue v_0/k , donc le nombre de cordes parcourues (ou, ce qui revient au même, le nombre de rebroussements) est $N =$ partie entière de $v_0/2kR \cos(\theta/2)$, et la position de la bille sur la $N + 1$ -ième corde sera donnée par la partie décimale de $v_0/2kR \cos(\theta/2)$: si cette partie décimale est par exemple 0.75, cela signifiera

que la $N + 1$ -ième corde aura été parcourue aux trois quarts. Or nous avons vu que si θ est modifié d'une très petite quantité ε , et que N est de l'ordre de $1/\varepsilon$, la $N + 1$ -ième corde ne sera pas modifiée un tout petit peu, mais beaucoup. Si k n'a pas été modifié en même temps que θ , la bille, bien qu'ayant parcouru la *même* distance sur la trajectoire, s'arrêtera néanmoins en un point complètement différent du disque. Il suffit pour cela que $N \sim 1/\varepsilon$, soit $v_0/2kR \cos(\theta/2) \sim 1/\varepsilon$ ou, ce qui revient au même:

$$k \sim \frac{v_0 \varepsilon}{2 R \cos(\frac{1}{2}\theta)} \quad (I.3.)$$

D'autre part, si on modifie k mais pas θ , mettons qu'on augmente ou diminue k d'une proportion η , qu'on le remplace donc par $k' = k(1 + \eta)$, alors la trajectoire reste inchangée, mais la distance parcourue sur cette trajectoire passera de v_0/k à v_0/k' , c'est-à-dire qu'elle sera divisée par $1 + \eta$, ou multipliée par $1 - \eta$ puisque pour η petit $1/(1 + \eta) \simeq 1 - \eta$. La différence entre les deux est donc à peu près égale à $\eta v_0/k$, ce qui n'est pas petit si k est du même ordre de grandeur que ηv_0 . Cela peut même dépasser la longueur d'une corde si

$$k < \frac{v_0 \eta}{2 R \cos(\frac{1}{2}\theta)} \quad (I.4.)$$

On voit alors ce qui se passe: tant que le problème reste purement mathématique, la position finale est toujours exactement prédictible à partir de la donnée des paramètres θ et k . Mais d'après (I.3) et (I.4.) l'incertitude sur la position finale est beaucoup plus grande que l'incertitude sur les valeurs de ces paramètres, et cela d'autant plus que k est plus petit. Autrement dit: plus le frottement est faible, plus cette disproportion entre les incertitudes est grande. Pour en donner une idée numérique: supposons que le temps soit mesuré en secondes et les distances en décimètres, que le rayon du disque soit $R = 1$ décimètre, et $v_0 = 1$ décimètre par seconde. Prenons $k = 10^{-3}$, θ tel que $\cos(\theta/2) = 0.75$, ce qui fait $\theta \simeq 1.445\,468\,496$ et $\pi/\theta \simeq 2.173\,407\,904$. La longueur d'une corde sera alors 1.5, la distance parcourue par la bille 10^3 , c'est-à-dire 100 mètres, le nombre de cordes parcourues sera $N = 666$, et la bille s'arrêtera aux deux tiers de la 667^e corde. On peut se donner un repère orthonormé pour les coordonnées des points, tel que M_0 ait pour coordonnées $(1, 0)$. Puisqu'on passe de chaque corde à la suivante par une rotation d'angle $\pi - \theta$, on aura la 667^e corde par une rotation d'angle $666 \cdot (\pi - \theta) \simeq 1\,129.618\,689\,203$, ce qui est égal à $4.928\,519\,218$ modulo 2π . Le point situé aux deux tiers de cette corde est alors le point de coordonnées $x = +0.699\,662\,113$ et $y = -0.102\,337\,320$. Si on prend $\varepsilon = 10^{-3}$, et $\eta = 0$, le nouvel angle $\theta'/2$ a pour cosinus non plus 0.75, mais 0.749 669 187, la longueur des cordes n'est plus 1.5, mais 1.499 338 375, le

Le hasard

nombre de cordes parcourues est toujours 666, mais la proportion parcourue de la 667^e est 0.960 852 116. Si on refait les mêmes calculs de rotations, on trouve que cette fois le point atteint par la bille est le point de coordonnées $x = +0.893\,362\,414$ et $y = -0.342\,554\,750$. Les deux points sont à l'intérieur du disque, mais leur distance mutuelle est 0.308 584 218, à peu près le tiers du rayon. Le calcul confirme donc ce qui était qualitativement prévu, à savoir qu'un changement de un millièmme de l'angle θ entraîne un changement macroscopique du point atteint par la bille. On observerait la même chose si au lieu de faire varier θ , on avait fait varier k , en prenant $\varepsilon = 0$ et $\eta = 10^{-3}$, ou en faisant varier les deux à la fois. Cela veut dire que si on avait voulu prédire le point où la bille viendra s'immobiliser au millièmme près, il aurait fallu connaître θ et k avec une précision non du millièmme, mais du millièmme. C'est ce que montrent les relations (I.3.) et (I.4.). Le point où la bille s'arrêtera peut donc être prédit, mais la précision de cette prédiction exige une précision encore bien plus grande sur les valeurs des paramètres initiaux θ et k , d'autant plus grande d'ailleurs que k est plus petit, conformément à (I.3.). Il s'agit là d'une propriété caractéristique du chaos déterministe, qui est l'*amplification* des perturbations, ou la *très haute sensibilité aux conditions initiales*.

D'autre part, il se produit – mais en deux dimensions cette fois – le même phénomène que pour la suite u_n , à savoir que si le frottement était absolument nul, la bille ne s'arrêterait jamais, mais parcourrait la couronne éternellement, et si on délimitait de petites régions dans la couronne, alors

a) chacune de ces petites régions serait traversée épisodiquement par la bille (d'autant plus souvent que la durée de l'observation serait longue);

b) le temps total (formé donc de nombreuses traversées brèves) que la bille passerait à l'intérieur de chacune de ces petites régions, dépendrait de l'aire de cette petite région.

Pour un être microscopique vivant dans l'une de ces petites régions, et voyant de temps en temps passer la bille, les passages de cette bille sembleraient survenir à des moments aléatoires (cela provient de ce que π/θ est irrationnel). L'être microscopique, ne pouvant pas imaginer la cause déterministe des passages de la bille, penserait avoir affaire à un hasard ontologique. En cas de frottement, il s'apercevrait cependant que la vitesse de la bille est plus lente à chaque passage, et il pourrait même avoir le privilège fantastique de voir un jour la bille venir s'arrêter dans son jardin.

À une toute autre échelle, et avec une perspective complètement différente, le physicien humain qui lance cette bille serait un dieu pour l'être microscopique, mais, sa connaissance des choses étant approchée et non mathématiquement exacte, il ne pourrait lui-même prévoir le point où

la bille s'arrêtera, faute de pouvoir mesurer avec une précision suffisante les conditions initiales du mouvement. Ainsi, le postulat selon lequel le mouvement est déterministe a un sens dans le modèle mathématique, mais n'en a absolument aucun dans la réalité.

Une question intéressante est maintenant de savoir comment sont répartis ces temps de séjour dans chaque petite région. Avec la suite u_n , nous avons dit que (pour n grand) le nombre de termes qui "tombent" dans un intervalle $[a, b]$ de $[0, 1]$ est proportionnel à la longueur $b - a$. Pour la bille, nous allons voir que la durée totale de séjour dans chacune des petites régions n'est pas proportionnelle à son aire : les régions situées près du bord intérieur de la couronne seraient – à aire égale – fortement favorisées par rapport aux régions situées près du bord extérieur. On peut comprendre cela facilement : ce qui est réparti uniformément n'est pas la densité des passages de la bille, mais les angles d'inclinaison des cordes : en effet, ces angles sont, comme nous l'avons vu, en progression arithmétique, et la suite des angles, comptés modulo 2π , est donc du même type que la suite u_n . Si on se fixe deux cordes proches l'une de l'autre, leurs angles d'inclinaison sont proches également, ils diffèrent, disons, d'un petit angle δ (figure 5). Cela veut dire que ces deux cordes ont entre elles un angle δ ; elles se coupent tout près du bord intérieur de la couronne, mais s'écartent l'une de l'autre en s'éloignant de l'intersection. Parmi toutes les cordes de la trajectoire, certaines se situeront entre les deux cordes que nous nous sommes fixées ; leur nombre sera proportionnel à l'angle δ , tout comme le nombre d'éléments de la suite u_n situés à l'intérieur d'un petit intervalle de longueur δ est proportionnel à δ . Le nombre de ces cordes sera à peu près égal à $\delta/2\pi$ fois le nombre de toutes les cordes parcourues. Or les cordes sont plus denses, ou plus serrées, près du bord intérieur de la couronne : leur distance est nulle tout près du bord intérieur et croît ensuite linéairement, ce qui entraîne que leur densité est très grande près du bord intérieur (à la limite infinie), mais diminue en se rapprochant du bord extérieur. Cela se voit immédiatement rien qu'en regardant la figure 4.

Pour calculer, introduisons la coordonnée radiale $t = \sqrt{x^2 + y^2}/R$ (la distance au centre du disque rapportée au rayon). La couronne correspond aux valeurs de t comprises entre $r = \sin(\frac{1}{2}\theta)$ et 1 (rR est ainsi le rayon intérieur de la couronne).

Les aires infinitésimales σ délimitées par deux couples de cordes très proches, formant entre elles de petits angles δ (voir figure 5) sont égales à

$$\sigma = \frac{1}{2} t^2 \delta^2 \sqrt{\frac{t^2}{r^2} - 1}$$

Le hasard

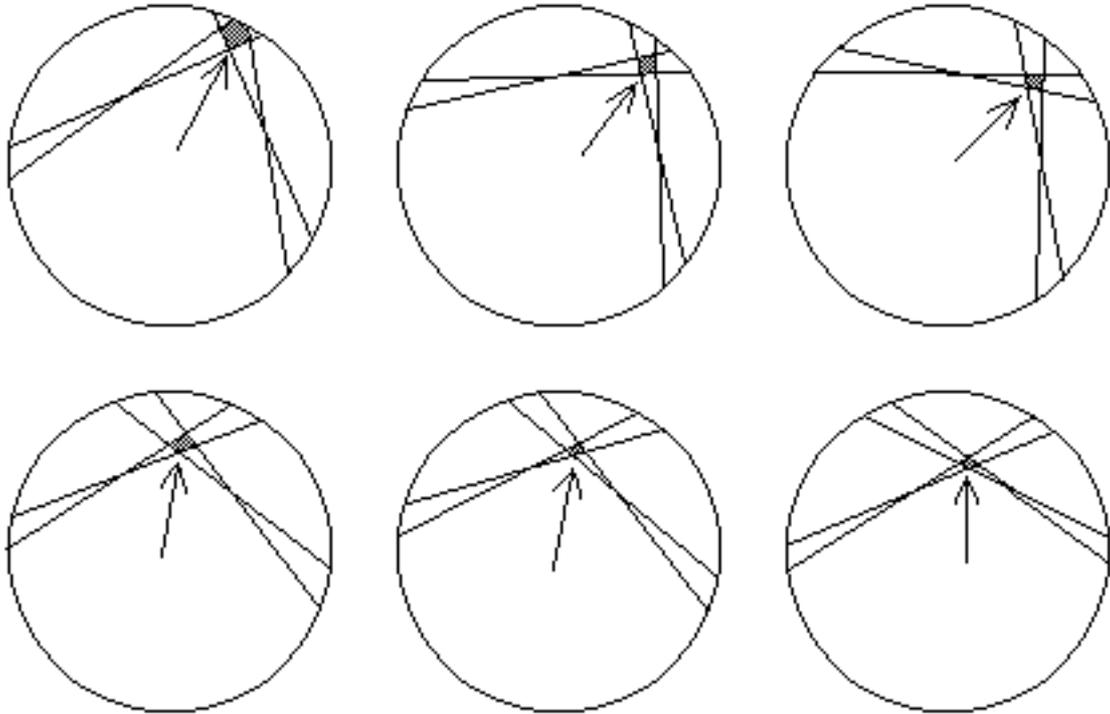


figure 5

Petits losanges délimités par des faisceaux de cordes.

Mais puisque, entre deux cordes fixées, ayant entre elles un angle δ , le nombre de passages de la bille est proportionnel à δ (plus précisément égal à $N\delta/2\pi$, N étant le nombre total de cordes parcourues), et le petit intervalle que la bille parcourt à chaque passage à l'intérieur du losange étant de longueur $t^2\delta/2r$, on en déduit que la distance totale (somme de tous ces petits intervalles) parcourue par la bille dans le petit losange d'aire σ est

$$\tau = \frac{N}{2\pi r} t^2 \delta^2$$

Si on exprime τ en fonction de σ on trouve

$$\tau = \frac{N}{\pi \sqrt{t^2 - r^2}} \sigma$$

Conformément à ce que nous avons pressenti auparavant par des estimations qualitatives, τ n'est pas simplement proportionnel à σ ; on voit apparaître la densité $1/\sqrt{t^2 - r^2}$, qui exprime quantitativement le favoritisme dont bénéficient, à aire égale, les petits losanges situés près du bord intérieur de la couronne. Cette loi valable pour les petits losanges s'étend ensuite à des petites régions de forme quelconque, puisqu'on peut toujours quadriller

une région selon de tels petits losanges, comme on quadrille en petits carrés dans la théorie usuelle de l'intégration.

Si au lieu de compter le *chemin* parcouru à l'intérieur de chaque petit losange on avait voulu compter simplement le *nombre de passages*, sans considération du chemin parcouru, on aurait aussi obtenu une loi statistique, dont on aurait déduit une probabilité empirique ; dans ce cas, ce seraient les dimensions linéaires, et non plus l'aire, qui interviendraient : par exemple, si la petite région est un petit disque de diamètre ρ , le nombre de passages de la bille à travers ce petit disque serait à peu près égal à

$$\nu = \frac{N}{\pi \sqrt{t^2 - r^2}} \rho$$

Bien entendu la densité $1/\sqrt{t^2 - r^2}$ est toujours là.

Ainsi les êtres microscopiques qui habitent dans la couronne observeraient des lois statistiques, vérifiées par les passages de la bille : pour toutes les régions situées à *une distance donnée* du centre du disque, le total du temps passé par la boule à l'intérieur d'une région du disque est – sur un grand nombre de passages – proportionnel à l'aire de cette région ; ou encore : le nombre total de passages à travers une petite région est proportionnel à son diamètre. Mais lorsqu'on considère des régions situées à des distances différentes du centre, le coefficient de proportionnalité varie selon $1/\sqrt{t^2 - r^2}$.

En observant vraiment bien, les êtres microscopiques apercevraient des régularités dans les passages, car si la suite des passages semble aléatoire à première vue, elle a les mêmes défauts que la suite u_n . Ceci provient de ce que le modèle est trop simple, on peut tout calculer explicitement à l'aide de formules ou d'algorithmes simples, que des inspecteurs peuvent décrypter. Mais on peut rendre le modèle plus compliqué : par exemple, au lieu d'une bordure circulaire, on pourrait prendre une bordure non circulaire, pas même elliptique (car l'ellipse possède encore trop de régularités). Point n'est besoin de modifier beaucoup la bordure : celle-ci peut ne jamais s'écarter du cercle de plus de un centième de millimètre : nous avons vu qu'en ne changeant l'angle θ que d'un millième, on perturbait macroscopiquement la forme prise par la trajectoire après plusieurs centaines de rebroussements ; il en irait de même en modifiant la bordure de quelques millièmes ; en effet, modifier cette bordure revient à modifier *tous* les angles de réflexion, chacun d'une quantité petite, mais différente, et non pas seulement le premier. En agissant ainsi, on produirait le même type de perturbation amplifiée : le début de la trajectoire serait peu modifié, mais *après un certain temps*, inversement proportionnel à l'amplitude des modifications,

Le hasard

elle serait complètement différente. Le simple fait d'avoir une bordure qui, bien que presque circulaire, n'est plus rigoureusement un cercle, rend déjà le calcul exact de la trajectoire si compliqué que les inspecteurs n'y verraient que du feu. Pour déjouer encore davantage leur vigilance, on pourrait donner au fond du disque (le tapis vert) une forme courbe de cuvette au lieu d'un plan. Le mouvement serait toujours rigoureusement déterministe. Les propriétés de chaos que nous avons mises en évidence dans le modèle simple subsisteraient (à savoir l'*amplification*, le fait qu'une très faible modification des conditions initiales entraînerait une modification macroscopique du mouvement après un nombre de tours inversement proportionnel à cette modification). Mais l'algorithme pour les calculer serait alors tellement complexe que ce mouvement *ne pourrait pas être calculé*. Les êtres microscopiques ne pourraient plus observer des régularités dans les passages individuels de la bille : si leurs observations étaient exactes (c'est-à-dire sans erreur de mesure), ce serait la complexité du processus qui les empêcherait de voir les régularités. Et pour être bien certain que les habitants de la couronne, qu'il ne faudrait tout de même pas sous-estimer, ne pourront jamais percer le mystère des passages de la bille, nous supposons que la zone située près du bord leur est inaccessible (que les lois physiques de leur monde sont telles qu'il leur faudrait une énergie infinie pour atteindre ce bord) et qu'ils ne peuvent donc pas connaître exactement sa forme. Si en outre leurs observations sont approchées et entachées d'erreurs de mesure, le déterminisme du mouvement leur sera encore plus caché. Les seules propriétés suffisamment simples qu'ils pourront observer seront les deux propriétés suivantes :

a) la durée totale de séjour dans une petite région d'aire σ située à une distance t du centre du disque est proportionnelle à σ et inversement proportionnelle à $\sqrt{t^2 - r^2}$.

b) la variation en $1/\sqrt{t^2 - r^2}$ s'explique *simplement* par une propriété géométrique. C'est-à-dire que les êtres microscopiques peuvent aisément comprendre que les trajectoires sont des segments de droites qui s'écartent linéairement et sont donc moins denses vers le bord.

Ainsi le phénomène se décompose en deux parties : 1. une distribution mystérieuse des segments de trajectoire, et 2. un effet dû uniquement aux propriétés géométriques communes à tous les segments (théorème de Thalès, etc.). La partie 2 du phénomène est compréhensible et "explique" la densité $1/\sqrt{t^2 - r^2}$. Par contre, la partie du phénomène que les êtres microscopiques *ne peuvent pas comprendre* est la distribution des segments. Il leur est aisé de voir que les segments se coupent près du bord intérieur (comme on voit sur la figure 5) et utiliser le théorème de Thalès pour retrouver par le calcul la densité $1/\sqrt{t^2 - r^2}$, mais ils ne peuvent pas prévoir la position des segments successifs. Ils peuvent alors découvrir après quelques

tâtonnements mathématiques que, si au lieu de mesurer le temps de séjour dans chaque petite région, on avait mesuré par exemple l'orientation des segments (l'angle d'inclinaison par rapport à la direction radiale), alors il n'y aurait plus de densité variable : les différentes orientations se distribueraient de façon uniforme. Étant alors donné que la distribution des segments est incompréhensible, il n'est plus possible de progresser au-delà de cette loi uniforme : de même que dans un calcul algébrique (par exemple factoriser un polynôme ou réduire une fraction du type $(\sqrt{2} + \sqrt{3})/(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ à sa forme la plus simple), il arrive forcément un moment où "on ne peut plus réduire davantage", de même lorsqu'un phénomène est décomposé en une partie incompréhensible et une partie compréhensible, il arrive forcément un moment où "on ne peut plus réduire davantage" la partie incompréhensible. On a alors atteint un stade de *compréhension maximum* du phénomène. À un tel stade, la partie incompréhensible est réduite à une distribution aléatoire uniforme, car tant qu'il subsiste une non-uniformité, celle-ci peut faire l'objet de recherches pour en comprendre l'origine, comme ce fut le cas pour la densité $1/\sqrt{t^2 - r^2}$. En revanche, une fois la partie incompréhensible réduite "à sa plus simple expression", le seul progrès encore possible consisterait à lever l'obstacle du brouillage par le chaos (par exemple disposer d'ordinateurs tellement puissants et d'instruments de mesure tellement précis que le chaos déterministe puisse être lui aussi maîtrisé).

Une fois qu'on a regroupé tout ce qui est compréhensible et réduit l'incompréhensible à sa plus simple expression, uniforme par nature, ce dernier reçoit alors un nom : le hasard.

II. DÉNOMBREMENT.

Comme il a été dit au chapitre I, le calcul des probabilités consiste d'abord à modéliser une situation sous la forme d'un ensemble fini, l'*espace des épreuves*, puis à calculer les probabilités des événements. Or dans un modèle, calculer la probabilité d'un événement A revient, en vertu de (I.2.) à calculer le nombre d'éléments (épreuves) que contient l'ensemble A . Compter exhaustivement n'est que très rarement une méthode efficace, surtout lorsque les ensembles sont gros. Il faut donc commencer par apprendre les techniques élémentaires de *dénombrement*, qui permettent de déterminer sans fatigue le nombre d'éléments des ensembles les plus typiques. Dans ce chapitre, nous apprendrons à résoudre les problèmes suivants :

— avec un alphabet de r lettres, combien de mots différents de n lettres peut-on écrire ? (suites avec répétition)

— avec un alphabet de r lettres, combien peut-on écrire de mots différents formés de n lettres *toutes distinctes* ? (suites sans répétition ou arrangements)

— combien de sous-ensembles différents à n éléments y a-t-il dans un ensemble à r éléments ? (ensembles non ordonnés sans répétition ou combinaisons)

— on se donne k nombres entiers ≥ 0 , $n_1, n_2 \dots n_k$, dont la somme est n ; de combien de manières différentes peut-on ranger n éléments en k groupes de (respectivement) $n_1, n_2 \dots n_k$ éléments ? (partitions en groupes de taille donnée)

— n étant donné, de combien de manières différentes peut-on choisir les nombres $n_1, n_2 \dots n_k$ du problème précédent ? (subdivisions)

La connaissance de ces cinq cas élémentaires de dénombrement permet déjà de résoudre une quantité de problèmes de probabilités. En fait, la quasi totalité des problèmes usuels se ramène, après un travail mathématique adéquat (et plus ou moins long selon la difficulté intrinsèque du problème), à un ou plusieurs de ces cas de dénombrement.

Ce chapitre est formé de cinq sections, chacune correspondant à l'un de ces cinq cas. On présentera au fur et à mesure des exemples simples illustrant chaque formule.

II. 1. Suites avec répétition ou tirages avec remise.

Avec un alphabet de r lettres, combien de mots différents de n lettres peut-on écrire ?

Imaginons que notre alphabet soit formé des trois lettres A, B, C ($r = 3$). On peut former trois mots différents de une lettre ($n = 1$) : ces mots sont A, B , et C . Mais on peut former neuf mots de deux lettres ($n = 2$) :

$$\begin{array}{lll} AA, & AB, & AC, \\ BA, & BB, & BC, \\ CA, & CB, & CC. \end{array}$$

Il y a 27 mots de trois lettres :

$$\begin{array}{l} AAA, AAB, AAC, ABA, ABB, ABC, ACA, ACB, ACC, \\ BAA, BAB, BAC, BBA, BBB, BBC, BCA, BCB, BCC, \\ CAA, CAB, CAC, CBA, CBB, CBC, CCA, CCB, CCC. \end{array}$$

Nous n'irons pas plus loin. On voit sur ces tableaux comment engendrer systématiquement *tous* les mots possibles : si la première lettre est donnée, par exemple A , il y a pour la seconde les trois possibilités AA, AB , et AC . Si les deux premières sont données, par exemple AA , il y a trois possibilités pour la troisième : AAA, AAB , et AAC . Autrement dit, pour chaque mot possible de $n - 1$ lettres, il y a trois possibilités pour la n^{e} . Si l'alphabet est formé de r lettres, il y aura r possibilités chaque fois qu'on ajoute une lettre de plus. Ainsi : avec une seule lettre, il y a r possibilités ; pour *chacune* de ces r possibilités, il y a r possibilités pour la deuxième lettre, ce qui fait $r \times r = r^2$ possibilités. Pour *chacune* de ces r^2 possibilités, il y a à nouveau r possibilités pour la troisième lettre, ce qui fait $r^2 \times r = r^3$ possibilités, et ainsi de suite. Il y aura donc r^n mots de n lettres. On peut donc retenir que **le nombre de mots de n lettres qu'on peut écrire dans un alphabet de r lettres** est

$$r^n \tag{II.1.}$$

Beaucoup de problèmes qui peuvent paraître à première vue différents sont en fait équivalents à la formation de mots avec des lettres. Le problème que nous venons d'étudier est donc un *modèle* pour des problèmes différents.

Ainsi, imaginons que nous ayons n boules numérotées et r boîtes. Nous avons déjà rencontré ces histoires de boules et de boîtes au chapitre **I** : on voit cela dans la figure 1, où on a représenté toutes les manières différentes de disposer trois boules dans deux boîtes. En les dessinant toutes sur la figure 1, nous avons vu qu'il y avait huit manières différentes. En général, pour n boules et r boîtes, il y a r^n distributions différentes, de même qu'il

Dénombrement

Il y a r^n mots de n lettres avec un alphabet de r lettres. Les deux problèmes sont en réalité identiques.

On peut mettre cette identité en évidence en *codant* les distributions de boules dans des boîtes; supposons en effet que nous voulions représenter une distribution de boules par un code chiffré: on pourrait désigner chaque boîte par une lettre, et chaque boule par son numéro (elles sont supposées numérotées). Pour une distribution de boules donnée, on regarde dans quelle boîte se trouve la boule $N^{\circ}1$, disons que c'est la boîte G . Puis on regarde dans quelle boîte se trouve la boule $N^{\circ}2$, disons que c'est la boîte U , la boule $N^{\circ}3$ serait dans la boîte S , la boule $N^{\circ}4$ dans la boîte T , la boule $N^{\circ}5$ dans la boîte A , la boule $N^{\circ}6$ dans la boîte V , et la boule $N^{\circ}7$ serait dans la boîte E . On obtient ainsi un mot de sept lettres, $GUSTAVE$. Quiconque connaît la règle de codage peut reconstituer la distribution des boules dans les boîtes à partir du mot $GUSTAVE$: il prend la première lettre, G , et place donc la boule $N^{\circ}1$ dans la boîte G , et ainsi de suite. À chaque distribution possible de n boules dans r boîtes, correspond de façon biunivoque un mot de n lettres écrit avec les r lettres qui ont servi à désigner les boîtes. Il y a donc un *isomorphisme* entre les deux problèmes.

Un autre exemple est celui des tirages dans une urne. Une urne contient r boules de couleurs différentes, par exemple ($r = 5$) une boule blanche, une boule noire, une rouge, une verte, une jaune. On tire une boule, puis on la remet dans l'urne (après avoir noté sa couleur) on tire à nouveau, on remet, etc. Combien de résultats différents sont possibles en n tirages? réponse: r^n , puisque chaque résultat possible est la liste des n couleurs successives: si on a tiré, disons, la noire, puis la rouge, puis à nouveau la noire, puis la verte ($n = 4$), on aura la liste $NRNV$, de sorte que chaque tirage est codé par un mot de quatre lettres écrit dans l'alphabet B, N, R, V, J . C'est pourquoi ce type de problème est souvent – comme dans le titre du paragraphe – désigné par l'expression “tirages avec remise” ou en anglais “samples with replacement”.

II. 2. Suites sans répétition ou tirages sans remise.

Avec un alphabet de r lettres, combien de mots différents de n lettres *toutes distinctes* peut-on écrire? Il s'agit du même problème qu'au paragraphe précédent, excepté que les mots ne doivent pas contenir deux fois la même lettre.

Avec l'alphabet des trois lettres A, B, C , on peut écrire trois mots différents formés d'une seule lettre: A, B , et C . Mais on ne peut plus écrire neuf mots de deux lettres, car dans les mots AA, BB , et CC une même

lettre est répétée. Il n'y a donc que six possibilités :

$$\begin{array}{cc} AB, & AC, \\ BA, & BC, \\ CA, & CB, \end{array}$$

Il n'y a plus que six mots de trois lettres :

$$\begin{array}{ccc} & ABC, & ACB, \\ BAC, & & BCA, \\ CAB, & CBA, & \end{array}$$

Les deux tableaux sont identiques à ceux du paragraphe précédent, sauf qu'on y a effacé les mots contenant deux fois une même lettre. En effaçant simplement sur les tableaux déjà constitués du paragraphe précédent ce qui ne doit plus y figurer, on ne fait pas apparaître un procédé systématique, mais il n'est pas difficile d'en faire apparaître un. En effet, si la première lettre est donnée, par exemple A , il y a pour la seconde non plus trois, mais deux possibilités, car A ayant été choisie pour la première place, elle est maintenant exclue du choix suivant, qui se fera entre B et C ; de même si B avait été pris en premier, le choix pour la deuxième place se ferait entre A et C . Pour *chacun* des trois choix possibles de la première lettre, il y a donc deux choix possibles pour la deuxième lettre, soit entre B et C , soit entre A et C , soit entre A et B , ce qui fait $3 \times 2 = 6$ choix en tout. Si les deux premières lettres sont données, il n'y a plus qu'un choix possible pour la troisième, qui est C si les deux premières sont AB ou BA , B si les deux premières sont AC ou CA , A si les deux premières sont BC ou CB , ce qui fait bien six choix en tout. Si on voulait poursuivre et ajouter une quatrième lettre, on verrait qu'il reste zéro choix possibles, c'est-à-dire qu'on ne peut pas ajouter une quatrième lettre sans forcément répéter l'une des trois premières.

Plus généralement, avec un alphabet de r lettres, il y a r choix possibles pour la première lettre; celle-ci ne pouvant plus être réutilisée, il reste $r - 1$ choix possibles pour la deuxième; c'est-à-dire que pour *chacun* des r choix de la première, il y a $r - 1$ choix pour la deuxième, ce qui fait $r \cdot (r - 1)$ choix pour les deux premières; ensuite, pour *chacun* des $r \cdot (r - 1)$ choix des deux premières, il reste $r - 2$ choix pour la troisième, ce qui fait $r \cdot (r - 1) \cdot (r - 2)$ choix pour les trois premières; et ainsi de suite. Lorsque les $n - 1$ premières lettres sont déjà choisies, il reste $r - n + 1$ possibilités pour la n -ième. De sorte que pour avoir un mot de n lettres, on aura en tout

$$r(r - 1)(r - 2) \cdots (r - n + 1) \tag{II.2.}$$

possibilités. On remarquera que si $n \leq r$ ce nombre est aussi égal à $r!/(r-n)!$. Bien entendu, si $r < n$ c'est nul, puisqu'après avoir écrit une fois chaque lettre de l'alphabet disponible, on ne peut en ajouter une $(r+1)$ -ième sans répétition.

Tout comme le problème du §1, celui-ci sert de modèle pour d'autres situations. Ainsi nous avons vu que les mots de n lettres écrits dans un alphabet de r lettres permettaient de coder biunivoquement des distributions de boules dans des boîtes : si on considère uniquement des mots dont toutes les lettres sont différentes, les distributions de boules correspondantes sont des distributions où aucune boîte ne reçoit deux boules (aucune lettre n'est écrite à deux places dans le mot) : ce sont donc les distributions où il y a au plus une boule par boîte. Il faut donc retenir que **le nombre de distributions de n boules dans r boîtes avec au plus une boule par boîte** est donné par (II.2.)

Autre problème répondant au même modèle : les tirages sans remise : une urne contient r boules de couleurs différentes ; on tire successivement une première boule, puis une deuxième, puis une troisième, sans jamais les remettre dans l'urne ; la deuxième ne peut donc pas avoir la même couleur que la première puisqu'elle n'est plus dans l'urne, ni la troisième avoir la couleur de l'une des deux premières, etc. Le nombre de tirages possibles est donc également donné par (II.2.)

On peut illustrer les deux précédents paragraphes immédiatement par le problème suivant :

on écrit 5 chiffres décimaux au hasard ; quelle est la probabilité pour qu'ils soient tous différents ?

réponse : l'ensemble Ω de toutes les épreuves possibles est l'ensemble de toutes les suites de cinq chiffres pris dans l'alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. (ce qui revient à l'ensemble de tous les nombres entiers de 0 à 99 999, en considérant que le nombre 67 par exemple s'écrit 00067) ; il y en a 100 000 en tout d'après (II.1.) L'événement qui nous intéresse est l'ensemble A de tous les nombres dont les chiffres sont tous différents : il y en a $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ d'après (II.2.). La probabilité de cet événement est donc

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{30\,240}{100\,000} = 0,3024$$

De même, pour des nombres à j chiffres, si on désigne par A_j l'événement : "les j chiffres sont tous différents" :

$$\mathcal{P}(A_6) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1\,000\,000} = 0.1512$$

$$\mathcal{P}(A_7) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10\,000\,000} = 0.06048$$

$$\mathcal{P}(A_8) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{100\,000\,000} = 0.018144$$

J. Harthong: probabilités et statistique

$$\mathcal{P}(A_9) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1\,000\,000\,000} = 0.003\,628\,8$$

$$\mathcal{P}(A_{10}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10\,000\,000\,000} = 0.000\,362\,88$$

$$\mathcal{P}(A_j) = 0 \quad \text{pour } j > 10$$

Une variante de ce problème est le suivant :

On prend au hasard un groupe de vingt étudiants ; quelle est la probabilité pour que deux (au moins) d'entre eux aient leur anniversaire le même jour ?

réponse : le problème se modélise de la manière suivante. On considère que les jours de l'année sont équiprobables pour les naissances (ce qui est faux, mais grossièrement approximatif) ; de plus on néglige les cas de naissance un 29 février. Pour une liste donnée des vingt étudiants, par exemple dans l'ordre alphabétique, on a à considérer toutes les listes possibles pour leurs jours de naissance, c'est-à-dire toutes les listes possibles de vingt dates parmi 365 possibles ; ces listes sont au nombre de 365^{20} . Par ailleurs, l'événement A "au moins deux sont nés le même jour" est le complémentaire de l'événement B "toutes les dates sont différentes". L'événement B contient $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 346$ éléments, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &= \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 346}{365^{20}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{19}{365}\right) \end{aligned} \quad (II.3.)$$

On évalue cette expression en prenant le logarithme, sachant que $\ln(1 - \varepsilon) \simeq -\varepsilon$. Le logarithme du produit est la somme des logarithmes, donc

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{19}{365}\right) \right\} &\simeq -\frac{1 + 2 + \cdots + 19}{365} \\ &= -\frac{19 \cdot 20}{2 \cdot 365} \simeq -0.5 \end{aligned}$$

Ainsi on obtient la valeur approchée

$$\mathcal{P}(B) \simeq e^{-0.5} \simeq 0.6$$

d'où on déduit

$$\mathcal{P}(A) \simeq 0.4$$

Autrement dit, il y a 40% de chances pour que deux étudiants aient leur anniversaire le même jour. Le calcul approché qui a été fait pour obtenir ce résultat peut sembler très grossier (en fait la valeur exacte de l'expression (II.3.) est 0.588 561 535 soit une erreur de 1%), mais l'hypothèse de l'équiprobabilité des jours de l'année est au moins aussi grossière ; on pourrait aussi s'interroger sur l'intérêt de connaître le résultat au millièmes près.

Un cas particulier qui vaut la peine d'être souligné est le cas où la suite ordonnée utilise *toutes* les lettres disponibles, c'est-à-dire $n = r$. La question devient alors : **de combien de manières différentes peut-on ordonner**

Dénombrement

r **objets**?. Il s'agit du *nombre de permutations* de r objets. En prenant simplement $n = r$ dans (II.2.) on obtient :

$$\text{nombre de permutations de } r \text{ objets} = r! \quad (\text{II.4.})$$

Dans l'exemple ci-dessus (probabilité pour qu'un nombre de j chiffres décimaux pris au hasard ait tous ses chiffres différents) cela correspond au cas de dix chiffres (nombres compris entre zéro inclu et dix milliards exclu).

Bien entendu, dans aucun cas on ne peut avoir $n > r$, puisque si on doit écrire plus de lettres qu'il n'y en a dans l'alphabet disponible, on ne peut qu'en répéter.

II. 3. Combinaisons.

Lorsqu'on fait le produit de deux expressions algébriques, par exemple $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2)$ on utilise la distributivité de la multiplication : $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1x_1$. De même $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) \cdot (x_3 + y_3) = x_1x_2x_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + y_1x_1x_3 + x_1x_2y_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1x_1y_3$. Les monômes qu'on obtient dans l'expression développée sont les mots de deux (pour le produit de deux facteurs) ou trois (pour le produit de trois facteurs) lettres écrits avec l'alphabet $\{x, y\}$; l'indice ne sert ici qu'à indiquer la place de la lettre dans le mot. Le nombre de mots est, conformément à (II.1.), $2^2 = 4$ pour deux facteurs, $2^3 = 8$ pour trois facteurs. Si on fait un produit de deux ou trois facteurs identiques, on obtient les développements sans indices :

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot (x + y) &= xx + xy + yx + yy \\ (x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y) &= xxx + xyx + yxx + yyx + xxy + xyy + yxy + yyy \end{aligned}$$

Plus généralement, si on développe un produit de n fois le facteur $(x + y)$, le développement est la somme de tous les monômes possibles, c'est-à-dire la somme de tous les mots de n lettres qu'on peut former avec les deux lettres x et y . Si on tient compte de la commutativité de la multiplication, les monômes xyx , yxx , et xxy sont égaux; on regroupe donc leur somme en $3x^2y$; de même les monômes yyx , xyy , et yxy peuvent être regroupés en $3xy^2$. Ainsi se pose la question : parmi les 2^n mots de n lettres qu'on peut former avec les deux lettres x et y , combien comportent k fois la lettre x et $n - k$ fois la lettre y ? La formule connue du binôme de Newton répond à cette question : elle nous dit que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad ,$$

c'est-à-dire que le nombre de monômes égaux à $x^k y^{n-k}$ (et qui par conséquent peuvent être regroupés) est égal au k -ième coefficient du binôme d'ordre n

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad (II.5.)$$

Ainsi, le nombre de mots de n lettres qu'on peut former avec un alphabet de deux lettres, et qui comportent k fois l'une et $n-k$ fois l'autre est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Nous avons vu au §1 qu'il y avait isomorphisme ou équivalence entre les mots et les distributions de boules dans des boîtes; traduisons ce que nous venons de constater pour les monômes en termes de boules: cela correspond donc à n boules à distribuer dans $r = 2$ boîtes. Ainsi il y a $\binom{n}{k}$ manières de distribuer n boules dans deux boîtes, de telle façon qu'il y en ait k dans l'une et $n-k$ dans l'autre. Placer k (parmi n) boules dans une boîte (il en restera alors forcément $n-k$ pour l'autre boîte) revient à choisir un sous-ensemble de k boules parmi l'ensemble des n boules.

On remarquera qu'il s'agit de sous-ensembles, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel les éléments du sous-ensemble sont donnés ne joue pas: les numéros des k boules qui sont dans la boîte x forment un sous-ensemble à k éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Mais ce sous-ensemble non ordonné détermine l'ordre dans lequel les lettres x et y apparaissent dans le monôme. Si par exemple $n = 5$ et $k = 3$, le sous-ensemble $\{2, 4, 5\}$ est le même que $\{4, 5, 2\}$ ou $\{5, 4, 2\}$. Le monôme correspondant à ce sous-ensemble est $yx y x x$ (c'est-à-dire que la lettre x occupe les places 2, 4, et 5, peu importe dans quel ordre ces numéros de places ont été dictés); si on mélange l'ordre des lettres dans le monôme, pour obtenir par exemple le monôme $x y x y x$ (qui est donc égal au précédent compte tenu de la commutativité de la multiplication), ce nouveau monôme correspond à un autre sous-ensemble, à savoir $\{1, 3, 5\}$.

Traduit en termes de tirages dans des urnes, le problème revient à ceci: au §1 on caractérisait un tirage par la suite ordonnée des couleurs obtenues successivement (cela formait un mot). Si on traduit de la même façon, nous avons ici deux boules, par exemple une noire et une rouge. On tire n fois avec remise. En notant à chaque fois la couleur tirée, x pour rouge et y pour noire, on obtient un monôme en x et y .

Une autre façon d'habiller le même problème, toujours équivalente, consiste, puisqu'il n'y a que deux couleurs ou deux lettres, à dénombrer les suites de résultats possibles obtenus en lançant n fois une pièce de monnaie: on écrit x quand sort pile et y quand sort face. Si un joueur donne un franc

Dénombrement

à l'autre joueur chaque fois que sort pile (et inversement quand sort face), le gain est égal au nombre de x moins le nombre de y ; si k est le nombre de x , le nombre de y sera $n - k$, donc le gain sera $w = k - (n - k) = 2k - n$. Ce gain ne dépend donc pas de la place des x et des y dans le monôme, mais seulement du nombre k de x , c'est-à-dire du nombre de pile. Par conséquent le nombre de résultats différents apportant un même gain $w = 2k - n$ est $\binom{n}{k}$.

Les coefficients binômiaux sont aussi donnés par le triangle de Pascal, qu'on obtient en écrivant pour chaque n les $2n + 1$ coefficients binômiaux d'ordre n sur une ligne, la première ligne correspondant à $n = 1$, la seconde à $n = 2$, etc. Cela donne pour les lignes 0 à 13 :

1													
1	1												
1	2	1											
1	3	3	1										
1	4	6	4	1									
1	5	10	10	5	1								
1	6	15	20	15	6	1							
1	7	21	35	35	21	7	1						
1	8	28	56	70	56	28	8	1					
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1

Le triangle de Pascal a la propriété suivante : chaque élément d'une ligne est la somme de deux éléments de la ligne précédente : celui qui est au-dessus et son voisin de gauche ; ainsi $1716 = 924 + 792$, $165 = 120 + 45$, etc. Cela correspond à la relation de récurrence suivante :

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

Cette relation de récurrence est très facile à vérifier directement. En effet, en écrivant les coefficients binômiaux avec des factorielles, selon (II.5.) cela revient à

$$\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} [(n-k) + k] = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si on se propose de calculer *numériquement* les coefficients binômiaux, il se trouve que cette formule de récurrence est l'algorithme le plus efficace qu'on connaisse. La raison en est que si on le met en oeuvre, il n'effectue que des additions, alors qu'un calcul même habile des factorielles demande des multiplications et des divisions. Son défaut est que, même si on veut ne calculer qu'un seul coefficient binomial, par exemple $\binom{72}{27}$, on doit calculer les lignes complètes du triangle de Pascal ; le nombre d'additions nécessaire est alors environ 2500. Calculer directement en passant par les factorielles est visiblement maladroit : $72!$ exige 72 multiplications, $27!$ en exige 27 et $(72-27)!$ en exige $72-27$, soit 144 multiplications en tout. En outre, en procédant ainsi, on calcule d'abord séparément des nombres *bien plus gros* que celui qu'on veut finalement obtenir ($\binom{72}{27}$ est grand aussi, mais nettement moins que $72!$) ; on gaspille ainsi du temps à calculer des nombres entiers

très longs, que l'on divise ensuite. On pourrait certes faire une économie en calculant par exemple $\frac{72}{27} \cdot \frac{71}{26} \cdot \frac{70}{25} \cdots \frac{47}{2} \cdot 46$, mais les différents facteurs sont alors des fractions et ne peuvent donc être manipulés qu'en virgule flottante (donc en perdant l'exactitude). En utilisant le triangle de Pascal, les calculs intermédiaires ne font jamais appel à des nombres plus gros que celui qu'on veut atteindre, et on ne fait intervenir que des entiers. En fin de compte on y gagne, surtout si on n'en veut pas un seul coefficient, mais par exemple toute une ligne.

Lorsque k varie de 0 à n , le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est croissant tant que $2k < n$, puis décroissant quand $2k > n$; si n est pair (disons $n = 2p$), il est maximum pour $k = p$ et vaut alors $(2p)!/p!^2$; si n est impair (disons $n = 2p - 1$), il est maximum ex aequo pour $k = p - 1$ et $k = p$ et vaut alors $(2p - 1)!/p!(p - 1)! = \frac{1}{2} \cdot (2p)!/p!^2$. Pour s'en rendre compte, il suffit de comparer $\binom{n}{k+1}$ à $\binom{n}{k}$: en divisant les factorielles, on voit que

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$$

la suite des $\binom{n}{k}$ est donc croissante tant que $(n-k)/(k+1) \geq 1$ ($\Leftrightarrow 2k \leq n-1$) et décroissante quand $(n-k)/(k+1) \leq 1$ ($\Leftrightarrow 2k \geq n-1$), C.Q.F.D.

Le calcul numérique exact des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ (par exemple avec l'algorithme du triangle de Pascal) devient très ardu lorsque n est très grand; le calcul opère sur des entiers, mais lorsqu'ils sont grands on ne peut se contenter de deux octets et les temps de calcul deviennent vite prohibitifs. En outre, il est bien rare que pour n grand une expression exacte présente seulement un intérêt. Or il se trouve qu'il existe une expression approchée simple et très utile des coefficients binomiaux. Voyons le cas où n est pair ($n = 2p$); le cas n impair doit être traité séparément, mais il est analogue. Posons $k = p + j$ pour symétriser (j est alors nul quand $k = p$ et j varie de $-p$ à $+p$). On a bien sûr $\binom{2p}{p-j} = \binom{2p}{p+j}$, et il suffit d'examiner le cas où $j > 0$.

En décomposant convenablement les factorielles qui figurent au numérateur et au dénominateur des coefficients binomiaux, on peut écrire, si j est positif :

$$\begin{aligned} \binom{2p}{p+j} &= \binom{2p}{p} \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-j+1)}{(p+1)(p+2) \cdots (p+j)} \\ &= \binom{2p}{p} \frac{p^j \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{p}\right) \right]}{p^j \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{2}{p}\right) \cdots \left(1 + \frac{j}{p}\right) \right]} \end{aligned}$$

Dénombrement

Pour évaluer les expressions entre crochets en numérateur et dénominateur on prend leurs logarithmes ; on sait que

$$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \dots$$

de sorte que pour l'expression au dénominateur on obtient

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{2}{p}\right) \dots \left(1 + \frac{j}{p}\right) \right\} &= \frac{1 + 2 + \dots + j}{p} - \frac{1 + 4 + \dots + j^2}{2p^2} + \dots \\ &= \frac{j(j+1)}{2p} - \frac{O(j^3)}{6p^2} \\ &\simeq \frac{j^2}{2p} \end{aligned}$$

Pour l'expression au numérateur (en utilisant cette fois $\ln(1 - \varepsilon) = -\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} - \dots$) on obtiendrait de même

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{2}{p}\right) \dots \left(1 - \frac{j-1}{p}\right) \right\} &= -\frac{1 + \dots + (j-1)}{p} - \frac{1 + \dots + j^2}{2p^2} + \dots \\ &= -\frac{j(j-1)}{2p} - \frac{O(j^3)}{6p^2} \\ &\simeq \frac{-j^2}{2p} \end{aligned}$$

En revenant aux exponentielles des logarithmes et en regroupant tout, il apparaît que

$$\binom{2p}{p+j} \simeq \binom{2p}{p} \exp\left[-\frac{j^2}{p}\right]$$

Cette approximation est valable pourvu que l'erreur commise, qui comme nous l'avons vu au cours du calcul, est de l'ordre de j^3/p^2 , soit négligeable. Or si j est de l'ordre de \sqrt{p} ou plus petit, j^3/p^2 sera de l'ordre de $1/\sqrt{p}$ qui est négligeable si p est grand. Si j est plus grand que \sqrt{p} en ordre de grandeur, l'erreur n'est plus négligeable en ce sens que j^3/p^2 n'est pas petit devant j^2/p , mais en fait cela ne porte pas à conséquence car dans ce cas le rapport $\binom{2p}{p+j}/\binom{2p}{p}$ est tellement petit que, erreur ou pas, on peut le remplacer aussi bien par 0 que par $\exp(-j^2/n)$.

Quand à la valeur maximum $\binom{2p}{p} = (2p)!/p!^2$ elle-même, elle peut être approchée en utilisant la formule de Stirling : $p! \simeq p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}$. Ainsi

$$\binom{2p}{p} = (2p)!/p!^2 \simeq \frac{2^{2p} p^{2p} e^{-2p} \sqrt{4\pi p}}{p^{2p} e^{-2p} 2\pi p} = \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}}$$

On peut donc conclure que pour p grand :

$$\binom{2p}{p+j} = \binom{2p}{p-j} \simeq \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}} \cdot \exp\left[-\frac{j^2}{p}\right] \quad (II.6.)$$

Pour le cas impair on aurait obtenu par des voies semblables :

$$\binom{2p-1}{p+j} = \binom{2p-1}{p-j-1} \simeq \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi p}} \cdot \exp\left[-\frac{j^2}{p}\right] \quad (II.6a.)$$

II. 4. Partitions en groupes de taille donnée.

Maintenant la question est celle-ci : on se donne m nombres entiers ≥ 0 , $n_1, n_2 \dots n_m$, dont la somme est n ; de combien de manières différentes peut-on ranger n éléments en m groupes de (respectivement) $n_1, n_2 \dots n_m$ éléments ?

On peut interpréter le problème étudié dans le paragraphe précédent en disant qu'on cherchait le nombre de partitions de l'ensemble à n éléments en *deux* sous-ensembles ayant respectivement k et $n - k$ éléments, ce qui était donc le cas particulier correspondant à $m = 2$, $n_1 = k$ et $n_2 = n - k$. C'est ce qui apparaissait quand le problème était interprété en termes de boules à distribuer dans des boîtes : il y avait alors 2^n distributions possibles de n boules dans deux boîtes, et parmi celles-ci il y en avait $\binom{n}{k}$ pour lesquelles la première boîte recevait k boules et la deuxième $n - k$. Si le nombre de boîtes est quelconque, disons m , il s'agit des distributions de boules dans m boîtes : le problème se généralise alors ainsi : **quel est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en m sous-ensembles ayant respectivement $n_1, n_2, \dots n_m$ éléments ?** Les nombres $n_1, n_2, \dots n_m$ sont appelés les nombres d'occupation ; n_j est le nombre d'occupation de la j -ième boîte.

Dans le paragraphe précédent nous avons abordé le problème en étudiant le développement du binôme : $(x + y)^n$. De la même façon on peut aborder le problème du nombre de partitions à partir, non plus du binôme, mais de $(x_1 + x_2 + \dots x_m)^n$: on est alors ramené à compter, sur les m^n monômes de l'expression développée, combien sont égaux à $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_m^{n_m}$, ou encore (en termes de mots et de lettres) : **parmi les m^n mots de n lettres qu'on peut former avec l'alphabet $\{x_1, x_2, x_3, \dots x_m\}$ combien y en a-t-il qui contiennent n_1 fois la lettre x_1 , n_2 fois la lettre x_2 , n_3 fois la lettre x_3 , $\dots n_m$ fois la lettre x_m ?** (nous y reviendrons un peu plus loin).

Toujours au paragraphe précédent, au lieu de poser le problème en termes de mots écrits avec les deux lettres x et y , on aurait aussi pu le

Dénombrement

poser de la manière suivante: pour un ensemble E de n objets il y a $n!$ permutations. Si on considère une partition en *deux* sous-ensembles E_k et E_{n-k} , alors toute permutation qui permute les éléments de E_k entre eux et les éléments de E_{n-k} entre eux laisse ces deux ensembles intacts; or il y a $k!(n-k)!$ telles permutations. Toute autre permutation de E modifie les deux sous-ensembles, mais non leur nombre (2), ni le nombre de leurs éléments respectifs (k et $n-k$); autrement dit, toute autre permutation transforme une partition en deux sous-ensembles à k et $n-k$ éléments en une autre partition en deux sous-ensembles à k et $n-k$ éléments. Le nombre total de permutations (soit $n!$) est donc le produit du nombre de partitions en deux sous-ensembles à k et $n-k$ éléments par le nombre de permutations qui laissent chacune intacte, ou inversement, le nombre de partitions en deux sous-ensembles à k et $n-k$ éléments est le quotient du nombre total de permutations par le nombre de permutations qui laissent chacune intacte, soit $n!/k!(n-k)!$. On retrouve ainsi (II.5).

Cette façon de compter donne immédiatement la réponse à la question du présent paragraphe. Pour une partition en m sous-ensembles $E_{n_1}, E_{n_2}, \dots, E_{n_m}$, toute permutation qui permute les éléments de chacun des E_{n_j} entre eux (pour j de 1 à m) laisse ces m ensembles intacts; or il y a $n_1!n_2! \dots n_m!$ telles permutations. Toute autre permutation de E modifie les m sous-ensembles, mais non leur nombre (m), ni le nombre de leurs éléments, c'est-à-dire les nombres d'occupation (n_1, n_2, \dots, n_m); autrement dit, toute autre permutation transforme une partition en m sous-ensembles à n_1, n_2, \dots, n_m éléments en une autre partition en m sous-ensembles à n_1, n_2, \dots, n_m éléments. Le nombre total de permutations (soit $n!$) est donc le produit du nombre de partitions en m sous-ensembles à n_1, n_2, \dots, n_m éléments par le nombre de permutations qui laissent chacune intacte, ou encore, le nombre de partitions en m sous-ensembles à n_1, n_2, \dots, n_m éléments est le quotient du nombre total de permutations par le nombre de permutations qui laissent chacune intacte, soit

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_m!}. \quad (II.7.)$$

Pour donner un exemple de ce type de dénombrement, prenons notre promotion de 72 étudiants. De combien de manières différentes peut-on les diviser en trois groupes de T.D. de 24 étudiants chacun? Réponse: $72!/24!24!24! \simeq 2.564 \cdot 10^{32}$. De même, le nombre de manières différentes de répartir 72 étudiants dans trois groupes de respectivement 30, 25, et 17 étudiants est $72!/30!25!17! \simeq 4.184 \cdot 10^{31}$. Dans des groupes de 32, 22, et 18: $72!/32!22!18! \simeq 3.234 \cdot 10^{32}$. Si les tailles des trois groupes sont davantage différenciées, le nombre devient plus petit: $72!/60!8!4! \simeq 7.605 \cdot 10^{15}$.

En revanche pour des groupes plus nombreux le nombre de possibilités augmente : $72!/32! 22! 10! 8! \simeq 1.4155 \cdot 10^{36}$. On pourrait montrer (d'ailleurs on le fera plus loin) que pour un nombre de groupes donné, le nombre de possibilités est maximum lorsque les groupes sont de tailles égales, c'est-à-dire lorsque les nombres d'occupation sont égaux entre eux.

On retrouve encore ces nombres lorsqu'on développe le polynôme $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$. Cela n'a rien de surprenant puisqu'ils ne font que généraliser les nombres II.5. Ainsi :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

la sommation portant sur toutes les familles d'indices possibles qui vérifient $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. C'est pourquoi ces nombres sont appelés *coefficients multinômiaux*, de même que ceux de la section précédente étaient appelés coefficients binômiaux. Quoique cette notation soit moins célèbre que celle des coefficients binômiaux, on désigne les coefficients multinômiaux de manière analogue :

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

De même que tous les problèmes de combinaisons de lettres que nous avons abordé jusqu'ici, le problème du nombre de partitions en groupes de taille donnée peut s'interpréter en termes de boules à ranger dans des boîtes. Lorsqu'il s'agissait de mots (de n lettres) écrits avec un alphabet de m lettres, nous avons vu l'équivalence avec la répartition de n boules dans m boîtes. Ici, il s'agit du nombre de mots différents qui contiennent *un nombre donné de fois* chacune des m lettres de l'alphabet. En termes de boules et de boîtes, chaque boîte correspond à une lettre de l'alphabet, et chaque boule correspond à la place occupée par une lettre dans le mot. Le problème revient alors au nombre de répartitions pour lesquelles la boîte correspondant à la lettre x_j contient n_j boules : il s'agit donc du nombre de répartitions différentes pour lesquelles chaque boîte contient un nombre fixé à l'avance de boules : **de combien de manières différentes peut-on répartir n boules dans m boîtes, de telle sorte que la première en contienne n_1 , la deuxième n_2 , la troisième n_3 , etc ?**

De même que pour les coefficients binômiaux, on peut avoir une approximation simple et pratique pour n grand. On peut vérifier que $n!/n_1! n_2! n_3! \dots n_m!$ est maximum lorsque les nombres $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ sont égaux (si n est un multiple de m) ou égaux à une unité près (si n n'est pas un multiple de m). En utilisant la formule de Stirling, comme nous l'avons fait

Dénombrement

pour le maximum des coefficients binômiaux, on obtient pour ce maximum l'approximation

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_m!} \simeq \frac{m^{n+\frac{m}{2}}}{\sqrt{(2\pi n)^{m-1}}}$$

(à partir d'ici $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ désignent les valeurs correspondant au *maximum*). Pour connaître la variation *autour* du maximum, on procède comme au §3, on introduit $j_1, j_2, j_3, \dots, j_m$ et on remarque que

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{(n_1 + j_1)! (n_2 + j_2)! (n_3 + j_3)! \cdots (n_m + j_m)!} = \\ & = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_m!} \cdot \frac{n_1!}{(n_1 + j_1)!} \cdot \frac{n_2!}{(n_2 + j_2)!} \cdot \frac{n_3!}{(n_3 + j_3)!} \cdots \frac{n_m!}{(n_m + j_m)!} \end{aligned}$$

Chacun des facteurs $n_i!/(n_i + j_i)!$ peut être approché en utilisant le procédé que nous avons déjà vu. Si $j_i > 0$ on écrit

$$\begin{aligned} \frac{n_i!}{(n_i + j_i)!} &= \frac{1}{(n_i + 1)(n_i + 2)(n_i + 3) \cdots (n_i + j_i)} \\ &= \frac{1}{n_i^{j_i} \left[\left(1 + \frac{1}{n_i}\right) \left(1 + \frac{2}{n_i}\right) \cdots \left(1 + \frac{j_i}{n_i}\right) \right]} \\ &\simeq \frac{1}{n_i^{j_i}} \cdot e^{-\frac{j_i^2}{2n_i}} \end{aligned}$$

et si $j_i < 0$

$$\begin{aligned} \frac{n_i!}{(n_i + j_i)!} &= n_i(n_i - 1)(n_i - 2)(n_i - 3) \cdots (n_i - |j_i| + 1) \\ &= n_i^{|j_i|} \left[\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) \cdots \left(1 - \frac{|j_i| - 1}{n_i}\right) \right] \\ &\simeq \frac{1}{n_i^{|j_i|}} \cdot e^{-\frac{j_i^2}{2n_i}} \end{aligned}$$

(on voit que l'approximation a la même expression analytique, indépendamment du signe de j_i). Si maintenant on applique ce résultat à chacun des facteurs $n_i!/(n_i + j_i)!$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{(n_1 + j_1)! (n_2 + j_2)! (n_3 + j_3)! \cdots (n_m + j_m)!} \simeq \\ & \simeq \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_m!} \cdot \frac{e^{-\frac{j_1^2}{2n_1} - \frac{j_2^2}{2n_2} - \frac{j_3^2}{2n_3} \cdots - \frac{j_m^2}{2n_m}}}{n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \cdots n_m^{j_m}} \end{aligned} \tag{II.8.}$$

Il ne faut pas oublier que la somme des n_i est toujours égale à n donc la somme des j_i est nulle; l'exposant de l'exponentielle est la somme des $j_i^2/2n_i$, mais les j_i ne sont pas indépendants.

Pour obtenir (II.8.) nous n'avons pas utilisé le fait que les valeurs des nombres $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ correspondent au maximum du coefficient multinomial; formellement, (II.8.) est vrai pour *n'importe quelle valeur de* $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$. Mais si le facteur $1/n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \dots n_m^{j_m}$ n'est pas *stationnaire*, cette formule ne sert à rien, car lorsque les j_i varient, ce facteur peut augmenter bien plus vite que la fonction $\exp(-j_i^2/2n_i)$ ne diminue, de sorte qu'il ne sert plus à rien d'avoir mis en évidence ce facteur gaussien. Dire que le facteur est stationnaire signifie qu'il ne varie pas (ou très peu) lorsque les j_i s'écartent de 0; or cela se produit précisément lorsque les n_i sont égaux: dans ce cas $n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \dots n_m^{j_m} = n_1^{j_1+j_2+j_3+\dots+j_m} = n_1^0 = 1$. Il est évident que la fonction $\exp(-\sum_i j_i^2/2n_i)$ est maximum quand les j_i sont tous nuls; mais pour que le *produit* de $1/n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \dots n_m^{j_m}$ par $\exp(-\sum_i j_i^2/2n_i)$ soit maximum, il faut que $1/n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \dots n_m^{j_m}$ soit maximum en même temps, ou du moins qu'il reste constant. La stationnarité de ce facteur est donc la condition sine qua non pour que le produit soit maximum.

II. 5. Subdivisions.

La section précédente traitait du nombre de répartitions en sous-ensembles de taille fixée à l'avance (par la donnée des nombres d'occupation). Mais il reste la question de connaître le nombre de choix possibles pour les nombres d'occupation. Ceux-ci vérifient nécessairement la relation $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. **Combien y a-t-il de possibilités de choisir m nombres vérifiant cette égalité?** On peut encore formuler la question en terme de développement multinomial: nous avons vu au paragraphe précédent comment les *coefficients multinomiaux* interviennent dans le développement

$$\sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

La question que nous traitons maintenant est celle du *nombre de termes* qu'il y a dans cette somme. On remarquera que les nombres d'occupation peuvent être nuls: quand on considère toutes les distributions possibles de boules dans des boîtes, on inclut le cas où des boîtes sont entièrement vides; ou encore, dans le développement multinomial ci-dessus, beaucoup de monômes ne contiennent pas toutes les n variables, par exemple le monôme x_1^n . Mais on peut aussi dénombrer les distributions qui ne laissent *aucune* boîte vide: nous étudierons également ce cas.

Dénombrement

Considérons d'abord le cas où les sous-ensembles vides sont admis. On résoud ce problème en le ramenant à un autre de la façon suivante. Le problème d'une distribution de n objets dans m sous-ensembles est évidemment identique à celui d'une distribution de n boules dans m cases. On peut représenter graphiquement une telle distribution (même si on ne peut le faire qu'abstraitement et non sur du papier, comme ce serait le cas si par exemple on devait avoir $m = 10^{1000000}$) comme dans la figure 1 (chapitre **I**). On schématise alors la séparation entre deux cases adjacentes par une barre verticale, ce qui donne un graphique du type suivant :



on a ici 18 boules dans 14 cases, les nombres d'occupation étant 2, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 0, 1, 3, 0, 0, 1, 1. On peut voir que le problème, vu sous cet angle, est simplement le problème de la répartition de n ronds et $m - 1$ barres sur $n + m - 1$ places : à chaque schéma de ce type correspond une et une seule distribution de n boules dans m cases et vice-versa. Si on change l'ordre des ronds (entre eux) ou celui des barres (entre elles) on ne change rien au schéma de sorte que le nombre de schémas différents est donné par la section **II. 3.** : il y en a $(n + m - 1)!/n!(m - 1)!$

Pour le cas où les sous-ensembles vides ne sont pas admis, le schéma ci-dessus ne marche plus car il y a des cases vides (correspondant à des barres non séparées par un rond). Ne correspondent alors à notre problème que les schémas sans barres contiguës. On peut interpréter un tel schéma comme une combinaison, non plus de $|$ et de \bigcirc , mais de $| \bigcirc$ et de \bigcirc . Comme les schémas ont un rond à leur extrémité gauche, qui est obligatoire et ne change donc rien au nombre de possibilités, le choix ne portera que sur les $n - 1$ autres ronds. De plus, comme chacun des $m - 1$ symboles $| \bigcirc$ représente une case *et* une boule, il faudra n'ajouter que $n - m$ symboles \bigcirc pour avoir $n - 1$ boules en tout. De sorte que le nombre total de signes $| \bigcirc$ ou \bigcirc à choisir sera $n - 1$, et par conséquent le nombre de toutes les combinaisons sera $(n - 1)!/(m - 1)!(n - m)!$

En fin de compte :

$$\begin{array}{l} \text{nombre de subdivisions} \\ \text{en } m \text{ sous-ensembles} \\ \text{pouvant être vides} \end{array} = \frac{(n + m - 1)!}{n!(m - 1)!} ; \quad (II.9.)$$

$$\begin{array}{l} \text{nombre de subdivisions} \\ \text{en } m \text{ sous-ensembles} \\ \text{non vides} \end{array} = \frac{(n - 1)!}{(n - m)!(m - 1)!} . \quad (II.10.)$$

Le nombre donné en II.9. est aussi le nombre de dérivées partielles d'ordre n d'une fonction de m variables. Par exemple on peut voir dans les tableaux suivants le nombre de dérivées partielles d'ordre 1 à 5 pour des fonctions de deux, trois, quatre, et cinq variables :

fonctions de deux variables		fonctions de trois variables		fonctions de quatre variables		fonctions de cinq variables	
ordre	nombre	ordre	nombre	ordre	nombre	ordre	nombre
1	2	1	3	1	4	1	5
2	3	2	6	2	10	2	15
3	4	3	10	3	20	3	35
4	5	4	15	4	35	4	70
5	6	5	21	5	56	5	126

La formule de dénombrement (II.9.) est essentielle en physique statistique. Elle est à la base de la *statistique de Bose-Einstein*. Au chapitre I nous avons donné l'exemple de trois particules de Bose à placer dans deux états quantiques (voir figure 1, colonne de droite). Cet exemple était opposé à celui de trois boules non quantiques à ranger dans deux boîtes (figure 1, colonne de gauche). À cette occasion, nous avons insisté sur le fait que pour les boules, les épreuves équiprobables étaient les huit distributions possibles (on considérait que deux distributions qui diffèrent par une permutation des boules constituent deux épreuves distinctes), tandis que pour les particules de Bose, les épreuves équiprobables étaient les quatre modes d'occupation possibles (on considérait que deux distributions qui diffèrent par une permutation des particules ne constituent pas deux épreuves distinctes).

La formule (II.9.) généralise cela pour n particules et m états quantiques. Si on prend $n = 3$ et $m = 2$ on a bien

$$\frac{(n + m - 1)!}{n!(m - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{3!(2 - 1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Ainsi $(n + m - 1)!/n!(m - 1)!$ est le nombre de modes d'occupation de m états quantiques par n particules de Bose.

Le postulat de base de la statistique de Bose-Einstein est que les modes d'occupation sont équiprobables (ils constituent les épreuves parmi lesquelles "le hasard choisit"). Mais il faut bien comprendre que ce hasard, tout comme dans les exemples de chaos déterministe que nous avons analysés au chapitre I, n'est pas une propriété première de la nature, mais résulte d'un brouillage chaotique, qui est l'agitation thermique. L'agitation thermique est d'autant plus intense que la température du gaz de particules est plus élevée; elle a pour effet que les particules sont sans cesse délogées des états quantiques qu'elles occupent par toutes sortes d'interactions; des

Dénombrement

milliards de milliards de fois par seconde, des milliards de milliards de photons ou d'électrons se promènent à travers l'espace pour apporter ou enlever de petites quantités d'énergie à ces particules; ainsi ces dernières passent sans cesse (des milliards de milliards de fois par seconde) d'un état quantique à un autre: chaque fois qu'elles absorbent un photon elles passent à un état d'énergie supérieure, chaque fois qu'elles émettent un photon elles passent à un état d'énergie inférieure. Ce brouillage est incomparablement plus puissant que par exemple celui qui résulte des nombreuses réflexions sur le bord de la roulette; le modèle simplifié de roulette discuté au chapitre I était un exemple choisi délibérément pour sa simplicité et restait dans les limites du calculable. Il n'est pas question d'en faire autant pour un gaz formé de 10^{24} particules (environ le nombre d'Avogadro), c'est-à-dire appliquer la Mécanique quantique *exacte* à un tel système. Mais il est remarquable que ce brouillage produise l'équiprobabilité des modes d'occupation et non par exemple celui des distributions de particules discernables. Ceci est une loi fondamentale de la Physique et ne peut se déduire de considérations a priori sur les invariances spatio-temporelles.

Attention! Ce sont les modes d'occupations pour des états *d'énergie égale* qui sont équiprobables. Si on considère deux états d'énergie différente, celui dont l'énergie est plus basse a plus de chances d'être occupé. On peut comprendre cela en imaginant qu'on remue un pierrier sur une pente; bien que les pierres se mettent en mouvement de manière aléatoire et imprévisible, elles ont plus de chances de descendre que de monter: pour monter, il faut qu'une pierre ait par exemple heurté en descendant une autre pierre plus lente, et rebondi sur elle, de sorte que la quantité de mouvement totale soit conservée; pour que la pierre monte, il faut que l'autre pierre descende plus vite. Il en va de même pour les particules: l'agitation thermique ne fait que répartir l'énergie; l'énergie totale se conserve, de sorte que pour qu'une particule "monte" dans un état de plus grande énergie, il faut qu'en compensation une ou plusieurs autres "descendent". On conçoit donc qu'en moyenne, il est plus difficile pour les particules de monter que de descendre, et on s'attend à ce que les nombres d'occupation des états de grande énergie soient en moyenne plus petits que les nombres d'occupation des états de faible énergie.

S'il n'y avait aucune agitation thermique, les particules seraient toutes dans l'état dit fondamental, celui dont l'énergie est la plus basse (c'est ce qui se produirait si la température devenait exactement égale à 0 degré Kelvin). C'est donc uniquement l'agitation thermique, c'est-à-dire l'échange incessant d'énergie entre les particules, qui permet à certaines de monter (au détriment des autres).

Afin de dénombrer les différents modes d'occupation entre tous les états quantiques, quelle que soit leur énergie, on découpe les valeurs possibles de l'énergie des états en petits intervalles de largeur δ ; ainsi ε_0 sera l'énergie la plus basse ; on considérera les valeurs discrètes $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + i\delta$. Si δ est petit, les états dont l'énergie est comprise entre ε_i et ε_{i+1} ont pratiquement la même énergie ; soit m_i leur nombre. Il est bien clair que les nombres m_i sont à peu près proportionnels à δ : si par exemple δ est doublé, il y aura deux fois moins d'intervalles d'énergie, mais les nombres m_i seront aussi deux fois plus grands. Puisque par construction les états d'un même intervalle ont à peu près la même énergie, les modes d'occupation des m_i états de l'intervalle seront tous à peu près équiprobables. On serait tenté de dire que plus δ est petit, plus cette équiprobabilité est exacte ; mais cela n'a guère de sens car le principe de l'équiprobabilité des modes d'occupations est par nature approximatif, et si δ est si petit que m_i devient égal à 0, 1, ou 2, le principe devient même carrément faux ; en fait il est essentiel que δ ne soit ni trop grand, ni trop petit, et m_i doit être un grand nombre, plutôt de l'ordre du nombre d'Avogadro que de l'ordre de cent ou mille.

Pour les m_i états quantiques d'énergie comprise entre ε_i et ε_{i+1} , il y aura donc pour n_i particules $(n_i + m_i - 1)!/n_i!(m_i - 1)!$ modes d'occupation : cela veut dire que si n_i particules sont distribuées entre les m_i états d'énergie comprise entre ε_i et ε_{i+1} , alors elles peuvent se répartir selon $(n_i + m_i - 1)!/n_i!(m_i - 1)!$ modes d'occupation différents. A priori on ne peut pas connaître les valeurs des n_i , mais par contre celles des m_i sont déterminées par les caractéristiques macroscopiques du système. Ce sont généralement les équations de la Mécanique *classique* qui permettent de les déterminer. En effet, les m_i font partie des propriétés globales du système, qui constituent en quelque sorte l'environnement de la population de particules. Par exemple, si on sait que les particules sont des photons de rayonnement à l'intérieur d'une cavité, les états qu'ils peuvent occuper sont caractérisés par les fréquences propres de la cavité : pour chacune de ces fréquences propres, il y aura deux états quantiques possibles (différant par la polarisation) pour le photon. Calculer l'évolution du système complexe qu'est la population de photons par la Mécanique quantique exacte est d'une complexité inouïe, mais calculer les fréquences propres de la cavité est assez facile car la forme géométrique de la cavité ne subit pas le brouillage thermique ; on effectuera donc des calculs classiques détaillés pour la cavité, mais on appliquera les lois du hasard à la population de photons. Cette façon d'aborder les systèmes formés d'un très grand nombre de particules ou de molécules constitue la *Physique statistique*. Afin d'en donner une idée plus précise, le mieux est de traiter en détail un exemple concret, qui est aussi une application directe de ce que nous venons de voir concernant la

Dénombrement

statistique de Bose-Einstein : la loi de Planck.

II. 6. Une introduction à la physique statistique : la loi de Planck et le rayonnement du corps noir.

Le problème du *corps noir* est un des grands problèmes historiques de la Physique, car il est à l'origine de la Mécanique quantique (Max Planck, 1900). Concrètement, un corps noir est par exemple une cavité à l'intérieur d'un corps opaque, qui est chaud à l'intérieur mais thermiquement isolé à l'extérieur : dans la cavité il y a un rayonnement dû à l'émission thermique par le corps ; plus le corps est chaud, plus nombreux sont les photons de haute fréquence (le corps peut avoir été chauffé "au rouge", ou "à blanc"). Planck a d'abord trouvé la loi qui porte son nom en interpolant entre la loi de Rayleigh-Jeans (qui était correcte pour les faibles fréquences) et la loi de Wien (correcte pour les hautes fréquences), et non par le raisonnement probabiliste que nous présentons ici, puisque les photons et la statistique de Bose-Einstein n'étaient évidemment pas encore connus. Voir à ce sujet **XII.5**. Planck a cherché ensuite une explication statistique, mais c'est Einstein qui, en 1905, a eu l'idée de considérer des *quanta de lumière* pour expliquer la loi de Planck (*Annalen der Physik*, vol **17**, 1905, pages 132 – 148). Toutefois, dans cette publication de 1905, rien n'est dit sur l'aspect probabiliste. C'est Satyandranath Bose qui a proposé un fondement statistique (*Zeitschrift für Physik*, vol **26**, 1924, pages 178 – 181) :

Supposons que le rayonnement soit enfermé dans un volume V et que son énergie totale soit E . Il existe différentes sortes de quanta en nombre N_s et d'énergie $h\nu_s$, où s va de $s = 0$ à $s = \infty$ (...). Si nous pouvions exprimer la probabilité de chacune des distributions caractérisées par un nombre N_s arbitraire, alors la solution sera obtenue en prenant le critère de rendre cette probabilité maximale.

Cette probabilité est alors cherchée par le raisonnement suivant :

Soit N_s le nombre de quanta appartenant au domaine de fréquences $d\nu_s$. De combien de manières peut-on les distribuer entre les cellules appartenant à $d\nu_s$? Soit $p_{0,s}$ le nombre de cellules vides, $p_{1,s}$ le nombre de celles contenant un quantum, $p_{2,s}$ le nombre de celles en contenant deux, etc. Le nombre de distributions possibles est alors

$$\frac{A_s}{p_{0,s}! p_{1,s}! \dots}$$

où $A_s = (8\pi\nu^2/c^3) d\nu_s$, et où $N_s = 0 \cdot p_{0,s} + 1 \cdot p_{1,s} + 2 \cdot p_{2,s} + \dots$ est le nombre de quanta appartenant à la cellule $d\nu_s$.

On voit donc que le raisonnement suivi par Bose est celui d'une distribution de boules entre des cellules, mais dans son approche les nombres $p_{j,s}$ ne sont pas les nombres d'occupation, qui sont les N_s .

En 1900, quoique ne possédant pas le concept quantique de “mode d’occupation”, Planck a postulé que pour chaque fréquence le rayonnement se distribuait par unités discrètes entre des “résonateurs” hypothétiques, et a suivi, pour calculer l’entropie de ces résonateurs, un raisonnement finalement assez proche de celui que nous présentons ici. On pourra consulter l’article original *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*. *Annalen der Physik*, vol 4, 1901, pages 553 – 563). Pour une traduction française, voir la bibliographie.

Si au lieu de considérer uniquement des états de même énergie, ou d’énergie voisine, on considère l’ensemble de *tous* les états quelle que soit leur énergie, le nombre total de modes d’occupations sera bien sûr le produit

$$N = \prod_i \frac{(n_i + m_i - 1)!}{n_i! (m_i - 1)!} \quad (II.11)$$

Comme les nombres m_i et n_i sont très grands, on ne peut guère tirer de conclusions de ces grosses factorielles, et c’est pourquoi nous allons, comme pour les autres formules de dénombrement, trouver une expression approchée. Le procédé pour cela est toujours le même: d’abord trouver le maximum, et autour du maximum les factorielles peuvent être approchées par une fonction de la forme $\exp(-x^2)$.

Les m_i étant déterminés, considérons une perturbation $n_i + j_i$ des nombres n_i . Le nombre N sera alors changé en

$$N' = \prod_i \frac{(n_i + j_i + m_i - 1)!}{(n_i + j_i)! (m_i - 1)!}$$

Pour comparer N' à N on examinera N'/N . Or pour $j_i > 0$ on peut écrire

$$\begin{aligned} & \frac{(n_i + j_i + m_i - 1)!}{(n_i + j_i)!} \bigg/ \frac{(n_i + m_i - 1)!}{n_i!} = \\ &= \frac{(n_i + m_i)(n_i + m_i + 1) \cdots (n_i + m_i + j_i - 1)}{(n_i + 1)(n_i + 2) \cdots (n_i + j_i)} \\ &= \left[\frac{n_i + m_i}{n_i} \right]^{j_i} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n_i + m_i}\right) \left(1 + \frac{2}{n_i + m_i}\right) \cdots \left(1 + \frac{j_i - 1}{n_i + m_i}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n_i}\right) \left(1 + \frac{2}{n_i}\right) \cdots \left(1 + \frac{j_i}{n_i}\right)} \\ &\simeq \left[\frac{n_i + m_i}{n_i} \right]^{j_i} \exp \left[\frac{j_i^2}{2(n_i + m_i)} - \frac{j_i^2}{2n_i} \right] \\ &= \left[\frac{n_i + m_i}{n_i} \right]^{j_i} \exp \left[-\frac{m_i j_i^2}{2n_i(n_i + m_i)} \right] \end{aligned}$$

Dénombrément

Pour $j_i < 0$, quoique le calcul soit légèrement différent, on obtient la même expression analytique pour l'approximation. En regroupant tout dans le produit :

$$N' = N \prod_i \left[1 + \frac{m_i}{n_i} \right]^{j_i} \exp \left[- \sum_i \frac{m_i j_i^2}{2n_i(n_i + m_i)} \right]$$

Comme nous avons vu au paragraphe précédent pour les coefficients multinômiaux, on peut alors dire que la condition pour que N soit maximum est que le facteur

$$\prod_i \left[1 + \frac{m_i}{n_i} \right]^{j_i}$$

soit stationnaire lorsque les j_i s'écartent de 0. Il est clair que ce facteur *ne peut pas* rester stationnaire si les j_i sont tous indépendants les uns des autres (il faudrait pour cela que les m_i soient tous nuls). Dans le cas des coefficients multinômiaux, pour obtenir (II.7.), nous avons utilisé le fait que la somme des j_i était nulle. Cette condition exprime que le nombre total de particules ne varie pas. Mais une autre condition est possible : que l'énergie totale ne varie pas ; ou même les deux à la fois. Le maximum ne sera pas le même selon la contrainte qui lie les j_i entre eux, et par conséquent on n'obtient pas la même statistique. Par exemple s'il s'agit d'un gaz de photons (rayonnement de corps noir) l'énergie totale du rayonnement se conserve (c'est justement pour cela qu'il est dit "noir"), mais pas le nombre de photons, car pour maintenir l'équilibre thermique avec le corps noir il faut constamment que celui-ci absorbe ou émette des photons. Si par contre il ne s'agit pas de rayonnement, mais d'hélium liquide, les particules de Bose considérées sont alors des noyaux d'*He 4*, dont le nombre total doit se conserver. Ici c'est le cas du rayonnement qui nous intéresse, c'est-à-dire le gaz de photons, où c'est l'énergie totale et non le nombre de particules qui se conserve. Alors la contrainte sur les j_i est $\sum_i \varepsilon_i j_i = 0$; on peut donc exprimer l'un quelconque des j_i en fonction des autres : par exemple

$$j_a = - \frac{1}{\varepsilon_a} \sum_{i \neq a} \varepsilon_i j_i$$

En remplaçant j_a par cette expression dans le facteur qui doit rester stationnaire, on obtient

$$\begin{aligned} \prod_i \left[1 + \frac{m_i}{n_i} \right]^{j_i} &= \left[1 + \frac{m_a}{n_a} \right]^{j_a} \cdot \prod_{i \neq a} \left[1 + \frac{m_i}{n_i} \right]^{j_i} \\ &= \left[1 + \frac{m_a}{n_a} \right]^{-\frac{1}{\varepsilon_a} \sum_{i \neq a} j_i \varepsilon_i} \cdot \prod_{i \neq a} \left[1 + \frac{m_i}{n_i} \right]^{j_i} \end{aligned}$$

$$= \prod_{i \neq a} \left[\frac{1 + \frac{m_i}{n_i}}{\left(1 + \frac{m_a}{n_a}\right)^{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}}} \right]^{j_i}$$

Cette fois les j_i (pour $i \neq a$) sont indépendants, donc la condition pour que ce produit soit stationnaire est que chacun des facteurs soit égal à 1, soit

$$1 + \frac{m_i}{n_i} = \left(1 + \frac{m_a}{n_a}\right)^{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}}$$

Cette égalité devant être vérifiée pour i et a arbitraires, on peut donc dire que

$$K = \left(1 + \frac{m_i}{n_i}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_i}} \quad (II.12.)$$

est indépendant de i ; c'est-à-dire qu'il existe une constante K telle que

$$1 + \frac{m_i}{n_i} = K^{\varepsilon_i}$$

et par conséquent

$$n_i = \frac{m_i}{K^{\varepsilon_i} - 1} \quad (II.13.)$$

Pour les photons, les états quantiques qu'ils peuvent occuper sont caractérisés par la fréquence ν ; l'énergie d'un photon de fréquence ν_i est $\varepsilon_i = h\nu_i$, h étant la constante de Planck. Le nombre m_i est alors le nombre de fréquences propres de rayonnement (dans la cavité) comprises entre ν_i et $\nu_{i+1} = \nu_i + \delta/h$ (en fait le double car pour chaque fréquence propre il y a deux états de polarisation). La condition de *maximum* pour le nombre total N de modes d'occupation est donc que les n_i soient tous égaux à $m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$.

Autour de leurs valeurs optimales correspondant au maximum, les n_i peuvent varier: cela aura pour effet de diminuer la valeur de N ; la diminution de N par rapport à sa valeur maximum N_{\max} est alors donnée par le facteur gaussien

$$N = N_{\max} \exp\left[-\sum_i \frac{m_i j_i^2}{2n_i(n_i + m_i)}\right]$$

Ce facteur gaussien devient infinitésimal lorsque l'exposant dépasse environ 10 (en valeur absolue); cela se produit lorsque les j_i sont en moyenne supérieurs à plusieurs fois la quantité $\sqrt{n_i(1 + (n_i/m_i))}$. En principe les nombres m_i et n_i sont tous les deux grands, mais du même ordre (de l'ordre du nombre d'Avogadro, $\sim 10^{24}$); on peut donc considérer que N reste proche de sa valeur maximum tant que les fluctuations j_i des n_i sont de l'ordre de

Dénombrement

$\sqrt{n_i} \sim 10^{12}$; au delà, N devient très vite infiniment plus petit que sa valeur maximum. Les modes d'occupation pour lesquels les nombres d'occupation n_i diffèrent de la valeur optimale $m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$ de plus que quatre ou cinq fois leur racine carrée sont donc extrêmement peu nombreux.

Or, le hasard pur “choisit” parmi les modes d'occupation, qui sont tous équiprobables. Nous venons de voir que pour la quasi totalité de ces modes d'occupation, les nombres n_i sont, à $j_i \sim \sqrt{n_i}$ près, égaux à $m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$, tandis que les n_i ne s'écartent de cette valeur optimale que pour un nombre incomparablement plus petit de modes d'occupation. Par conséquent le choix du hasard pur sera presque sûrement un mode d'occupation pour lequel les n_i seront à peu près égaux à $m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$. La cause de cela n'est pas que le hasard “préfère” les modes d'occupations pour lesquels $n_i \simeq m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$, mais tout simplement que ces modes d'occupation sont de très loin les plus nombreux.

Même s'il arrivait que *par hasard* un mode d'occupation rare se produise, il ne durerait qu'un temps infinitésimal (10^{-12} seconde ou même bien moins), car l'agitation thermique a pour effet de déloger sans cesse les particules de l'état qu'elles occupent, de sorte que les modes d'occupation changent sans cesse; il est donc logique que ceux qui constituent l'immense majorité soient presque toujours en place.

Le mystérieux paramètre K qui apparaît dans *II.12* et *II.13* doit être lié à la température absolue T du corps noir. En effet, si la température est grande, les hautes fréquences doivent être occupées par davantage de photons, et si elle est nulle, seule la fréquence 0 doit être occupée. Autrement dit, pour $\varepsilon_i > 0$ le dénominateur $K^{\varepsilon_i} - 1$ doit devenir infini lorsque la température est nulle afin que n_i soit nul, donc K doit être infini pour $T = 0$. Inversement, le dénominateur doit être de plus en plus petit pour les grandes valeurs de T , afin que le n_i correspondant soit grand, donc K doit tendre vers 1 quand la température T tend vers l'infini. Dans l'article cité, Planck a obtenu une expression précise de ce paramètre K en comparant *II.13*. à la loi de Wien, qui était connue et vérifiée par l'expérience pour le rayonnement ultra-violet. Celle-ci comportait un facteur $\exp(-\alpha\nu_i/T)$, dans lequel ν est la fréquence du rayonnement (pour nous, les photons), T la température absolue en Kelvin, et α une constante empirique.

Cette loi de Wien n'était valable que pour les grandes fréquences. Comparée à celle de Planck, elle correspond au cas où on peut négliger le terme -1 dans le dénominateur de *II.13*. Planck soupçonnait que la loi de Wien devait être une version asymptotique de la véritable loi qu'il était en train de chercher; les raisonnements probabilistes de la Physique statistique laissent les paramètres tels que les nombres m_i indéterminés, car on ne peut

pas mesurer directement leur valeur. Il fallait donc rattacher la loi obtenue II.13 à des grandeurs mesurables expérimentalement, or justement la loi de Wien, quoique obtenue au départ par des arguments théoriques, était une loi empirique : étant de forme exponentielle, il suffisait de reporter sur une échelle logarithmique les valeurs mesurées de l'intensité du rayonnement dans chaque intervalle de fréquence, qui se répartissaient alors le long d'une droite. Partant donc de cette idée que le facteur $1/(K^\varepsilon - 1)$ dans II.13 doit être asymptotiquement équivalent au facteur $\exp(-\alpha\nu/T)$ de la loi de Wien, on obtient

$$K^{-\varepsilon_i} = e^{-\frac{\alpha\nu}{T}}$$

Pour que l'identification ait un sens physique, il faut que l'argument dans l'exponentielle soit sans dimension ; or ε_i ayant la dimension d'une énergie, Planck a choisi de prendre $K = \exp(1/kT)$ et $\varepsilon_i = k\alpha\nu_i$ où k est la constante de Boltzmann ($\simeq 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/deg). C'est la constante $h = k\alpha \simeq 6.55 \cdot 10^{-27}$ erg · sec qui a pris le nom de *constante de Planck*, et la relation $\varepsilon_i = h\nu_i$, déduite par identification à la loi empirique de Wien, est à l'origine de la Mécanique quantique.

En conclusion, pour un rayonnement *de corps noir*, c'est-à-dire un rayonnement emprisonné dans une cavité et en équilibre thermique avec la matière formant les parois de la cavité, le nombre n_i de photons dont la fréquence est comprise entre ν_i et ν_{i+1} est égal à

$$\frac{m_i}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - 1}$$

où T est la température qui règne dans la cavité et h la constante de Planck. L'étude purement électromagnétique des fréquences propres de la cavité montre que le nombre d'états m_i correspondant à un intervalle de fréquences $[\nu_i, \nu_{i+1}[$ de largeur $\eta = \delta/h$ est proportionnel à $\nu_i^2\eta$ ⁽¹⁾ ; de plus, un photon de fréquence ν porte une énergie $h\nu$; on aboutit ainsi à la *loi de Planck* : l'intensité (l'énergie) de la part de rayonnement dont la fréquence est comprise entre ν_i et ν_{i+1} est proportionnelle à

$$\frac{h\nu_i^3\eta}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - 1} \tag{II.14.}$$

Il faut bien comprendre que cette loi est due *uniquement* à l'action du hasard qui choisit, des milliards de milliards de fois par seconde, des modes d'occupation parmi l'ensemble de tous les modes d'occupation possibles,

⁽¹⁾ voir *Quantique* par Levy-Leblond et Balibar, page 453.

Dénombrement

sans en favoriser aucun. La loi de Planck est vérifiée, non parce que les photons lui “obéissent”, mais parce que les photons n’obéissent à rien.

III. DEUX APPLICATIONS CLASSIQUES : les marches aléatoires et les lois de l'hérédité.

Une marche aléatoire à une dimension est le mouvement d'un point matériel qui fait des pas vers l'avant ou vers l'arrière sur un axe, chacune de ces deux possibilités étant choisie au hasard. On peut désigner par t_0, t_1, t_2, \dots les instants successifs où ces pas sont effectués, et par $\varepsilon_0 = t_1 - t_0, \varepsilon_1 = t_2 - t_1, \varepsilon_2 = t_3 - t_2, \dots$ les intervalles de temps entre deux pas successifs. Alors x_0, x_1, x_2, \dots seront les abscisses successives du point ; les amplitudes de chaque pas seront $\alpha_0 = x_1 - x_0, \alpha_1 = x_2 - x_1, \alpha_2 = x_3 - x_2, \dots$. On ne se préoccupera pas de la cinématique intérieure aux intervalles (en fait on fera comme si la vitesse entre deux pas consécutifs était constante).

À chaque pas, le sens (avant ou arrière) peut être choisi par un tirage à pile ou face, par un algorithme de nombres au hasard (par exemple la fonction **random** des langages de programmation usuels), par des collisions avec les molécules d'un liquide, ou tout autre procédé.

Nous allons étudier les marches aléatoires *uniformes*, pour lesquelles les ε_j et les valeurs absolues des α_j sont toutes égales : $\varepsilon_j = \varepsilon$ et $\alpha_j = \pm\alpha$. L'étude des marches aléatoires non uniformes n'est pas plus difficile dans le principe, mais les calculs à faire sont alourdis par la variation des ε_j et α_j : ces deux paramètres deviennent des *variables aléatoires* (voir chapitre **VI**). L'étudiant qui a compris le cas uniforme et assimilé le chapitre **VI** sur les variables aléatoires saura traiter lui-même le cas non uniforme (en fait les propriétés sont les mêmes).

Nous ne donnons ici que des rudiments sur les marches aléatoires, en traitant au moins par exemple les marches uniformes à une dimension. Les cas les plus intéressants de marches aléatoires sont en dimension deux ou trois, et non uniformes. Alors, à chaque pas, au lieu de *deux* choix possibles pour le sens, il y a toutes les directions possibles : cela correspond à une distribution de probabilité sur le cercle en dimension deux, sur la sphère en dimension trois (une telle distribution pouvant bien sûr être discrétisée), avec en outre une distribution de probabilité pour la longueur du pas. Une étude des marches aléatoires de dimensions supérieures à un est mathématiquement assez pénible mais semblable dans son principe au cas de la dimension 1.

Marches aléatoires et lois de l'hérédité

Une marche aléatoire en dimension trois est un modèle mathématique pour le mouvement brownien. Mais beaucoup de propriétés du mouvement brownien se voient déjà sur les marches aléatoires uniformes de dimension un, d'où l'intérêt scolaire d'une telle étude.

Il faut ajouter à cela que les marches aléatoires, surtout en dimension 1, peuvent aussi servir de modèle à des problèmes de probabilités très simples, tels que la partie de *pile ou face*. Le principal avantage de la modélisation par marche aléatoire est la possibilité de raisonner géométriquement : on peut alors utiliser toutes les ressources de la géométrie euclidienne (voir **III. 3** le principe de symétrie de Désiré André).

Un domaine d'application important et significatif du Calcul des probabilités est aussi la génétique. Depuis qu'on connaît les mécanismes moléculaires de l'hérédité on a pu en expliquer certaines lois empiriques par le Calcul des probabilités. Cela résulte de ce que ces mécanismes moléculaires sont des combinaisons de gènes obéissant à une causalité spatio-temporelle, et sont par conséquent soumis, comme les boules qu'on dispose dans des boîtes, aux différentes règles de dénombrement du chapitre **II**. Nous en donnerons un bref aperçu en présentant deux exemples simples et célèbres de lois de la génétique, celles de Mendel (section **III.5**) et de Hardy-Weinberg (section **III.6**). On verra que le Calcul des probabilités joue un rôle capital en génétique, car c'est lui qui en fait une science exacte (quantitative).

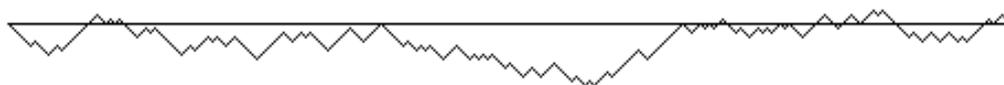
Le contenu de ce chapitre ne prétend à aucune originalité : on pourra en trouver un exposé pratiquement identique dans d'autres ouvrages, notamment celui de William Feller. Mais les applications traitées ici sont tellement typiques que nous les utiliserons fréquemment dans la suite comme exemples pour rendre plus concrète l'introduction de tel ou tel nouveau concept. Il serait gênant pour la cohérence du présent ouvrage de renvoyer à chaque fois le lecteur à d'autres sources.

III. 1. Graphe d'une marche aléatoire.

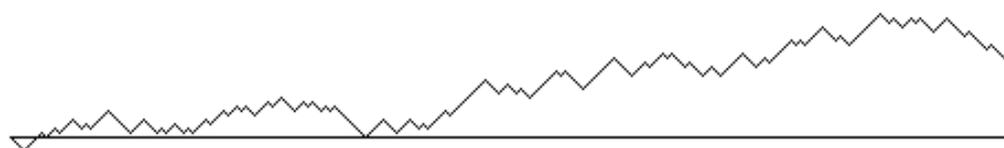
On suppose donc à partir de maintenant que les marches aléatoires sont toujours uniformes. Une marche aléatoire étant avant tout un *mouvement*, on peut représenter l'évolution du point matériel sur un graphique, avec le temps en abscisse et la position sur l'axe en ordonnée. Chaque instant $t_j = j\varepsilon$ peut correspondre à un changement du sens de parcours, ce qui sur un tel graphique se traduit par un changement de pente (voir figures pages suivantes). Dans le graphique on fait comme si la vitesse entre deux changements de direction consécutifs était constante, quoique ce détail soit



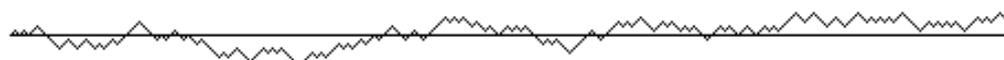
6.1.



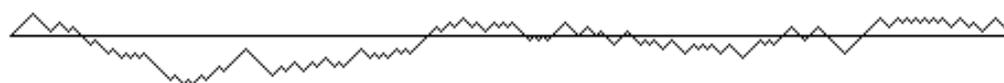
6.2.



6.3.



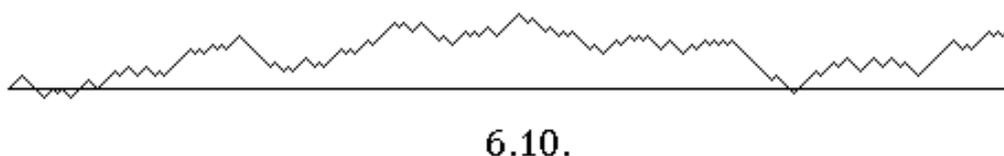
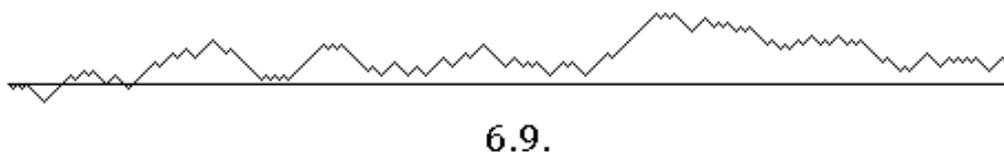
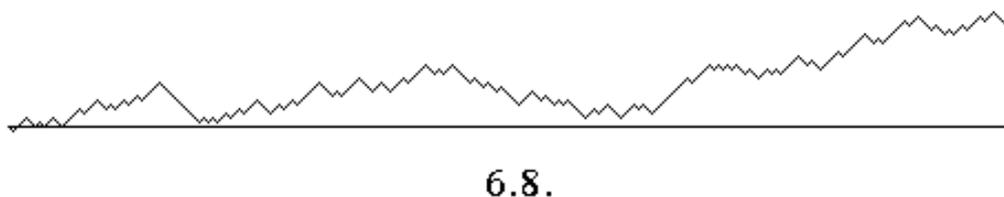
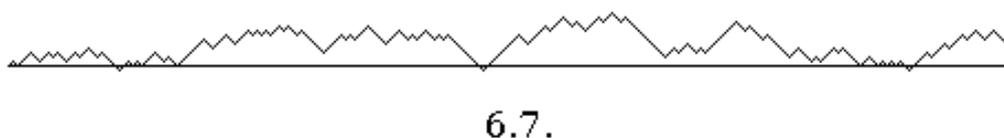
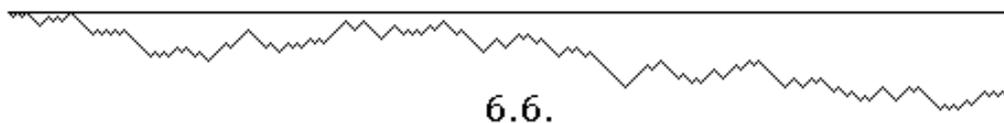
6.4.



6.5.

insignifiant ; par ailleurs, on choisit les unités sur les axes t et x de sorte que la vitesse soit toujours 1 en valeur absolue.

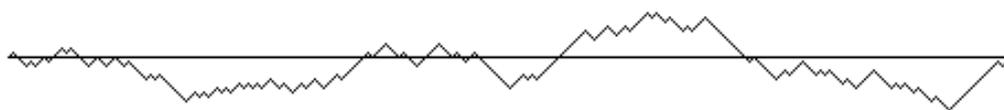
L'espace des épreuves pour une marche aléatoire à n pas est l'ensemble de *tous* les mouvements possibles ; mais chaque mouvement possible est déterminé par la liste des n choix de sens : on peut le représenter par une liste de n signes $+$ ou $-$. L'espace des épreuves Ω est donc isomorphe à celui des parties de pile ou face à n lancers, en particulier son cardinal est 2^n : il y a 2^n marches aléatoires différentes à n pas, qui correspondent à 2^n graphes différents, ou à 2^n suites différentes de $+$ et de $-$. Le hasard pur se traduit



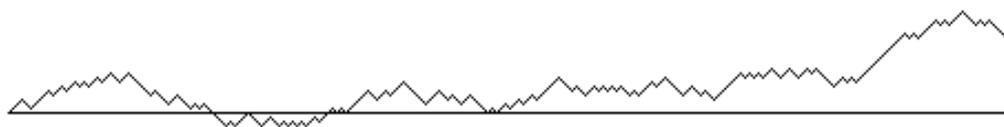
ici par le fait que toutes les marches possibles sont équiprobables.

Cette représentation géométrique sous forme de graphes est bien sûr *logiquement* équivalente à la représentation sous forme de suites formées de + et de -, mais le fait qu'elle soit géométrique permet de poser des problèmes de suites sous une forme imagée qui, comme nous le verrons, peut fournir des méthodes astucieuses de résolution.

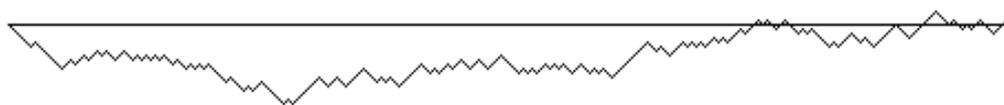
Ainsi une question qui se formule très aisément dans le langage géométrique est "quelle est la probabilité pour qu'une marche aléatoire partie de



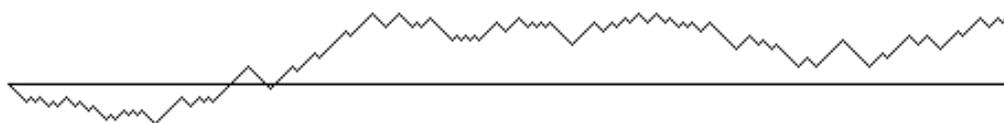
6.11.



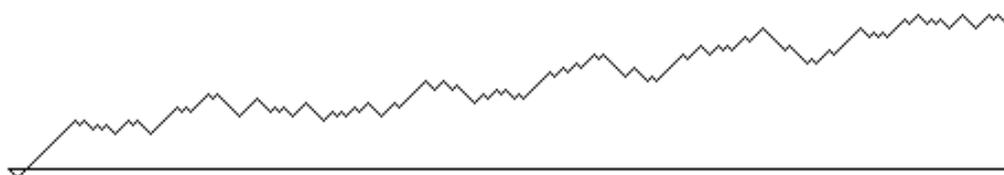
6.12.



6.13.

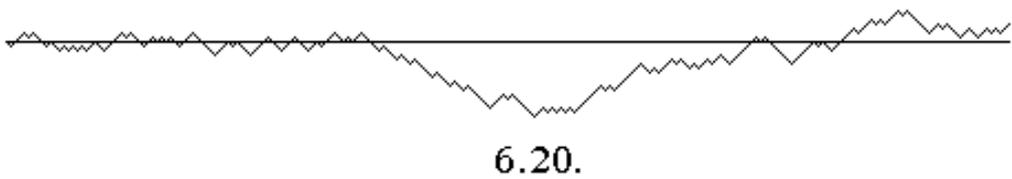
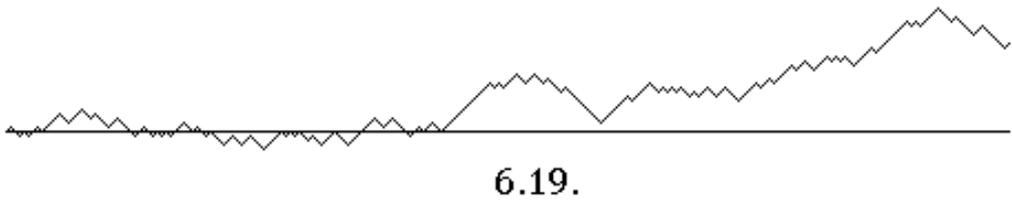
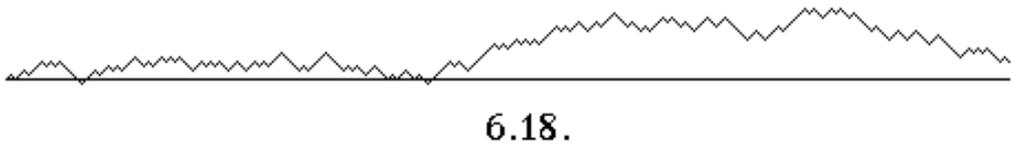
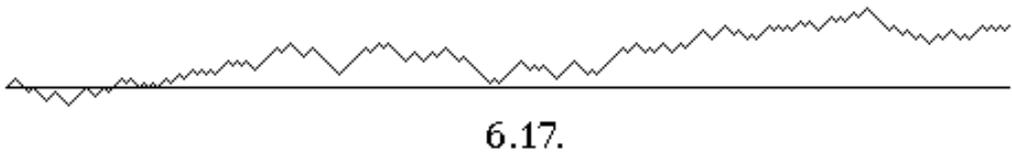
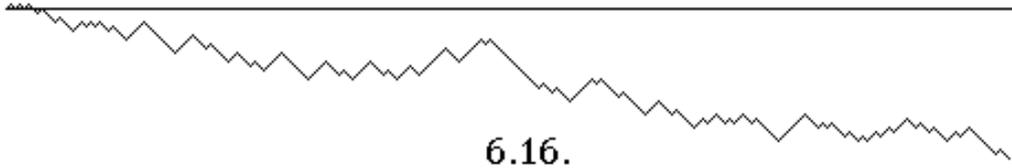


6.14.



6.15.

0 à l'instant 0 aboutisse à x à l'instant n ". Essayez donc de formuler la question équivalente dans le langage des suites de + et de -. Pourtant, si on *pose* mieux la question dans le langage géométrique, on la *résoud* mieux en considérant les suites. En effet, si une suite est faite de p signes + et de q signes - (avec évidemment $p+q = n$), la marche correspondante parviendra à l'ordonnée $x = p - q$. Cette valeur ne dépend pas de l'ordre des + et des -, mais seulement de leur nombre. Autrement dit, toutes les marches qui ont effectué p pas en avant et q pas en arrière aboutissent au même point x . Leur nombre est le nombre de manières différentes de placer p signes +



et q signes $-$, soit $n!/p!q!$ (chapitre **II**, section **3**). Si on veut calculer p et q en fonction de x , il suffit de résoudre le système

$$\begin{aligned} p + q &= n \\ p - q &= x \end{aligned}$$

si n et x ont la même parité, cela donne $p = \frac{1}{2}(n+x)$, $q = \frac{1}{2}(n-x)$ (si n et x n'ont pas la même parité il n'y a aucune solution). Ainsi l'événement A : "la marche, partie de 0 à l'instant 0 aboutit à x à l'instant n " est de cardinal $n!/p!q!$ avec $p = \frac{1}{2}(n+x)$, $q = \frac{1}{2}(n-x)$ si n et x ont la même parité, et de

cardinal 0 si n et x n'ont pas la même parité. D'où la probabilité :

$$\mathcal{P}(A) = \begin{cases} 2^{-n} \frac{n!}{p!q!} & \text{si } n \text{ et } x \text{ ont même parité} \\ 0 & \text{si } n \text{ et } x \text{ ont des parités différentes.} \end{cases}$$

III. 2. Le problème du retour à zéro d'une marche aléatoire.

Dans le paragraphe précédent nous avons cherché la probabilité pour qu'une marche de n pas aboutisse (au n^e , c'est-à-dire au *dernier* pas) au point d'ordonnée x . Pour $m < n$ on peut aussi chercher la probabilité pour qu'une marche (toujours de n pas) passe en un point donné x au m^e pas : soit donc $A_{m,x}$ l'événement : "la marche passe au point x au m^e pas". Ce qui a été vu au paragraphe précédent s'applique également. Pour une marche appartenant à $A_{m,x}$ il faut que parmi les m premiers pas il y ait p pas en avant et q pas en arrière avec $p+q = m$ et $p-q = x$; par contre ce qui arrive après le m^e pas est indifférent. Il y a donc (du moins si m et x sont de même parité) $m!/p!q!$ possibilités avec les m premiers pas et 2^{n-m} possibilités pour les pas suivants (de $m+1$ à n) de sorte que $\#A_{m,x} = 2^{n-m} \binom{m}{p}$ avec $p = \frac{1}{2}(m+x)$ si x a la même parité que m , et 0 sinon. On voit qu'on obtient pour la probabilité

$$\mathcal{P}(A_{m,x}) = \frac{\#A_{m,x}}{\#\Omega} = \frac{2^{n-m} \binom{m}{p}}{2^n} = 2^{-m} \binom{m}{p}$$

c'est-à-dire la même chose que si l'espace des épreuves Ω avait été l'ensemble de toutes les marches à m pas au lieu d'être l'ensemble de toutes les marches à n pas. On voit que le résultat ne dépend pas de la modélisation choisie. Si donc on s'intéresse à ce qui se produit à l'instant m , ou avant, mais que ce qui arrive après est indifférent, il est inutile de considérer des marches ayant plus de m pas.

Un cas particulier intéressant est celui où $x = 0$. Si l'événement $A_{m,0}$ correspondant se produit, on dira aussi : "il y a un retour à zéro à l'instant m ". Cet événement est vide si m est impair, et de probabilité $2^{-2\ell} \binom{2\ell}{\ell}$ si $m = 2\ell$. Ce résultat se déduit par une application immédiate de (II.5.)

Pour les retours à zéro il se pose cependant un autre problème, celui du *premier* retour à zéro. La question est cette fois de trouver la probabilité pour qu'à l'instant $m = 2\ell$ la marche soit revenue à zéro, *et qu'en outre* il n'y ait eu aucun autre retour à zéro avant. Il est clair que la probabilité pour qu'à l'instant m se produise *le premier* retour à zéro est inférieure à la probabilité pour qu'à l'instant m se produise *un* retour à zéro. Mais quelle est sa valeur exacte ? C'est ce que nous nous proposons de calculer

Marches aléatoires et lois de l'hérédité

maintenant. On voit que pour tous ces problèmes (retour à zéro ou premier retour à zéro à l'instant m) il est inutile de considérer ce qui se passe après l'instant m , et donc nous prenons pour Ω l'ensemble des marches de m pas, qui contient 2^m éléments.

L'événement "à l'instant m se produit un retour à 0" étant vide si m est impair nous posons $m = 2\ell$; les marches appartenant à cet événement ont en commun que $x_0 = 0$ et $x_{2\ell} = 0$. Par contre les marches appartenant à l'événement P_ℓ : "à l'instant 2ℓ se produit le *premier* retour à 0" vérifient en outre $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, \dots, x_{2\ell-1} \neq 0$. On ne peut dénombrer P_ℓ par application immédiate d'une formule du chapitre *II*. Ce type de problème est plus délicat, mais nous allons voir qu'en exploitant la géométrie on peut trouver des méthodes efficaces; en effet, le grand avantage des marches aléatoires est leur sens géométrique: les graphes se situent dans le plan euclidien et par conséquent toute la géométrie euclidienne peut être mise à profit. Or beaucoup de problèmes de probabilités qui au départ n'ont rien à voir avec la géométrie peuvent se modéliser en termes de marches aléatoires: par exemple un jeu de pile ou face avec mises entre deux joueurs P et F , où P reçoit 1 Euro de F chaque fois que sort *pile*, tandis que P donne 1 Euro à F chaque fois que sort *face*. Une marche aléatoire est en effet caractérisée de façon biunivoque par la suite des signes $+$ et $-$ de chacun de ses pas. Si donc on traduit $+$ par *pile* et $-$ par *face* on voit qu'il y a une correspondance bijective entre l'ensemble de toutes les marches possibles et l'ensemble de toutes les parties de pile ou face possibles. L'ordonnée x_j est alors le gain de P à l'instant j . L'événement P_ℓ signifie dans ce cas que le gain de P est resté constamment positif de l'instant 1 jusqu'à l'instant $2\ell - 1$.

Une première étape pour le dénombrement de P_ℓ fait déjà appel à la géométrie: elle consiste à remarquer que par symétrie, à tout graphe tel que $x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_{2\ell-1} > 0$ correspond bijectivement un graphe tel que $x_0 = 0, x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 < 0, \dots, x_{2\ell-1} < 0$ (figure 7). Mais d'autre part un graphe tel que $x_0 = 0, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, \dots, x_{2\ell-1} \neq 0$ ne peut être que de l'un ou l'autre des deux types précédents, en vertu du fait bien connu qu'on ne peut passer du négatif au positif (ou vice-versa) sans passer par 0 (on pourrait passer par exemple de $-\alpha$ à $+\alpha$ avec un pas égal à 2α , mais la marche aléatoire ne fait que des pas égaux à $\pm\alpha$). Par conséquent l'événement $P_{2\ell}$: $x_0 = 0, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, \dots, x_{2\ell-1} \neq 0, x_{2\ell} = 0$ doit contenir exactement *deux* fois le nombre d'éléments de $P_{2\ell}^{(+)}$: $x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_{2\ell-1} > 0, x_{2\ell} = 0$ ou de $P_{2\ell}^{(-)}$: $x_0 = 0, x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 < 0, \dots, x_{2\ell-1} < 0, x_{2\ell} = 0$.

III. 3. Le principe de symétrie de Désiré André.

Cette utilisation des symétries géométriques pour le dénombrement est attribuée historiquement à Désiré André (1887). Elle consiste à établir des correspondances biunivoques entre événements par symétrie ou translation dans le plan (ou dans l'espace). Pour cela il faut bien sûr avoir trouvé auparavant une modélisation géométrique du problème.

Nous allons appliquer une seconde fois ce principe pour calculer le cardinal de $P_{2\ell}^{(+)}$ (et par voie de conséquence, celui de $P_{2\ell}$). On remarquera tout d'abord qu'une marche appartenant à $P_{2\ell}^{(+)}$ vérifie nécessairement $x_{2\ell-1} = +1$ et $x_{2\ell-2} = +2$; en effet on ne peut arriver à $x_{2\ell} = 0$ que par $x_{2\ell-1} = +1$ ou $x_{2\ell-1} = -1$, la seconde possibilité étant exclue dans $P_{2\ell}^{(+)}$. De même, on ne peut arriver à $x_{2\ell-1} = +1$ que par $x_{2\ell-2} = +2$ ou $x_{2\ell-2} = 0$, la seconde possibilité étant elle aussi exclue dans $P_{2\ell}^{(+)}$. Le nombre de marches vérifiant $x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_{2\ell-1} > 0, x_{2\ell} = 0$ est donc égal au nombre de marches vérifiant $x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_{2\ell-3} > 0, x_{2\ell-2} = 2$.

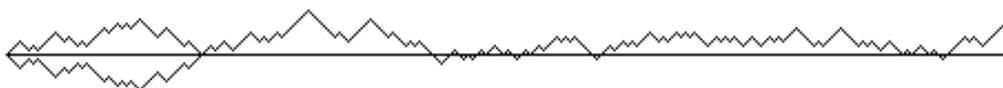


figure 7

Ainsi nous sommes ramenés à dénombrer l'événement $C_{2\ell-2}^2$: $x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_{2\ell-3} > 0, x_{2\ell-2} = 2$. Appelons plus généralement pour n et r quelconques C_{2n}^{2r} l'événement $x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_{2n-1} > 0, x_{2n} = 2r$. C_{2n}^{2r} est ainsi l'ensemble des marches aléatoires issues de 0 à l'instant 0 et aboutissant à $2r$ à l'instant $2n$, et qui restent constamment positives. Or une marche aléatoire issue de 0 à l'instant 0 et aboutissant à $2r$ (avec $2r > 0$) à l'instant $2n$ est ou bien toujours positive, ou bien peut s'annuler au moins une fois entre 0 et $2n$ (ce *ou bien* étant exclusif). C'est pourquoi nous allons considérer les marches aléatoires telles que $x_0 = 0, x_1 = +1, x_{2n} = 2r$ et les décomposer en deux parties disjointes, celles qui restent constamment positives, et celles qui repassent par 0 entre les instants 1 et $2n$.

Marches aléatoires et lois de l'hérédité

Introduisons donc les événements :

$$A_{2n}^{2r} : x_0 = 0, x_1 = +1, \text{ et } x_{2n} = 2r ;$$

$$B_{2n}^{2r} : x_0 = 0, x_1 = +1, x_{2n} = 2r \text{ et il existe un } j, 1 < j < 2n, \text{ tel que } x_j = 0 ;$$

$$D_{2n}^{2r} : x_0 = 0, x_1 = -1, \text{ et } x_{2n} = 2r ;$$

$$E_{2n}^{2r} : x_0 = 0, x_{2n} = 2r .$$

L'événement A_{2n}^{2r} est donc l'ensemble de toutes les marches telles que $x_0 = 0, x_1 = +1, x_{2n} = 2r$, positives ou non ; B_{2n}^{2r} est le sous-ensemble de A_{2n}^{2r} des marches qui repassent par 0, et, rappelons-le, C_{2n}^{2r} le sous-ensemble des marches toujours positives ; de sorte que $A_{2n}^{2r} = B_{2n}^{2r} \cup C_{2n}^{2r}$, réunion de deux ensembles disjoints, d'où

$$\#A_{2n}^{2r} = \#B_{2n}^{2r} + \#C_{2n}^{2r}$$

Mais comme le montre la figure 7, on peut associer de manière biunivoque à tout graphe de B_{2n}^{2r} un graphe de D_{2n}^{2r} , en vertu de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses : pour n'importe quelle marche appartenant à B_{2n}^{2r} , on prend la branche positive entre l'instant 0 et celui du premier retour à zéro (qui a forcément lieu puisqu'on est dans B_{2n}^{2r}), et on la remplace par sa symétrique, en laissant intact ce qui arrive après le premier retour à zéro.

Par conséquent :

$$\#B_{2n}^{2r} = \#D_{2n}^{2r}$$

(ceci constitue le principe de symétrie de Désiré André).

On en déduit alors un moyen de calculer $\#C_{2n}^{2r} = \#A_{2n}^{2r} - \#D_{2n}^{2r}$: en effet les cardinaux de A_{2n}^{2r} et D_{2n}^{2r} peuvent, eux (contrairement à celui de C_{2n}^{2r}), être calculés par application immédiate de (II.5.) : A_{2n}^{2r} équivaut à l'ensemble de toutes les marches issues de +1 à l'instant 1 et aboutissant à $2r$ à l'instant $2n$, qui doivent donc faire p pas en avant et q pas en arrière avec $p+q = 2n-1$ et $p-q = 2r-1$, il y en a $(2n-1)!/(n+r-1)!(n-r)!$; C_{2n}^{2r} équivaut à l'ensemble de toutes les marches issues de -1 à l'instant 1 et aboutissant à $2r$ à l'instant $2n$, qui doivent donc faire p pas en avant et q pas en arrière avec $p+q = 2n-1$ et $p-q = 2r+1$, il y en a $(2n-1)!/(n+r)!(n-r-1)!$ D'où

$$\begin{aligned} \#C_{2n}^{2r} &= \#A_{2n}^{2r} - \#D_{2n}^{2r} \\ &= \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \\ &= \frac{(2n-1)!}{(n+r-1)!(n-r)!} - \frac{(2n-1)!}{(n+r)!(n-r-1)!} \quad (III.1.) \end{aligned}$$

J. Harthong: probabilités et statistique

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2n-1)!}{(n+r)!(n-r)!} \cdot 2r \\
 &= \frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!} \cdot \frac{r}{n}
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à voir que dans le cas particulier qui nous intéresse ($r = 1$ et $2n = 2\ell - 2$) on a $\#C_{2\ell-2}^2 = ((2n)!/n!) \cdot (1/2(2n-1))$. D'après ce qui avait été dit plus haut l'événement $P_{2\ell}$ a un cardinal exactement double, de sorte que la probabilité que le *premier* retour se produise à l'instant 2ℓ est

$$\mathcal{P}(P_{2\ell}) = 2^{-2\ell} \frac{(2\ell)!}{\ell!^2} \frac{1}{2\ell-1} \tag{III.2.}$$

On voit qu'elle est $2\ell - 1$ fois plus petite que la probabilité pour qu'il y ait un retour à zéro (non nécessairement le premier) à l'instant 2ℓ .

III. 4. La loi du dernier retour.

Un autre problème qui mérite une étude est le suivant : considérons une marche aléatoire de $2n$ pas⁽¹⁾. Quelle est la probabilité pour que le précédent retour à zéro ait eu lieu à l'instant $2k$? (c'est-à-dire que la marche soit passée par zéro à l'instant $2k$ mais plus jamais ensuite entre $2k$ et $2n$).

Peut-être cette façon de formuler le problème n'est-elle pas assez concrète. Alors imaginons les choses ainsi : supposons qu'on reproduise des milliards de fois une marche aléatoire (par exemple un ordinateur dessine des milliards de graphes du type de la figure 6 à partir d'un programme qui appelle la fonction **random**). Pour chacun de ces graphes on note le dernier instant avant la fin où le graphe est passé par zéro, c'est-à-dire l'instant du dernier retour. Comment se répartissent ces instants ? Il se trouve que leur répartition est inattendue : il est fortement probable que ce dernier retour ait eu lieu à un instant soit tout récent (c'est-à-dire proche de $2n$), soit très ancien (c'est-à-dire proche de 0), et faiblement probable qu'il ait eu lieu à mi-chemin. Pour donner une idée plus quantitative, on peut dire que la probabilité pour que le dernier retour ait eu lieu pendant le premier dixième de la durée totale du parcours est $\frac{1}{5}$, la probabilité pour qu'il ait eu lieu pendant le dernier dixième est aussi $\frac{1}{5}$, et la probabilité pour qu'il ait eu lieu pendant les huit dixièmes intermédiaires est $\frac{3}{5}$.

Avec cette répartition des probabilités on doit s'attendre à ce que pour un échantillon de graphes pris au hasard, un nombre important d'entre eux

⁽¹⁾ Dans le cas impair $2n - 1$ le calcul est un peu différent mais de façon absolument inessentielle ; c'est pourquoi on peut le laisser de côté.

Marches aléatoires et lois de l'hérédité

aient fluctué tout au début autour de zéro, pour ensuite rester toujours loin de l'axe ; par exemple d'après les chiffres ci-dessus une marche sur cinq environ devrait fluctuer autour de zéro pendant le premier dixième de son parcours, puis demeurer constamment positive ou constamment négative sur les neuf dixièmes restants : un coup d'oeil à la figure 6 montre que tel est bien le cas (il n'y a eu aucun trucage). Une marche sur *dix* devrait ne fluctuer autour de zéro que sur le premier *cinquantième* de son parcours. Ces longs séjours de la marche aléatoire loin de 0 ne sont donc pas l'effet d'une cause inconnue qui favoriserait de tels écarts (par exemple si la fonction **random** du logiciel de calcul était incorrecte), mais bien celui du *pur hasard*.

Pour poser mathématiquement le problème, écrivons l'événement A_k qui, en tant que sous-ensemble de l'ensemble de toutes les marches possibles, exprime le fait que le dernier retour en 0 a eu lieu à l'instant $2k$. Une marche appartenant à A_k vérifie donc $x_0 = 0$ et $x_{2k} = 0$, mais aucune condition n'est requise pour les x_j avec $0 < j < 2k$. Pour une marche aléatoire allant de zéro à $2n$ il y a donc $\binom{2k}{k}$ possibilités différentes pour la partie ayant lieu entre 0 et $2k$. En ce qui concerne la partie entre $2k$ et $2n$, on commencera par remarquer que l'on doit avoir $x_{2k+1} \neq 0, x_{2k+2} \neq 0, x_{2k+3} \neq 0, \dots, x_{2n-1} \neq 0$, et aussi, si on suppose qu'il n'y a pas retour à zéro à l'instant $2n$ lui-même (car alors on aurait $k = n$), $x_{2n} \neq 0$. À cause de l'invariance par translation, il y a exactement autant de possibilités pour cette partie de la marche située entre $2k$ et $2n$ que pour une marche de $2n - 2k$ pas vérifiant $x_0 = 0, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, \dots, x_{2n-2k-1} \neq 0, x_{2n-2k} \neq 0$. L'ensemble de toutes les possibilités pour les $2n$ pas est alors le *produit* du nombre de possibilités pour les $2k$ premiers pas par le nombre de possibilités pour les $2n - 2k$ pas suivants, puisque à chaque possibilité pour les $2k$ premiers pas on peut ajouter n'importe laquelle des possibilités pour les pas suivants⁽²⁾.

Le problème est donc réduit à dénombrer les marches telles que $x_0 = 0, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, \dots, x_{2m-1} \neq 0, x_{2m} \neq 0$ pour m quelconque, après quoi on prendra $m = n - k$. Par symétrie leur nombre est exactement le double de celles qui vérifient $x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_{2m-1} > 0, x_{2m} > 0$. Or une marche qui vérifie ces conditions appartient à un et un seul des événements A_m^r : $x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_{2m-1} > 0, x_{2m} = 2r$ avec $r = 1, 2, 3, \dots, m$. Leur nombre est donc $\sum_{r=1}^{r=m} \#A_m^r$.

Enfin, pour calculer chacun des $\#A_m^r$, on utilise le principe de symétrie de Désiré André ; il suffit en effet de réutiliser (III.1.) qui nous dit que

$$\#A_m^r = \binom{2m-1}{m+r-1} - \binom{2m-1}{m+r}$$

⁽²⁾ Cette propriété est en fait l'indépendance stochastique, cf. chapitre IV.

On doit sommer cela de $r = 1$ à $r = m$, ce qui fait que les termes s'annulent mutuellement :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{r=m} \#A_m^r &= \binom{2m-1}{m} - \binom{2m-1}{m+1} + \binom{2m-1}{m+1} - \binom{2m-1}{m+2} + \\ &+ \binom{2m-1}{m+2} - \binom{2m-1}{m+3} + \binom{2m-1}{m+3} - \dots \\ &= \binom{2m-1}{m} = \frac{1}{2} \binom{2m}{m} \end{aligned}$$

Le nombre de toutes les marches de $2m$ pas ne revenant jamais à zéro est donc le double, soit $\binom{2m}{m}$; enfin, le nombre de marches de $2n$ pas, revenant à zéro à l'instant $2k$ et n'y revenant plus entre $2k+1$ et $2n$ inclus est alors (comme nous l'avions déjà dit plus haut) le produit $\binom{2k}{k} \times \binom{2(n-k)}{n-k}$.

De sorte que la probabilité pour que le dernier retour avant l'instant $2n$ se soit produit à l'instant $2k$ est (l'approximation vient de II.7) :

$$2^{-2n} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \binom{2(n-k)}{n-k} \simeq \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}}$$

Si on cherche par exemple la probabilité pour que le dernier retour ait eu lieu *avant* l'instant 2ℓ , il suffit de faire la somme de ces valeurs pour k allant de 1 à ℓ (le dernier retour ne peut avoir lieu à deux instants différents à la fois, donc les événements correspondants sont disjoints et les probabilités s'additionnent). Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{dernier retour avant } 2\ell) &= \sum_{k=1}^{k=\ell} 2^{-2n} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \binom{2(n-k)}{n-k} \\ &\simeq \sum_{k=1}^{k=\ell} \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}} \end{aligned}$$

Cette somme discrète peut être interprétée comme la somme de Riemann de l'intégrale $\int_0^x [1/\pi \sqrt{t(1-t)}] dt$ avec $x = \ell/n$. Or cette intégrale peut être calculée par primitives, elle est égale à $\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$, de sorte que finalement

$$\mathcal{P}(\text{dernier retour avant } 2\ell) \simeq \frac{2}{\pi} \arcsin \left\{ \sqrt{\frac{\ell}{n}} \right\} \quad (III.3.)$$

Les estimations données au début du paragraphe ont été tirées de cette approximation. Bien sûr il faut être dans le domaine de validité de cette approximation : elle est en principe incorrecte si ℓ ou $n - \ell$ est trop petit,

mais elle donne déjà un résultat correct à 4% près pour k ou $n - k$ supérieur à 3, et à 1% près pour k ou $n - k$ supérieur à 10.

III. 5. Loi de l'hérédité de Mendel

La loi de Mendel concerne la transmission de caractères par l'hérédité. On appelle *phénotypes* ces caractères. Un exemple de phénotype (étudié par Mendel) est la forme, lisse ou ridée, des grains de petits pois. D'autres phénotypes connus sont les groupes sanguins, le facteur Rhésus, la couleur des yeux ou de certaines fleurs, le type albinos, des maladies génétiques telles que la mucoviscidose. Considérons l'expérience suivante, qu'on peut effectuer par exemple sur le *mirabilis*, une plante africaine dont les fleurs s'ouvrent la nuit (appelée pour cela "belle de nuit") : on a sélectionné sur un grand nombre de générations deux variétés de *mirabilis* : l'une à fleurs rouges, l'autre à fleurs blanches. Tout croisement entre deux fleurs rouges donne un descendant à fleurs rouges et tout croisement entre deux fleurs blanches donne un descendant à fleurs blanches. On effectue alors des croisements entre une fleur rouge et une fleur blanche, qui donnent toujours des descendants à fleurs roses. Puis on effectue à nouveau des croisements entre deux de ces descendants à fleurs roses, et on observe parfois une fleur rouge, parfois une blanche, parfois une rose. Si on renouvelle un grand nombre de fois les croisements de fleurs roses, afin de disposer d'un échantillon statistiquement significatif, on observe qu'on obtient une fois sur quatre une fleur rouge, une fois sur quatre une blanche, et une fois sur deux une fleur rose. Ces expériences avaient été effectuées par Gregor Mendel au milieu du *XIX*^e siècle sur des souches de petits pois (pois ridés et pois lisses).

Les conclusions que Gregor Mendel a tirées de ces expériences sont les suivantes. Le premier croisement entre une fleur rouge et une fleur blanche, qui donne une fleur rose, pourrait s'expliquer par le mélange de deux substances. Mais le second croisement, où l'on peut retrouver une fois sur deux une couleur pure, montre que le mélange n'a pas réellement eu lieu, et que les éléments matériels qui ont servi de vecteur aux caractères héréditaires ont dû se transmettre sous forme pure jusqu'à la génération suivante. Gregor Mendel a déduit de ses expériences en 1865 que ces éléments d'hérédité restaient séparés : les différents phénotypes résultaient bien de leur combinaison, mais les éléments devaient se combiner en conservant leur intégrité au cours des générations. La biologie du *XX*^e siècle a identifié ces éléments d'hérédité, qu'on appelle aujourd'hui les gènes.

Le principe de la transmission des caractères est donc le suivant : un gène R est responsable de la couleur rouge, un autre B de la couleur blanche ;

mais chacun des deux parents apporte un gène, et c'est la combinaison RR et non la présence d'un seul gène R qui produit la couleur rouge. De même c'est la combinaison BB qui produit la couleur blanche. Si l'un des parents est rouge et l'autre blanc, la combinaison sera RB ou BR et produira la couleur rose. On appelle *homozygote* une combinaison de deux gènes identiques, et *hétérozygote* une combinaison de deux gènes différents. Ainsi RR et BB sont des combinaisons homozygotes, RB et BR sont des combinaisons hétérozygotes. La théorie de Mendel postule que les mécanismes de la reproduction séparent à nouveau les combinaisons en deux gènes intacts, qui se recombinent autrement pour former la génération suivante. Si les deux parents sont rouges (combinaison RR et RR) il n'y a aucun gène B qui peut apparaître et les enfants seront également rouges. Si les parents sont tous les deux roses il y a quatre possibilités :

1. Les parents sont RB et RB ; alors l'enfant est RR .
2. Les parents sont RB et BR ; alors l'enfant est RB .
3. Les parents sont BR et RB ; alors l'enfant est BR .
4. Les parents sont BR et BR ; alors l'enfant est BB .

On voit que la combinaison fille a été obtenue en retenant la première lettre de chacune des deux combinaisons parentales, mais bien entendu ceci n'est qu'une convention d'écriture ; les parents ne "sont" pas RB ou BR ; ils sont hétérozygotes, et ce sont les hasards de la recombinaison qui décident ce qui sera — dans cette convention — la première lettre. Le mécanisme moléculaire réel de ce processus a été élucidé au milieu du XX^e siècle, c'est la division des chromosomes. La reproduction sexuée fonctionne de la manière suivante. Tous les gènes sont regroupés en chaînes ordonnées appelées chromosomes, qui sont toujours couplés par paires homologues : ces paires sont des chaînes doubles comportant deux chaînons symétriques qui se font face (les chromosomes homologues), de telle sorte qu'à chaque gène de l'un des chaînons correspond un compagnon symétrique sur l'autre chaînon appelé allèle. Les combinaisons de deux gènes qui interviennent dans la théorie de Mendel concernent ces couples d'allèles. Lors de la reproduction les deux chromosomes homologues se séparent, et chaque chromosome ainsi isolé se recombine *au hasard* avec un chromosome isolé de l'autre parent. Chaque parent fournit un seul des deux chromosomes de chaque paire, le choix étant fait au hasard. Ainsi une nouvelle paire sera formée à partir d'un chromosome du père et d'un chromosome de la mère. Il y a donc quatre recombinaisons équiprobables possibles.

L'ensemble des gènes possibles, ainsi que leur place sur les chaînons, est une caractéristique invariable de l'espèce. C'est pourquoi à un endroit donné du chromosome (on appelle cela un *locus*) on trouvera toujours les

Marches aléatoires et lois de l'hérédité

mêmes gènes (les allèles du locus) : les gènes pouvant occuper un locus donné sont généralement peu nombreux. Dans les cas les plus simples, il n'y a qu'un seul allèle sur le locus (tout le monde est alors homozygote) ou deux, par exemple R et B , et alors les quatre combinaisons RR , RB , BR , et BB sont possibles. Mais bien entendu ce n'est pas la règle générale : il y a souvent plus que deux allèles. Dans une espèce donnée, on trouvera presque toujours l'une des combinaisons possibles d'allèles au locus correspondant (les exceptions sont les *mutations*) ; mais en un autre locus, on trouvera des combinaisons d'allèles différents. Si les deux parents sont hétérozygotes et s'il n'y a que deux allèles (cas où on croise deux fleurs roses), les quatre recombinaisons possibles de chromosomes donneront *au locus considéré* les quatre combinaisons BB , BR , RB , et RR .

Dans une population naturelle, il n'y a aucune raison que les allèles soient tous exactement aussi répandus : généralement, les uns sont plus rares que les autres (par exemple les mirabilis à fleurs rouges sont plus rares que ceux à fleurs blanches). Toutefois, dans les expériences comme celle décrite plus haut, on a préalablement sélectionné la variété rouge et la variété blanche, de sorte qu'en croisant les fleurs rouges avec les blanches on a créé artificiellement une population comportant exactement autant de gènes R que de gènes B . La règle statistique observée par Mendel s'explique aisément par l'équiprobabilité des quatre recombinaisons de chromosomes : au locus considéré, si les deux parents sont hétérozygotes, on obtiendra (avec probabilité $\frac{1}{4}$ pour chacune) les combinaisons RR , RB , BR , et BB . On appelle *génotype* la combinaison de gènes, le phénotype étant le caractère observable. La couleur rose de la fleur est un phénotype qui correspond indistinctement à l'un ou l'autre des génotypes RB ou BR , donc sa probabilité sera $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Le phénotype rouge correspond au génotype RR . Mais une telle correspondance entre génotype et phénotype est exceptionnelle ; l'immense majorité des génotypes n'ont aucun effet ponctuellement observable sous forme de phénotype ; non que le génotype soit sans effet, mais cet effet est tellement dilué qu'il ne lui correspond aucun caractère manifeste.

Étant donnée l'équiprobabilité de ces combinaisons, on peut étendre les raisonnements probabilistes à des situations plus générales, où il n'y a pas exactement autant de gènes R que de gènes B dans la population, ce qui conduit à la loi de Hardy-Weinberg. Pour établir la loi de Mendel on n'a croisé que des fleurs roses, parmi lesquelles il y a autant de BR que de RB . On retrouve alors forcément autant de gènes B que de gènes R dans la population fille. Mais si on croise des fleurs au hasard, à partir d'une population naturelle, sans tenir compte de la couleur, et qu'il y a moins de rouges que de blanches, on n'aura plus cette symétrie.

III. 6. Loi de Hardy-Weinberg.

On établit la loi de Hardy-Weinberg par le Calcul des probabilités; c'est ce qu'a fait le mathématicien Hardy (1900) dont le nom est associé. Prenons par exemple le cas de la mucoviscidose (chez l'homme). Il s'agit d'une maladie génétique, c'est-à-dire due à la présence d'un gène spécifique dans le code génétique de l'individu qui en est atteint. Cette maladie est fortement invalidante: l'un des symptômes, particulièrement pénible, est l'obstruction permanente des bronches par du mucus, entraînant difficultés respiratoires et toux permanentes. Il en va de même dans les canaux excréteurs du pancréas, ce qui bloque le passage de l'insuline. La cause en est la viscosité excessive des sécrétions muqueuses, d'où le nom de la maladie. Parmi les individus possédant le gène responsable, seuls ceux qui portent la combinaison homozygote sont frappés par la maladie; ceux qui possèdent le gène sous la forme hétérozygote sont sains et de ce fait appelés *porteurs sains*.

Appelons M le gène fatidique. Celui-ci peut se trouver combiné à son allèle X (cas hétérozygote XM ou MX), ou à lui-même (cas homozygote MM). Il importe peu ici de savoir s'il n'y a que deux allèles (X représentant alors un gène unique) ou plus (X représentant alors n'importe lequel des autres allèles), puisque les gènes autres que M n'interviennent pas dans la mucoviscidose. La fréquence de la maladie dans la population européenne est d'environ $1/2500$ (un enfant sur 2500 qui naissent en est atteint). Comme pour les croisements entre deux fleurs rouges de mirabilis, deux parents atteints tous les deux de mucoviscidose auraient forcément des enfants également atteints, mais ce cas est évidemment rarissime et peut être négligé. Le cas où l'un des deux parents serait atteint, quoique moins improbable, peut aussi être négligé, d'autant plus que la maladie détourne du mariage et de la procréation. Le cas normal est celui de parents qui sont tous deux hétérozygotes.

Supposons que tous les parents sains s'accouplent au hasard; cette hypothèse signifie concrètement que les parents ignorent s'ils sont porteurs ou non, ou que s'ils le savent cela n'a aucune incidence sur leur fécondité. Cette hypothèse est appelée la *panmixie*; le terme anglo-saxon *random mating* est cependant plus courant. Parmi ces parents "pris au hasard", il y a autant de pères que de mères; soit donc N le nombre de pères (ou de mères). Si parmi les N pères, il y a k porteurs sains, la proportion de porteurs sains est $x = k/N$. Le gène M étant distribué indépendamment du sexe, on aura la même proportion chez les mères, donc k mères hétérozygotes (environ, car la proportion présente toujours des fluctuations statistiques). La proportion x est l'inconnue que justement nous désirons calculer à partir de la fréquence

Marches aléatoires et lois de l'hérédité

connue de la maladie. Dans la loi de Mendel le hasard intervenait dans la recombinaison des chromosomes. Ici le hasard intervient en outre dans le choix des parents possibles: on admet que dans la population, *tous les couples de parents sont équiprobables*. Le nombre de tous les couples possibles est $N \times N$. Parmi ces couples, ceux dont les membres sont tous deux hétérozygotes MX ou XM sont au nombre de $k \times k$. La proportion de couples dont les membres sont tous deux porteurs sains est donc $k^2/n^2 = x^2$. Mais nous devons tenir compte des deux interventions du hasard; l'espace des épreuves correspondant n'est pas l'ensemble des couples de parents, mais l'ensemble des combinaisons de chromosomes résultant de la division des paires parentales: chaque parent fournit un chromosome de la paire, donc chaque couple peut produire quatre combinaisons de chromosomes. Par conséquent l'espace Ω des épreuves est de cardinal $4N^2$ (quatre combinaisons de chromosomes pour chaque couple de parents). Si les parents ne sont pas tous les deux porteurs du gène M , aucune combinaison ne pourra donner le génotype MM ; mais si les parents sont tous les deux porteurs sains, une seule des quatre combinaisons qu'ils peuvent produire donnera le génotype MM : par conséquent le nombre de possibilités d'avoir le génotype MM est k^2 (une seule combinaison pour chaque couple d'hétérozygotes, plus zéro combinaisons pour les autres couples). La probabilité d'avoir un enfant de génotype MM sera donc $\frac{k^2}{4N^2} = \frac{x^2}{4}$.

Or on sait par les données cliniques que cette proportion est $1/2500$, c'est-à-dire que $\frac{x^2}{4} = \frac{1}{2500}$, d'où $x = 1/25 = 0.04$. On peut donc déduire de la proportion $1/2500$ de cas homozygotes que la proportion de cas hétérozygotes est $1/25$. Un individu sur vingt cinq est porteur sain.

Il est aisé de trouver la formule générale: si pour un gène G quelconque ε est la proportion d'homozygotes GG , la proportion d'hétérozygotes GX ou XG est $x = 2\sqrt{\varepsilon}$, car on doit avoir $\frac{x^2}{4} = \varepsilon$. Cela résulte directement du dénombrement: il y a N pères et N mères donc N^2 couples possibles, qui peuvent donner chacun quatre combinaisons possibles de chromosomes, donc $\#\Omega = 4N^2$; parmi ceux-ci il y a k^2 couples qui peuvent donner chacun une combinaison GG , donc l'événement A : "l'enfant est de génotype GG " a pour cardinal k^2 . La probabilité pour que tous ces couples formés au hasard engendrent un enfant GG est donc

$$\varepsilon = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{k^2}{4N^2} = \frac{x^2}{4} \quad (III.4.)$$

Cette formule extrêmement simple permet de calculer la fréquence ε de la maladie à partir de la proportion statistique x de porteurs sains. On en déduit que si par exemple on dissuade la moitié des porteurs sains de procréer, on divise par quatre le nombre de cas de mucoviscidose.

Inversement, on obtiendra la proportion inconnue x de porteurs sains à partir de la fréquence ε de la maladie ($x = 2\sqrt{\varepsilon}$). Rappelons encore qu'il s'agit de la fréquence dans une population où les parents se choisissent "au hasard". Il est bien évident qu'une personne qui parmi ses proches (frères ou cousins) compte déjà un cas de mucoviscidose a une probabilité bien plus forte que x d'être porteur sain. Deux parents qui ont déjà mis au monde un enfant atteint sont assurément tous les deux porteurs sains et ont donc une chance sur quatre que le prochain enfant ait aussi la maladie.

La fréquence moyenne ε est variable selon les populations : 1/2500 était sa valeur sur l'ensemble de l'Europe occidentale. Mais elle diffère d'un pays à l'autre ; à l'intérieur d'un même pays elle varie selon les régions. En outre, la mucoviscidose est beaucoup plus rare en Asie, par exemple. Le tableau suivant⁽³⁾ en montre quelques exemples :

France:	global	1/2 000
	Finistère Nord	1/1 650
	Morbihan	1/3 500
Royaume Uni:	Angleterre	1/2 350
	Pays de Galles	1/1 650
Italie:	global	1/2 700
Suède:	global	1/5 700
Hawaii:	population de souche européenne	1/3 800
	population de souche polynésienne	1/90 000

On déduit alors immédiatement la proportion de porteurs sains dans ces populations : France 1/22, Suède 1/34, hawaiiens de souche polynésienne 1/150, etc. Bien entendu le raisonnement suivi pour obtenir la formule III.4 suppose une population génétiquement stable et isolée (endogamique), ainsi que l'équiprobabilité des choix de parents (random mating). Ces hypothèses ne sont que très approximativement vérifiées dans les populations humaines réelles. Mais il est possible de les réaliser en laboratoire sur des cultures de fleurs ou de bactéries. En observant la distribution statistique de phénotypes dans de telles cultures artificielles, et en la comparant à des probabilités a priori calculées à partir de *modèles de génotypes*, il devient possible d'étudier scientifiquement l'influence des gènes sur les phénotypes. Cette méthode est à la base de la génétique.

Dans le raisonnement suivi plus haut, nous avons cependant négligé que la naissance d'un GG peut aussi provenir du croisement d'un GX avec un GG , ou du croisement de deux GG . Cette négligence volontaire se justifie,

⁽³⁾ D'après G. Lenoir *La mucoviscidose* Éd Doin.

Marches aléatoires et lois de l'hérédité

soit parce que le génotype GG est très invalidant (donc rend l'accès à la procréation difficile ou impossible), soit tout simplement parce que le génotype GG est si rare qu'on peut statistiquement le négliger. Ces deux conditions étaient vérifiées pour la mucoviscidose.

Si le génotype GG n'est ni rare ni invalidant, il faut tenir compte des mariages $GX + GX$ ou $GG + GG$. Supposons toujours que les couples de parents sont choisis au hasard. L'événement A : "naissance d'un GG " est alors la réunion des quatre événements suivants :

$$\begin{aligned} A_1 : GX + GX &\rightarrow GG \quad (\text{probabilité } \frac{x^2}{4}); \\ A_2 : GG + GX &\rightarrow GG \quad (\text{probabilité } \frac{\varepsilon x}{2}); \\ A_3 : GX + GG &\rightarrow GG \quad (\text{probabilité } \frac{x\varepsilon}{2}); \\ A_4 : GG + GG &\rightarrow GG \quad (\text{probabilité } \varepsilon^2); \end{aligned}$$

Les probabilités de A_2 , A_3 , et A_4 se calculent par dénombrement exactement de la même façon que pour A_1 . Ces quatre événements étant disjoints, on obtient donc

$$\frac{x^2}{4} + \frac{\varepsilon x}{2} + \frac{\varepsilon x}{2} + \varepsilon^2 = \varepsilon$$

de sorte que x est solution de l'équation du second degré $\frac{x^2}{4} + x\varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon = 0$, dont la seule solution positive est

$$x = 2(\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon) \quad (III.5.)$$

Cette relation est la loi de Hardy-Weinberg. Le raisonnement simplifié précédent donnait $x = 2\sqrt{\varepsilon}$, ce qui est à peu près la même chose si ε est petit (nous avons passé sous silence les événements A_2 , A_3 , et A_4 , qui pour ε petit sont en effet beaucoup moins probables que A_1).

La loi de Hardy-Weinberg n'est évidemment applicable que si les hypothèses d'équiprobabilité sont satisfaites. Pour dénombrer les quatre événements A_1 , A_2 , A_3 , et A_4 , nous avons admis que les gènes se combinaient uniformément. Cela suppose que les parents qui procréent se choisissent "au hasard", et qu'en outre, la recombinaison des chromosomes est parfaitement uniforme. Il est bien clair que les couples ne se forment jamais au hasard, mais le "hasard pur" n'est exigé que pour ce qui concerne les combinaisons des gènes X et G . Si les phénotypes correspondant à ces combinaisons n'ont aucun effet susceptible d'augmenter ou de diminuer l'attirance sexuelle, la fécondité, etc. tout se passera selon le hasard pur, même si on peut trouver des déterminismes sociaux ou psychologiques à la formation des couples. Il est cependant assez évident que si la combinaison homozygote GG produit des symptômes invalidants, ceux-ci auront une réelle influence (négative)

sur la fécondité, ou aboutiront à la mort de l'individu avant la puberté. Seuls les individus porteurs de XX ou de GX seront dépourvus du caractère invalidant et s'accoupleront au hasard. Cela exclut les événements A_2 , A_3 , et A_4 , et dans ce cas notre raisonnement approché devient correct même si ε n'est pas petit. Toutefois supposer ε grand signifie que le caractère invalidant est fréquent, et aucune espèce ayant subi la lutte pour la vie pendant des millénaires ne peut correspondre à une telle hypothèse. D'autre part on peut critiquer l'application de ces hypothèses à l'homme civilisé : celui-ci n'est pas soumis à la lutte pour la vie ; des caractères invalidants peuvent être suffisamment atténués par la médecine pour ne plus détourner de la procréation ; un caractère qui augmente la fécondité peut être compensé par l'usage de contraceptifs, un caractère qui la diminue peut être combattu par des traitements hormonaux, etc.

Le Calcul des probabilités joue un rôle essentiel en génétique ; les méthodes que nous avons mises en oeuvre pour aboutir aux lois de Mendel et de Hardy-Weinberg peuvent être généralisées à des situations moins simples. Pour étudier en laboratoire les mécanismes moléculaires de l'hérédité on analyse les protéines : celles-ci sont formées d'acides aminés qu'on peut isoler par des méthodes adéquates (chromatographie, etc.) Mais la biologie moléculaire ne permet pas de connaître la répartition des gènes dans une population, ni l'influence d'un gène sur le phénotype d'une plante. C'est pourquoi les généticiens cultivent en laboratoire des populations entièrement artificielles (comme le fit Mendel), dans lesquelles l'observation empirique permet de mesurer la répartition statistique de certains phénotypes. L'équiprobabilité des recombinaisons chromosomiques et des croisements de semences permet d'autre part de calculer a priori des probabilités de répartition de génotypes : toute hypothèse sur un génotype peut ainsi être confrontée à l'observation statistique.

En ce qui concerne la méthodologie, le point essentiel est le caractère quantitatif des prédictions : toute hypothèse sur un génotype peut être testée quantitativement à l'aide d'observations statistiques sur les phénotypes correspondants. Cette méthode rigoureuse, initiée par Gregor Mendel dans le cas le plus simple où le phénotype étudié est déterminé par deux allèles seulement, et où le Calcul des probabilités joue un rôle clé, est donc le fondement de la génétique. Pour que les expériences soient statistiquement précises, il faut disposer en laboratoire de populations nombreuses et pouvoir les croiser sur un grand nombre de générations ; donc les espèces étudiées doivent être de petite taille et se reproduire vite ; d'où la préférence pour des espèces particulières ayant ces propriétés : bactérie *Escherichia coli*, mouche drosophile, fleur *Arabidopsis thaliana* (arabette des dames).

IV. L'INDÉPENDANCE STOCHASTIQUE.

IV.1. La signification de l'indépendance stochastique.

L'idée d'indépendance stochastique est assez naturelle; reprenons par exemple le problème des boules qu'on jette successivement dans des cases. Au chapitre *I* nous avons vu que l'équiprobabilité des huit distributions dans la colonne de gauche de la figure 1 résultait des deux faits suivants :

a) les deux cases sont symétriques de par leurs positions dans l'espace (aucune des deux n'est privilégiée).

b) chaque boule *ignore* ce qui est arrivé aux précédentes.

La condition b) est bien sûr aussi nécessaire que la première, car si elle n'était pas vérifiée, les deux cases cesseraient d'être symétriques après que la première boule ait été placée (ce qui justement est le cas pour des particules de Bose). La condition b) signifie donc qu'il y a *indépendance* entre les lancers successifs.

C'est cette sorte d'indépendance qui correspond au concept d'*indépendance stochastique*.

Lorsque le Calcul des probabilités fut axiomatisé, on chercha à donner une définition purement mathématique de l'indépendance stochastique. Une définition purement mathématique, cela signifie une définition qui ne recourt pas à des considérations physiques (telles que la séparabilité spatio-temporelle), ni à des considérations philosophiques (telles que la "nature" de l'ignorance mutuelle des boules). Une définition purement mathématique doit porter uniquement sur ce qui se passe à l'intérieur du modèle mathématique, c'est-à-dire, dans le cas du Calcul de probabilités, à l'intérieur de l'espace Ω . Mais Ω n'a aucune structure mathématique en dehors de la structure nue d'ensemble ⁽¹⁾. Il faut donc fournir une définition qui porte sur cette seule structure d'ensemble, c'est-à-dire sur les *éléments* (épreuves), les *parties* (événements), les *ensembles de parties*, etc.

Commençons par observer la première colonne de la figure 1. Dans ce cas Ω est un ensemble à huit éléments, il y a donc exactement $2^8 = 256$

⁽¹⁾ Bien sûr, comme nous l'avons vu au chapitre *I*, la *structure* de cet ensemble doit contenir sous forme implicite toute l'information qu'on possède sur le problème concret sous-jacent, mais la construction ou le choix de cette structure concerne la phase de *modélisation*, et non la partie purement mathématique du Calcul des probabilités qui, elle, présuppose simplement un ensemble Ω déjà donné.

parties (en incluant la partie vide et le tout). Il est bien clair qu'une étude exhaustive, comme celle qui va suivre, serait difficile avec un Ω à plusieurs milliards d'éléments ! Pour faciliter la nomenclature, numérotons les épreuves de 1 à 8, en allant du haut vers le bas sur la figure 1 : ainsi l'épreuve 5 est la cinquième en partant du haut sur la colonne de gauche de la figure 1 (voir cette figure) et correspond au cas : "boule 1 dans la case de gauche ou case \mathcal{A} , boules 2 et 3 dans la case de droite ou case \mathcal{B} ", etc. Parmi les 256 sous-ensembles possibles, on peut remarquer les six suivants, qui expriment chacun un événement concernant l'une des trois boules :

$$\begin{aligned} A_1 &: \text{"la boule 1 est dans la case } \mathcal{A}\text{"} = \{1, 2, 4, 5\} \\ A_2 &: \text{"la boule 2 est dans la case } \mathcal{A}\text{"} = \{1, 2, 3, 6\} \\ A_3 &: \text{"la boule 3 est dans la case } \mathcal{A}\text{"} = \{1, 3, 4, 7\} \\ B_1 &: \text{"la boule 1 est dans la case } \mathcal{B}\text{"} = \{3, 6, 7, 8\} \\ B_2 &: \text{"la boule 2 est dans la case } \mathcal{B}\text{"} = \{4, 5, 7, 8\} \\ B_3 &: \text{"la boule 3 est dans la case } \mathcal{B}\text{"} = \{2, 5, 6, 8\} \end{aligned}$$

Par exemple, A_1 est constitué des éléments $N^{\text{os}} 1, 2, 4$, et 5 c'est-à-dire des épreuves que voici :



En regardant la figure 1 on voit bien que ces quatre épreuves sont la première, la deuxième, la quatrième, et la cinquième en partant du haut.

De même, A_3 est constitué des éléments $N^{\text{os}} 1, 3, 4$, et 7 c'est-à-dire :



Les intersections deux par deux de ces six événements sont :

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= \{1, 2\} & A_1A_3 &= \{1, 4\} & A_2A_3 &= \{1, 3\} \\ A_1B_2 &= \{4, 5\} & A_1B_3 &= \{2, 5\} & A_2B_3 &= \{2, 6\} \\ A_2B_1 &= \{3, 6\} & A_3B_1 &= \{3, 7\} & A_3B_2 &= \{4, 7\} \\ B_1B_2 &= \{7, 8\} & B_1B_3 &= \{6, 8\} & B_2B_3 &= \{5, 8\} \end{aligned}$$

(on n'a pas compté A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , qui sont évidemment vides puisqu'une boule ne peut pas être à la fois dans la case \mathcal{A} et dans la case \mathcal{B}).

Les intersections par trois peuvent également être notées ; les seules qui sont non vides sont les suivantes :

$$\begin{aligned} A_1A_2A_3 &= \{1\} & A_1A_2B_3 &= \{2\} & A_1B_2A_3 &= \{4\} & B_1A_2A_3 &= \{3\} \\ B_1A_2B_3 &= \{6\} & A_1B_2B_3 &= \{5\} & B_1B_2A_3 &= \{7\} & B_1B_2B_3 &= \{8\} \end{aligned}$$

L'indépendance stochastique

On voit que toutes les intersections par deux sont composées de deux éléments, et que toutes les intersections par trois sont composées d'un seul élément (si elles ne sont pas vides); en termes de probabilités cela se traduit par le fait que les probabilités des événements A_j ou B_j valent $\frac{1}{2}$, celles des intersections par deux valent $\frac{1}{4}$ (qui est le carré de $\frac{1}{2}$), et celles des intersections par trois valent $\frac{1}{8}$ (qui est le cube de $\frac{1}{2}$); autrement dit les égalités $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \cap F \cap G) = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(G)$ s'appliquent pour les intersections retenues ci-dessus. En revanche elles ne s'appliquent pas pour les intersections vides, telles que A_1B_1 , A_2B_2 , $A_1A_2B_1$, $A_1B_2A_2$, etc, ni pour les intersections trop pleines telles que $A_1A_1 = A_1$, $A_1B_2B_2$, etc. Un examen plus attentif montre que les intersections qui *ne vérifient pas* la règle "probabilité de l'intersection égale produit des probabilités" sont celles où un indice est répété, tandis que les intersections qui *vérifient* la règle sont celles où les indices sont distincts. Or l'indice est le numéro de la boule; on peut donc dire que la règle $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ s'applique si les événements E et F concernent⁽¹⁾ des boules différentes, et ne s'applique plus lorsque les événements E et F concernent une seule et même boule. C'est ainsi que la règle du produit exprime mathématiquement le fait que par exemple la boule $N^{\circ}2$ "ignore" ce qui est arrivé à la boule $N^{\circ}1$.

Un examen encore plus approfondi de ce phénomène montre cependant que le modèle mathématique (c'est-à-dire l'ensemble Ω) est plus riche en événements indépendants que la *véritable* causalité physique ne l'impose. Considérons par exemple les événements suivants :

$$C_1 = \{1, 2, 3, 4\} \quad C_2 = \{3, 4, 5, 6\} \quad C_3 = \{2, 4, 6, 8\}$$

On observera que la règle du produit s'applique aussi à ces trois événements : en effet

$$C_1C_2 = \{3, 4\} \quad C_1C_3 = \{2, 4\} \quad C_2C_3 = \{4, 6\}$$

ainsi que

$$C_1C_2C_3 = \{4\}$$

de sorte qu'on a également $\mathcal{P}(C_1C_2) = \mathcal{P}(C_2C_3) = \mathcal{P}(C_1C_3) = \frac{1}{4}$ et $\mathcal{P}(C_1C_2C_3) = \frac{1}{8}$, mais on ne voit pas très bien quelles propriétés se trouvent ainsi *séparées* quant à la causalité. En réalité le cas des événements C_1 , C_2 ,

⁽¹⁾ Lorsqu'on dit par exemple que l'événement E concerne la boule $N^{\circ}1$, il faut comprendre par là qu'en tant que sous-ensemble de Ω il regroupe toutes les épreuves où la boule $N^{\circ}1$ joue un rôle particulier : par exemple l'événement A_1 est l'ensemble de toutes les épreuves où la boule $N^{\circ}1$ est dans la case \mathcal{A} .

C_3 , n'est qu'un artéfact du modèle mathématique. Cela apparaît encore plus clairement si au lieu de se limiter à trois boules et deux cases on considère le cas général de m boules et N cases : les événements du type A_j, B_j , etc. conservent leur sens ainsi que la règle du produit ; on trouvera pour tout m et tout N des événements tels que les C_j , qui vérifient aussi la règle du produit, mais sans qu'on puisse leur trouver un sens qui soit conservé lorsque le nombre de boules ou de cases change.

On peut donc introduire la définition mathématique suivante :

Deux événements E et F seront dits *stochastiquement indépendants* si $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$; plus généralement, si $E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$ et $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ sont deux familles d'événements sur un espace d'épreuves Ω , on dira que la famille $\{E_i\}$ est *stochastiquement indépendante* de la famille $\{F_j\}$ si pour tout couple (i, j) on a

$$\mathcal{P}(E_i \cap F_j) = \mathcal{P}(E_i) \times \mathcal{P}(F_j)$$

Dans ce cas n'importe quelle réunion de plusieurs d'entre les E_i sera stochastiquement indépendante de n'importe quelle réunion de plusieurs d'entre les F_j .

Mais il ne faut pas oublier qu'une telle définition formelle, par nature, introduit toujours des artéfacts.

On comprendra mieux la signification de l'indépendance stochastique formelle en la reliant à l'arithmétique : elle n'est rien d'autre que le reflet de propriétés purement arithmétiques liées à la divisibilité du nombre entier $\#\Omega$. On pouvait déjà soupçonner cela d'après la propriété du produit : en effet dire que $\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ revient à dire que $\#(AB) \times \#\Omega = \#(A) \times \#(B)$, ce qui montre bien que $\#\Omega$ et $\#(A)$ ou $\#(B)$ doivent avoir des diviseurs communs. Tout cela devient plus clair si on représente l'espace Ω non comme une liste séquentielle, mais comme un tableau qui reflète la divisibilité de $\#\Omega$ par exemple si $\#\Omega = 35$ on peut présenter la liste complète de ses éléments comme un tableau à cinq lignes et sept colonnes (ou vice-versa). La colonne de gauche de la figure 1, dans laquelle $\#\Omega = 8 = 4 \times 2$ peut ainsi être représentée comme sur la figure 8.

La colonne de gauche de la figure 8 est l'événement que nous avons désigné ci-dessus par A_1 et la colonne de droite l'événement B_1 . L'événement A_2 est formé des deux premières *lignes*, l'événement B_2 des deux dernières lignes, l'événement B_3 des lignes N^{os} 2 et 3, l'événement A_3 des lignes N^{os} 1 et 4. La propriété du produit est donc simplement l'expression du fait bien connu que le nombre d'éléments d'un tableau est égal au nombre de lignes multiplié par le nombre de colonnes.

L'indépendance stochastique

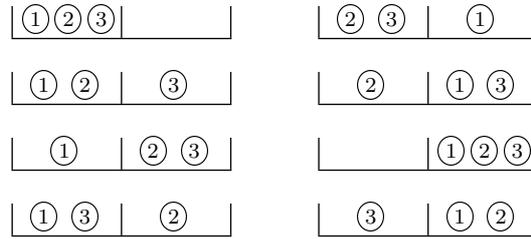


figure 8

Bien sûr dans la figure 8 les configurations ont été rangées en tenant compte du *sens* de l'expérience, c'est-à-dire du rôle joué par les trois boules, de même que le choix des événements $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, avait été dicté par ce sens. Mais on conserve cette propriété de multiplication en permutant n'importe comment les éléments de la deuxième colonne: dans ce cas les colonnes sont globalement inchangées (elles consistent toujours dans les événements A_1 et B_1) mais les lignes sont différentes: par exemple sur la figure 8 les lignes $N^{\text{os}} 2$ et 3 avaient en commun que la boule $N^{\circ} 3$ était dans la case \mathcal{B} (événement B_3); après permutation de la deuxième colonne il ne reste plus rien qui ait un rapport avec la boule $N^{\circ} 3$: le sens est perdu, mais la propriété de multiplication subsiste.

En fait $\#\Omega = 8$ peut se décomposer davantage; au lieu de 2×4 , c'est $2 \times 2 \times 2$, donc au lieu d'un tableau à quatre lignes et deux colonnes, c'est un cube, ou un tableau à trois entrées de deux éléments chacune: la première entrée correspond aux événements A_1 et B_1 , la deuxième entrée aux événements A_2 et B_2 , et la troisième entrée aux événements A_3 et B_3 (voir figure 9).

On retrouve ainsi ce qui en réalité avait présidé dès le départ à la construction du modèle mathématique Ω . L'espace des épreuves a une structure qui reflète directement les invariances physiques ou la causalité qui sont à l'origine de l'équiprobabilité. Mais en construisant un tel modèle, on introduit ipso facto des régularités supplémentaires (qui dérivent de celles qu'on a postulé a priori par des permutations) qui n'ont plus aucune signification par rapport au problème qu'on voulait modéliser.

Ainsi, on peut voir sur la figure 9 que l'événement A_1 ("la boule $N^{\circ}1$ est dans la case \mathcal{A} ") correspond à la face gauche du cube; l'événement A_2 à la face avant; l'événement A_3 à la face de dessous; l'événement B_1 à la face de droite; l'événement B_2 à la face arrière; l'événement B_3 à la face de dessus. Les intersections A_1A_2, A_1A_3 , etc. sont donc des intersections de deux faces, c'est-à-dire des arêtes (ou rien si les faces sont opposées comme A_1B_1). Les

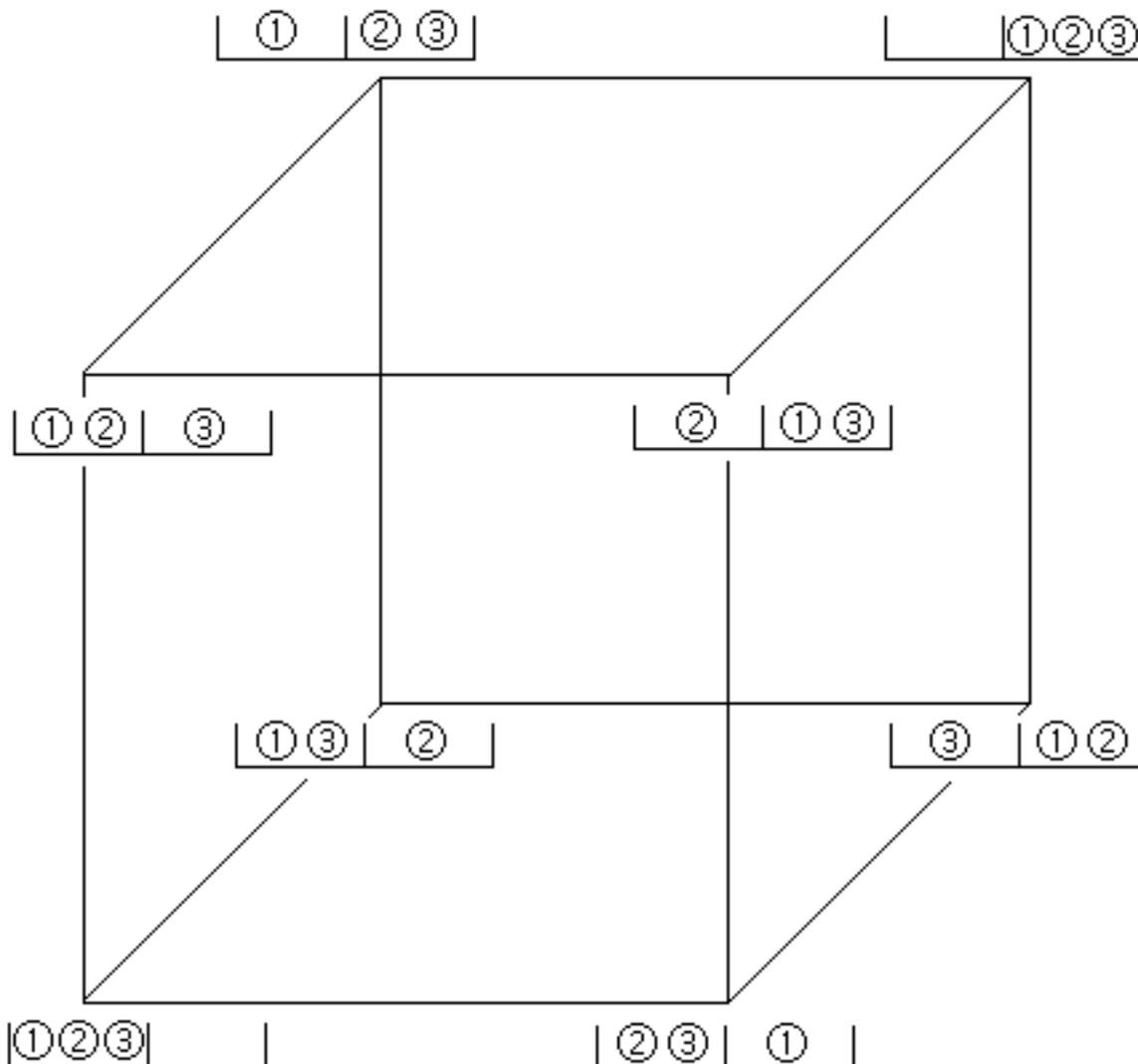


figure 9

intersections par trois $A_1A_2A_3$, $A_1B_2A_3$, etc. sont des sommets. Tout ce qui avait été dit plus haut s'interprète donc selon la structure de *produit cartésien* de l'espace Ω . Le fait que chacune des trois boules ignore ce que font les deux autres (ce qui constitue la propriété causale caractéristique du problème à modéliser) est traduit dans le modèle Ω par un produit cartésien d'ensembles : pour chaque boule il y a deux possibilités \mathcal{A} ou \mathcal{B} , et il y a trois boules qui s'ignorent mutuellement *donc* l'ensemble Ω sera de la forme $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}^3$. L'espace Ω de toutes les épreuves possibles pour n cases et r boules serait un hypercube à r dimensions, avec des arêtes à n éléments ; en toute logique, son cardinal est n^r , conformément à (II.1.) Si maintenant on permute n'importe comment chaque arête, on ne change pas la structure

L'indépendance stochastique

de produit, mais on fait disparaître le rapport avec les boules.

L'indépendance stochastique formelle d'une famille d'événements par rapport à une autre, c'est-à-dire le simple fait d'avoir $\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, est toujours liée à une décomposition de Ω en produit d'ensembles plus petits (et donc aussi à la décomposition de l'entier $\#\Omega$ en produit de facteurs premiers). Tout problème de probabilité qui comporte une indépendance *causale* se modélisera sous forme d'un produit cartésien qui reflète directement et par construction cette indépendance causale; mais cela n'entraîne de loin pas que réciproquement, toute autre décomposition de Ω en produit implique une signification causale.

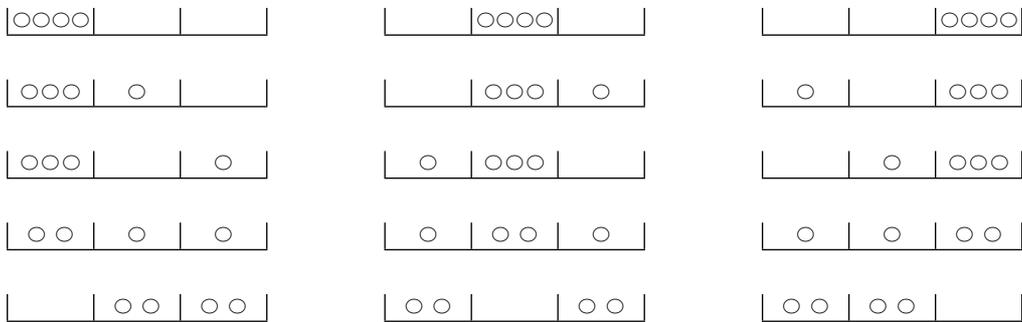


figure 10

C'est ce qu'on peut constater par exemple dans le cas de la statistique de Bose-Einstein. Le nombre de configurations pour r particules et N états est $(r + N - 1)! / r! (N - 1)!$. Ce nombre n'est certes jamais premier et on peut donc toujours décomposer Ω d'une façon ou d'une autre en produit. Mais contrairement à ce qui était le cas pour les boules, où le nombre de facteurs du produit était toujours égal au nombre de boules, l'espace Ω pour m particules de Bose et N états quantiques est bien décomposable en produit, mais de différentes manières, qui varient selon les valeurs de m et de N , sans qu'on puisse observer une règle permanente; ceci reflète le fait que lorsque des particules de Bose viennent occuper des états quantiques, elles ne s'y rangent pas indépendamment les unes des autres (cette propriété est appelée la *non-séparabilité quantique*). Il n'y a pas d'indépendance causale entre les particules, mais cela n'empêche pas de trouver dans chaque cas particulier (c'est-à-dire pour chaque valeur particulière de m ou N) des factorisations possibles pour l'espace Ω .

Pour illustrer cela, on a représenté sur la figure 10 l'espace Ω pour une statistique de Bose à 4 particules et 3 états; il y a $15 = 5 \times 3$ modes d'occupation possibles, donc une factorisation en tableau à deux dimensions.

La même structure que celle représentée sur la figure 10 peut être décrite par le tableau de chiffres que voici :

(4, 0, 0)	(0, 4, 0)	(0, 0, 4)
(3, 1, 0)	(0, 3, 1)	(1, 0, 3)
(3, 0, 1)	(1, 3, 0)	(0, 1, 3)
(2, 1, 1)	(1, 2, 1)	(1, 1, 2)
(0, 2, 2)	(2, 0, 2)	(2, 2, 0)

On peut s’amuser à constater que par exemple la famille d’événements $\{A_j\}$ ($j = 1, 2, 3$) correspondant aux colonnes du tableau peut recevoir le sens physique suivant : A_j est l’événement “l’état $N^o j$ possède le nombre d’occupation non ex-aequo le plus élevé”. La famille $\{B_i\}$ correspondant à des lignes recevrait le sens suivant :

- B_1 “les nombres d’occupation sont 4, 0, et 0” (1^{re} ligne);
- B_2 “les nombres d’occupation sont 3, 1, et 0” (2^e et 3^e lignes);
- B_3 “les nombres d’occupation sont 2, 1, et 1” (4^e ligne);
- B_4 “les nombres d’occupation sont 2, 2, et 0” (5^e ligne);

Les événements de la famille A sont stochastiquement indépendants de ceux de la famille B . Ceci a-t-il une signification quant à la causalité physique ? Par exemple cela aurait-il la signification que les particules, une fois que leur répartition en groupes d’effectifs fixés est faite, vont placer le groupe le plus nombreux *indépendamment* de la répartition ? Pour que cela corresponde à une propriété physique, il faudrait au moins que cela reste vrai quel que soit le nombre d’états et le nombre de particules; or si on prend trois particules occupant trois états, il y a $10 = 2 \times 5$ configurations, données par le tableau suivant :

(3, 0, 0)	(0, 2, 1)
(2, 0, 1)	(0, 1, 2)
(1, 2, 0)	(0, 3, 0)
(1, 0, 2)	(0, 0, 3)
(1, 1, 1)	(2, 1, 0)

On peut toujours fabriquer des paires d’événements indépendants en regroupant des lignes et des colonnes, mais la propriété physique qui avait semblé apparaître dans le cas précédent a complètement disparu : il n’y a aucune chance de finir par la faire apparaître en permutant correctement la deuxième colonne par rapport à la première, puisque tout simplement le nombre de colonnes n’est plus égal au nombre d’états, et ne *peut pas* l’être, parce que 3 n’est pas un diviseur de 10.

En fin de compte tout est lié à la divisibilité de l’entier $\#\Omega$: plus il possède

L'indépendance stochastique

de diviseurs, plus nombreuses sont les familles d'événements stochastiquement indépendantes. Mais il est rarissime que cette indépendance stochastique formelle soit le reflet d'une indépendance causale. Lorsque c'est le cas, c'est que l'indépendance causale a été postulée a priori et a *présidé* à la fabrication du modèle : comme dans le cas des trois boules, le modèle est alors fabriqué délibérément sous forme de produit cartésien, précisément pour refléter une indépendance causale sous la forme de l'indépendance stochastique. Par permutations il s'y ajoute encore une foule d'autres familles stochastiquement indépendantes d'événements, mais qui n'ont aucune signification causale. Dans le cas des particules de Bose, le modèle n'est pas fabriqué au départ sous forme de produit cartésien, et s'il se trouve qu'il est factorisable, cela ne reflète rien de physique.

Il est bien sûr impossible d'affirmer avec certitude qu'aucune de ces factorisations "parasites" ne peut être le reflet d'une causalité encore inconnue ; mais ces factorisations non voulues à l'avance proviennent de propriétés arithmétiques des nombres entiers, et disparaîtraient sous leur forme exacte si par exemple l'équiprobabilité postulée a priori n'était qu'approximative au lieu d'être mathématiquement exacte. Or on ne peut donner un sens physique à une propriété qui disparaît dès lors que les paramètres physiques subissent une variation arbitrairement petite. C'est pourquoi une propriété du type $\mathcal{P}(AB) \simeq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ (avec \simeq au lieu de $=$), mais qui ne changerait pas complètement pour chaque nouvelle valeur de m ou N , aurait bien plus de chances d'avoir un sens physique que des factorisations exactes.

IV.2. L'effacement de la causalité.

Afin de bien comprendre ce que signifie réellement l'indépendance stochastique, il faut encore la relier à la *nature* du hasard. Tout au long de ce chapitre, nous avons beaucoup insisté sur l'indépendance stochastique en tant que reflet d'une indépendance causale sous-jacente. Ainsi l'exemple des trois boules "qui s'ignorent mutuellement". Dans ce cas, l'ignorance mutuelle s'expliquait par la Mécanique classique. On pourrait étudier plus en détail le rôle joué par la Mécanique en reprenant le modèle simplifié de roulette présenté au chapitre I. Les trois boules seraient une bille de roulette qu'on aurait lancée trois fois. L'événement que la boule tombe dans la boîte \mathcal{A} correspondrait à un résultat tel que "rouge", "impair", ou "manque". Par exemple on peut supposer que le disque est divisé en trente six secteurs égaux (d'ouverture 10 degrés chacun), numérotés de 1 à 36 ; on dira que le résultat est "impair" si la bille s'arrête dans un secteur portant un numéro impair. Lorsqu'on lance la bille avec un certain angle θ et un coefficient de frottement k , le point du disque où la bille s'arrêtera est, comme nous

avons vu au chapitre **I**, parfaitement déterminé, mais il y a un phénomène de chaos déterministe qui crée du hasard. Le résultat, par exemple “impair”, est déterminé par les conditions initiales de lancement, c’est-à-dire par les valeurs – rigoureusement exactes – de θ et k . L’indépendance causale entre les trois lancers signifie que les valeurs de θ et k au moment où on lance une deuxième fois la bille sont indépendantes du point où celle-ci était arrivée la première fois, et de même, que ces valeurs au moment où on lance une troisième fois la bille sont indépendantes des points où celle-ci était arrivée la première et la deuxième fois. Lorsqu’on voit les choses ainsi, il est clair qu’il n’y a eu aucune intervention du hasard entre le moment où la bille a été lâchée sur le disque et la manifestation du résultat : le hasard serait intervenu au moment du “choix” des valeurs de θ et k et plus jamais ensuite. Or toute la discussion présentée en **I.4.** sur le hasard montrait au contraire, que non seulement *du* hasard est créé par le mouvement lui-même, mais que c’est même *le* hasard qui par nature est toujours créé comme cela. Même si un *autre* hasard est intervenu au moment du choix des valeurs de θ et k , celui-ci n’est peut-être pas d’une autre nature, il peut lui aussi avoir été produit par un effet de chaos (par exemple les valeurs de θ et k peuvent être choisies par une fonction **random**, ou bien la bille peut avoir été lancée par un croupier alcoolique dont la main tremble), mais en renvoyant tout à ce hasard premier nous n’expliquons rien, nous ne faisons que déplacer le problème.

C’est pourquoi il nous faut encore examiner de plus près comment le mouvement déterministe de la bille crée l’indépendance stochastique là où au départ il n’y a pas d’indépendance causale, en effaçant en quelque sorte la causalité. On complètera ainsi la discussion du chapitre **I**, car le mécanisme par lequel le chaos transforme le déterminisme en hasard consiste précisément à rendre *stochastiquement* indépendants des phénomènes qui sont *causalement* dépendants.

Imaginons que la bille soit bien lancée trois fois, mais que les choix initiaux de θ et k , au lieu d’être causalement indépendants entre eux, soient étroitement dépendants : pour fixer les idées, disons que, si θ_1 et k_1 sont les valeurs initiales du premier lancer et sont, elles, “choisies au hasard”, alors le second lancer sera effectué avec $\theta_2 = \alpha \theta_1$ et $k_2 = k_1$, et le troisième avec $\theta_3 = \theta_1$ et $k_3 = \beta k_1$, α et β étant des paramètres fixés à l’avance. On suppose bien entendu comme au chapitre **I** que k_1 est petit, de l’ordre de 10^{-4} , de sorte que la bille ne s’arrêtera qu’après plusieurs milliers de tours. Dans ces conditions les trois lancers ne sont absolument pas indépendants, puisque θ_2 , θ_3 , k_2 , et k_3 sont fonctions de θ_1 et k_1 . De ce fait les choix de θ_1 , θ_2 , et θ_3 (ou de k_1 , k_2 , et k_3) ne sont pas stochastiquement indépendants, ce qu’on peut vérifier aisément : si on divise l’intervalle des valeurs possibles

L'indépendance stochastique

de θ , soit $]0, \pi[$ en deux demi-intervalles, par exemple en $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $[\frac{\pi}{2}, \pi[$, alors la probabilité pour que θ_1 , qui est choisi au hasard, soit dans l'un ou l'autre de ces deux demi-intervalles, par exemple $]0, \frac{\pi}{2}[$, est bien sûr $\frac{1}{2}$; mais (compte tenu que les valeurs de θ_1 , θ_2 , et θ_3 sont fonctions les unes des autres) la probabilité pour que θ_1 , θ_2 , et θ_3 soient *tous les trois* dans ce même demi-intervalle n'est pas $\frac{1}{8}$; un rapide calcul montre qu'elle est égale à $\frac{1}{2\alpha}$ si $\alpha > 1$ et à $\frac{1}{2}$ si $\alpha \leq 1$; en effet, puisque $\theta_2 = \alpha\theta_1$ et $\theta_3 = \theta_1$, on voit bien que si $\alpha > 1$, la condition nécessaire et suffisante pour que θ_1 , θ_2 , et θ_3 soient tous les trois dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ est que θ_1 soit dans $]0, \frac{\pi}{2\alpha}[$, événement dont la probabilité est bien $\frac{1}{2\alpha}$; si par contre $\alpha < 1$, cette condition nécessaire et suffisante est que θ_1 soit dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ (il est vrai que si $\alpha = 4$, la probabilité est quand même $\frac{1}{8}$, mais ceci est un cas particulier sans signification). Cela exprime la forte dépendance entre les trois valeurs. S'il y avait indépendance stochastique entre les trois choix de θ_1 , θ_2 , et θ_3 , alors, puisque chacun des trois choix aurait une probabilité $\frac{1}{2}$ de tomber dans le demi-intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, la probabilité pour que tous les trois y tombent à la fois serait le produit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Mais comme $\theta_3 = \theta_1$, si θ_1 y tombe, θ_3 y sera automatiquement aussi et θ_2 y sera également si θ_1 est dans $]0, \frac{\pi}{2\alpha}[$. Un constat analogue vaut pour k_1 , k_2 , et k_3 , ou pour les neuf couples (θ_i, k_j) .

Puisque les conditions initiales des trois lancers ne sont pas indépendantes, et que les positions finales atteintes par la bille sont rigoureusement déterminées par les conditions initiales, il ne peut pas y avoir non plus indépendance causale rigoureuse entre les trois positions finales. Et pourtant, si on fait l'expérience, on obtiendra malgré cela des résultats stochastiquement indépendants. C'est-à-dire que la dépendance causale des choix de θ_1 , θ_2 , et θ_3 se traduit bien par leur dépendance stochastique (la probabilité que les trois soient dans le demi-intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ est $\frac{1}{2\alpha}$ et non $\frac{1}{8}$), mais les trois positions *en fin de trajectoire*, bien qu'étant toujours, en toute rigueur, causalement liées, seront, elles, stochastiquement indépendantes.

Le phénomène de chaos déterministe produit par le très grand nombre de réflexions sur le bord, que nous avons analysé au chapitre **I**, aura eu pour effet d'*effacer* la dépendance entre les trois lancers.

Faire l'expérience signifie ici recommencer les trois lancers un très grand nombre de fois, par exemple un million de fois, et mesurer les probabilités par la fréquence de chaque chiffre. Cette expérience peut fort bien n'être qu'une simulation numérique. La probabilité d'avoir "impair" étant $\frac{1}{2}$ avec le premier des trois lancers, on aura environ 500 000 fois "impair" et 500 000 fois "pair" pour le premier des trois résultats. Mais, bien que les trois lancers ne soient pas du tout indépendants, et que par exemple sur le million d'essais il arrivera environ $500\,000/\alpha$ fois que les trois valeurs θ_1 , θ_2 , et

θ_3 soient toutes trois inférieures à $\frac{\pi}{2}$, il n'arrivera que 125 000 fois environ que les trois résultats à la fois soient impairs (révélant ainsi une probabilité de $\frac{1}{8}$), c'est-à-dire que tout se passera comme si les trois résultats étaient stochastiquement indépendants. C'est ainsi que le chaos déterministe *efface* la causalité. Comment cela est-il possible ?

Dans cette question nous laissons volontairement inexpliqué le hasard qui choisit la valeur de θ_1 ; nous ne nous intéressons qu'au hasard relatif qui est fabriqué par le chaos pour les positions finales aux second et troisième lancer.

Si on réalisait effectivement cette expérience par simulation numérique, on *constaterait* qu'au premier lancer la bille s'arrête une fois sur deux sur un chiffre impair, et que une fois sur huit toutes les trois s'arrêtent sur un chiffre impair. On *constaterait*, mais on ne *comprendrait* pas pour autant. Une explication qualitative est dans de tels cas plus instructive. La clé du problème est bien sûr que de petits changements sur θ entraînent de grands changements sur le résultat final. Ainsi, si on prend $\theta_2 = \theta_1 + \varepsilon$, avec ε très petit, nous savons d'après ce qui a été vu en **I.4.** que le point où la bille aboutira au second lancer se situera à une distance de l'ordre de $NR\varepsilon$ (N étant le nombre de cordes parcourues et R le rayon du disque) du point atteint au premier lancer (en supposant que k n'a pas changé). Cette distance est en général nettement supérieure à la largeur d'un secteur de 10 degrés. Si $\theta_2 = \alpha \theta_1$, α n'étant pas spécialement proche de 1, la disparité des positions finales sera encore bien plus considérable. La probabilité pour que θ_1 et θ_2 soient tous deux dans le même demi-intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ est $\frac{1}{2\alpha}$ et non $\frac{1}{4}$, parce que les deux valeurs θ_1 et θ_2 sont liées. Supposons maintenant que, au lieu d'avoir deux demi-intervalles de longueur 90 degrés, on ait découpé l'intervalle de 0 à 180 degrés en 10800 petits intervalles de longueur une minute d'angle, alternativement pairs et impairs. On peut représenter cela graphiquement en noircissant les intervalles impairs et en laissant en blanc les intervalles pairs :



alors, pour que θ_1 et θ_2 soient tous deux dans un intervalle pair, il faut que non seulement θ_1 soit tombé par hasard dans un intervalle pair, mais que $\alpha \theta_1$ soit lui aussi dans un intervalle pair : cela revient donc à découper l'intervalle de 0 à 180 degrés en $10800 \times \alpha$ petits intervalles de longueur $1/\alpha$ minute d'angle, alternativement pairs et impairs, et à exiger que θ_1 soit dans un intervalle pair de cette nouvelle série, qu'on peut représenter graphiquement de la même façon :



L'indépendance stochastique

Ainsi la condition que θ_1 et θ_2 soient tous deux dans un intervalle pair de la première série, équivaut à dire que θ_1 soit à la fois dans un intervalle pair de la première série et dans un intervalle pair de la deuxième série; autrement dit, θ_1 doit être dans une zone qui est blanche à la fois sur la première et la deuxième série, ce qu'on peut visualiser en superposant les deux séries :



Sur la ligne du bas, les deux séries sont complètement superposées, alors que sur les deux lignes rapprochées du haut on les voit encore séparées. La condition pour que θ_1 et θ_2 soient tous deux dans un intervalle pair de la première série se traduit par le fait que θ_1 se trouve dans une région restée blanche après la superposition. Puisque θ_1 est choisi au hasard, la probabilité pour qu'il en soit ainsi est simplement le rapport entre la somme des longueurs des régions restées blanches et la longueur totale de 180 degrés. Ce rapport n'est pas facile à calculer car il varie avec la finesse de la subdivision; mais il tend vers une limite quand la subdivision devient de plus en plus fine (des intervalles d'une minute d'angle sont en pratique assez fins pour être assimilés au cas limite). Voici par exemple ce que donnent graphiquement des subdivisions de plus en plus fines :



On voit que les régions restées blanches sont de plus en plus petites, mais en même temps de plus en plus nombreuses, de sorte que la proportion de blanc sur la longueur totale (qui est la probabilité pour que θ_1 et θ_2 soient tous deux dans un intervalle pair) tend vers une limite.

On peut calculer numériquement cette limite (il n'y a pas de formule analytique simple pour l'exprimer, mais on peut faire un petit programme simple qui la calcule numériquement); le tableau suivant en donne les valeurs x pour différentes valeurs de α . À titre de comparaison on a donné entre

parenthèses la valeur de $1/2\alpha$, qui était la probabilité pour que θ_1 et θ_2 soient tous deux dans le demi-intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

α	x	$(\frac{1}{2\alpha})$	α	x	$(\frac{1}{2\alpha})$
3/2	0.25	(0.333)	4/3	0.25	(0.375)
5/3	0.2667	(0.300)	5/4	0.25	(0.400)
6/5	0.25	(0.417)	7/5	0.2571	(0.357)
7/6	0.25	(0.428)	8/7	0.25	(0.4375)
9/7	0.254	(0.3889)	9/8	0.25	(0.444)
10/7	0.25	(0.350)	10/9	0.25	(0.450)
11/8	0.25	(0.3636)	11/9	0.2525	(0.409)
11/10	0.25	(0.454)	12/11	0.25	(0.458)
13/10	0.25	(0.3846)	13/11	0.2517	(0.423)
13/12	0.25	(0.4615)	14/11	0.25	(0.3928)
14/13	0.25	(0.4643)	15/11	0.2515	(0.3667)
15/13	0.2513	(0.4333)	15/14	0.25	(0.4667)
16/13	0.25	(0.406)	16/15	0.25	(0.469)
17/13	0.2511	(0.382)	17/14	0.25	(0.412)
17/15	0.2510	(0.441)	17/16	0.25	(0.471)
18/13	0.25	(0.361)	18/17	0.25	(0.472)
19/15	0.2509	(0.395)	19/16	0.25	(0.421)
19/17	0.2508	(0.447)	19/18	0.25	(0.4737)
129/113	0.25	(0.438)	79/73	0.25	(0.462)

On voit que la valeur de x est toujours proche de $\frac{1}{4}$; le plus souvent elle est même exactement $\frac{1}{4}$ (sur le tableau les valeurs marquées 0.25 correspondent au cas où x est *exactement* égal à $\frac{1}{4}$; on aurait marqué 0.2500 si c'était une valeur approchée à 10^{-4} près). Le cas où x est différent de $\frac{1}{4}$ provient de contraintes liées à la divisibilité des nombres entiers qui interviennent ici (α est fractionnaire); on pourrait montrer mathématiquement que x vaut toujours $\frac{1}{4}$ quand α est irrationnel, mais cela est sans intérêt pour la question qui nous préoccupe ici; il suffit de voir que x est presque toujours égal à $\frac{1}{4}$, et, même quand il n'est pas exactement égal à $\frac{1}{4}$, en est toujours proche.

Cela montre que l'indépendance stochastique n'est pas liée à l'existence d'une indépendance effective entre θ_1 et θ_2 , mais seulement à la finesse de la subdivision: avec la même relation liant θ_1 et θ_2 , on constate que la propriété du produit n'est pas vérifiée lorsque l'intervalle de 0 à 180 degrés est divisé en deux moitiés, et qu'il suffit de subdiviser en un grand nombre d'intervalles pour qu'elle le devienne. Toutefois, comme le montre le tableau précédent, il y a des exceptions: pour certaines valeurs de α , la propriété du produit n'est pas exactement vérifiée, ce qui reflète qu'une certaine dépendance stochastique subsiste; cela signifie simplement que le *brouillage*

L'indépendance stochastique

n'a pas été suffisant pour créer un hasard parfait. Le mécanisme exact de ce résidu de dépendance est une affaire d'arithmétique et de divisibilité due à la périodicité de la subdivision. Il suffirait de subdiviser en intervalles de longueur variable (mais comportant chacun une moitié paire et une moitié impaire) pour supprimer cette périodicité; et en effet, avec des subdivisions à pas variable, on supprimerait les contraintes de divisibilité et la valeur limite x serait alors toujours exactement $\frac{1}{4}$. Le brouillage serait alors devenu suffisant.

Or, pour le point d'arrivée de la bille, le brouillage est encore bien plus considérable: les 36 secteurs du disque ont une largeur de 10 degrés, ce qui est trop large pour que ce qui vient d'être mis en évidence se produise avec l'angle θ , mais largement suffisant pour que cela se produise avec le point d'arrivée de la bille, grâce à l'amplification caractéristique du chaos déterministe: si $\theta_2 = \alpha\theta_1$, le second point d'arrivée de la bille sera une fonction parfaitement déterminée du premier point d'arrivée, mais avec une variabilité telle que cette fois le brouillage sera parfait: toutes les contraintes de dépendance auront été *effacées* par le très grand nombre de rebondissements de la bille sur le bord du disque. La division du cercle en 36 secteurs de 10 degrés chacun équivaut à une subdivision infiniment fine à cause de l'amplification; la transformation du déterminisme en hasard est donc due à la finesse effective de la subdivision. On peut ainsi deviner que le brouillage par le chaos se ramène toujours d'une manière ou d'une autre à raffiner des subdivisions.

Ce n'est bien sûr pas par hasard que la roulette, même sous la forme d'un modèle très simplifié, illustre si bien tous les mécanismes du hasard. Toutes nos discussions montrent que la roulette est conçue de manière à accumuler la plus grande variété possible de *brouillages* dans un processus qui par nature est déterministe. On peut dire que la roulette est une véritable machine à effacer la causalité. Un dé est aussi un système destiné à effacer la causalité, mais moins sophistiqué; le roulement du dé, par exemple, a pour fonction de changer un grand nombre de fois la face dirigée vers le haut avant l'arrêt, ce qui joue le même rôle que les nombreuses réflexions de la bille de la roulette, à savoir créer l'amplification de la sensibilité aux conditions initiales. L'effacement des causes est d'autant plus radical que les subdivisions sont plus fines comparées à la variabilité des paramètres; cette finesse relative peut être renforcée soit en augmentant le nombre des subdivisions (c'est pourquoi la roulette comporte 36 chiffres plutôt que 5, 7, ou 10; dans le cas du dé cela reviendrait à faire des faces plus nombreuses et plus petites), soit en augmentant l'amplification de la sensibilité aux conditions initiales (c'est pourquoi la roulette agence des mouvements très chaotiques). Dans le cas d'une bille de roulette, la sensibilité aux conditions

initiales du mouvement est telle que pour pouvoir prédire le point d'arrivée à partir des lois de la Mécanique classique, il faudrait contrôler la position et la vitesse initiales de la bille ainsi que la forme exacte du plateau avec une précision bien plus grande que la dimension des atomes, c'est-à-dire avec une précision telle que la Mécanique classique ne pourrait même plus être tenue pour valide.

L'indépendance stochastique n'est donc pas l'expression exacte d'une indépendance causale réelle et absolue; elle résulte d'un *effacement* de la causalité par des procédés de brouillage adéquats (subdivisions fines et amplification). Ces procédés de brouillage peuvent être aussi bien artificiels (roulette, dé, fonctions **random**, publication d'une information sur le Net, etc.) que naturels (agitation thermique des molécules, combinaison des gènes, dispersion des semences par le vent).

IV.3. Probabilités conditionnelles.

Lorsque deux événements A et B ne sont pas stochastiquement indépendants, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{P}(AB) \neq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, on peut introduire le rapport

$$\mathcal{P}(A | B) = \frac{\mathcal{P}(AB)}{\mathcal{P}(B)} \quad (IV.1.)$$

Si A et B étaient stochastiquement indépendants, on aurait bien sûr $\mathcal{P}(A | B) = \mathcal{P}(A)$. On dit que ce rapport est la **probabilité conditionnelle** de A par rapport à B ; dans le langage imagé, on dit aussi que c'est la probabilité conditionnelle de A "sachant que B s'est produit". Le concept mathématique ainsi introduit est évidemment censé refléter l'idée suggérée par le langage imagé, à savoir que la probabilité conditionnelle est la probabilité sur un ensemble restreint d'épreuves (celles qui vérifient une condition, exprimée par le langage imagé).

On peut aussi écrire la relation (IV.1.) sous la forme

$$\mathcal{P}(A | B) = \frac{\#(AB)}{\#B}$$

Si on la rapproche de (I.2.) cela signifie que cette fois on considère l'événement AB dans l'espace des épreuves B . En interprétant, cela revient à dire qu'on traite le problème suivant: parmi l'ensemble des épreuves équiprobables qui constituent l'événement B , quelle est la proportion de celles qui satisfont en outre à l'événement A ? Autrement dit, il s'agit de la probabilité pour que A se produise, mais sur l'espace restreint des épreuves qui correspondent à la réalisation de B . Cela exprime bien l'idée de la probabilité conditionnelle de A , sachant que B s'est produit. L'indépendance

L'indépendance stochastique

stochastique entre A et une famille B_i peut donc se traduire en disant que la probabilité conditionnelle de A sachant que B_i s'est produit, est la même pour tous les B_i .

Du point de vue purement formel, une probabilité conditionnelle est donc simplement une probabilité sur un espace d'épreuves restreint. Dans n'importe quel problème de probabilités, on doit construire un espace d'épreuves Ω adapté à la résolution du problème, et nous voyons ici qu'on peut toujours considérer Ω comme une partie d'un espace plus gros, les probabilités définies sur Ω étant alors des probabilités conditionnelles sur le plus grand espace. Le meilleur choix de Ω est toujours le plus petit, mais il est peu commode de modifier Ω en cours de problème. Le meilleur Ω est donc le plus petit possible, parmi ceux qui contiennent tous les événements étudiés.

Pour illustrer cela, prenons une urne qui contient p bulletins OUI et q bulletins NON, donc $n = p + q$ bulletins en tout. On tire au hasard un bulletin; il est intuitivement évident que la probabilité pour que ce bulletin porte OUI est p/n , et la probabilité pour qu'il porte NON est q/n ; un calcul rigoureusement dérivé des principes aboutirait, heureusement, au même résultat. Si on fait deux tirages successifs (sans remplacement), il est plus difficile de répondre immédiatement avec la seule perception intuitive, et le calcul rigoureusement dérivé des principes peut être préférable; il passe par le dénombrement systématique: pour un seul tirage on pouvait prendre pour espace Ω l'ensemble des bulletins de l'urne, pour deux tirages il faut prendre l'ensemble des couples de bulletins (mais sans répétition). D'après II.2. son cardinal est $n(n - 1)$. Le nombre de couples formés de deux bulletins OUI est $p(p - 1)$, le nombre de couples formés de deux bulletins NON est $q(q - 1)$, et le nombre de couples formés d'un bulletin OUI et d'un bulletin NON est pq (quel que soit l'ordre). Donc la probabilité d'avoir deux bulletins OUI en deux tirages est $p(p - 1)/n(n - 1)$, celle d'avoir deux bulletins NON est $q(q - 1)/n(n - 1)$, et celle d'avoir un OUI puis un NON (ou l'inverse) est $pq/n(n - 1)$.

Il n'y a pas indépendance stochastique entre les tirages (il y en aurait si on effectuait des tirages *avec* remplacement). Cela peut se constater en introduisant les événements relatifs à chaque tirage, tout comme on avait introduit les événements relatifs à chaque boule dans l'exemple discuté en IV.1.

On posera donc :

A_1 : "le premier bulletin est un OUI"

B_1 : "le premier bulletin est un NON"

A_2 : "le deuxième bulletin est un OUI"

B_2 : “le deuxième bulletin est un NON”

L'événement “les deux bulletins sont des OUI sera alors A_1A_2 , l'événement “les deux bulletins sont des NON sera B_1B_2 , l'événement “le premier bulletin est un OUI et le deuxième est un NON” sera A_1B_2 , et l'événement “le premier bulletin est un NON et le deuxième est un OUI” sera A_2B_1 .

On a ainsi, comme cela a été dit plus haut :

$$\mathcal{P}(A_1) = \frac{p}{n} \quad \mathcal{P}(B_1) = \frac{q}{n}$$

$$\mathcal{P}(A_1A_2) = \frac{p(p-1)}{n(n-1)}$$

$$\mathcal{P}(A_1B_2) = \frac{pq}{n(n-1)}$$

$$\mathcal{P}(B_1A_2) = \frac{pq}{n(n-1)}$$

$$\mathcal{P}(B_1B_2) = \frac{q(q-1)}{n(n-1)}$$

Les probabilités $\mathcal{P}(A_2)$ et $\mathcal{P}(B_2)$ n'avaient pas encore été évoquées avant ; mais on les obtient sans difficulté : $A_2 = A_2A_1 \cup A_2B_1$ et A_1, B_1 sont disjoints, donc

$$\mathcal{P}(A_2) = \mathcal{P}(A_2A_1) + \mathcal{P}(A_2B_1) = \frac{p(p-1)}{n(n-1)} + \frac{pq}{n(n-1)} = \frac{p}{n}$$

$$\mathcal{P}(B_2) = \mathcal{P}(B_2A_1) + \mathcal{P}(B_2B_1) = \frac{pq}{n(n-1)} + \frac{q(q-1)}{n(n-1)} = \frac{q}{n}$$

On peut voir que la règle du produit n'est pas satisfaite :

$$\mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2) = \frac{p}{n} \times \frac{p}{n} \neq \frac{p(p-1)}{n(n-1)}$$

$$\mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(B_2) = \frac{p}{n} \times \frac{q}{n} \neq \frac{pq}{n(n-1)}$$

$$\mathcal{P}(B_1) \times \mathcal{P}(A_2) = \frac{q}{n} \times \frac{p}{n} \neq \frac{pq}{n(n-1)}$$

$$\mathcal{P}(B_1) \times \mathcal{P}(B_2) = \frac{q}{n} \times \frac{q}{n} \neq \frac{q(q-1)}{n(n-1)}$$

Calculons alors les probabilités conditionnelles $\mathcal{P}(A_2 | A_1)$, $\mathcal{P}(B_2 | A_1)$,

L'indépendance stochastique

$\mathcal{P}(A_2 | B_1)$, et $\mathcal{P}(B_2 | B_1)$. On trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A_2 | A_1) &= \frac{\mathcal{P}(A_2A_1)}{\mathcal{P}(A_1)} = \frac{p(p-1)/n(n-1)}{p/n} = \frac{p-1}{n-1} \\ \mathcal{P}(A_2 | B_1) &= \frac{\mathcal{P}(A_2B_1)}{\mathcal{P}(B_1)} = \frac{pq/n(n-1)}{q/n} = \frac{p}{n-1} \\ \mathcal{P}(B_2 | A_1) &= \frac{\mathcal{P}(B_2A_1)}{\mathcal{P}(A_1)} = \frac{pq/n(n-1)}{q/n} = \frac{q}{n-1} \\ \mathcal{P}(B_2 | B_1) &= \frac{\mathcal{P}(B_2B_1)}{\mathcal{P}(B_1)} = \frac{q(q-1)/n(n-1)}{q/n} = \frac{q-1}{n-1}\end{aligned}$$

Cette suite de calculs était fastidieuse, quoique facile, mais maintenant nous pouvons *interpréter*.

Par exemple $\mathcal{P}(A_2 | A_1)$, la probabilité conditionnelle pour que A_2 se produise sachant que A_1 s'est produit, est dans le langage imagé "la probabilité pour que le second bulletin tiré soit un OUI, sachant que le premier était un OUI". Si on raisonne selon l'intuition première, on dira que si le premier bulletin tiré a été un OUI il reste dans l'urne $p-1$ OUI et q NON; donc la probabilité de tirer un bulletin OUI la deuxième fois est toujours le rapport du nombre de bulletins OUI au nombre total de bulletins, soit $(p-1)/(n-1)$. De même, si le premier bulletin tiré a été un NON, il reste dans l'urne $n-1$ bulletins, dont p OUI et $q-1$ NON, de sorte que la probabilité de tirer un OUI est cette fois $p/(n-1)$.

L'intuition première que tout le monde peut avoir a priori ne permet pas de voir immédiatement et de manière évidente quelle doit être la valeur de probabilités telles que $\mathcal{P}(A_1A_2)$, $\mathcal{P}(A_1B_2)$, $\mathcal{P}(B_1A_2)$, et $\mathcal{P}(B_1B_2)$; pour les trouver, il a fallu dénombrer les couples de bulletins en utilisant II.2. Par contre il était immédiatement évident que les probabilités $\mathcal{P}(A_1)$ et $\mathcal{P}(B_1)$ valent respectivement p/n et q/n . Il y a dans tous les domaines des choses qu'on peut percevoir par intuition immédiate et d'autres qu'on ne peut que trouver par un raisonnement complexe, c'est-à-dire composé de plusieurs déductions dont une seule à la fois peut être reconnue comme immédiatement évidente, et il en est également ainsi en Calcul des probabilités. Or il est aussi immédiatement évident que la probabilité pour que le second bulletin tiré soit un OUI *sachant que le premier était un OUI* est $(p-1)/(n-1)$, puisque cela résulte directement, tout comme le calcul de $\mathcal{P}(A_1)$, du fait que le nombre de bulletins OUI présents dans l'urne est $p-1$. Pour dénombrer tous les couples possibles de bulletins, il faut déjà faire appel à des notions mathématiques telles que le produit cartésien de deux ensembles, qui sont abstraites et ne relèvent pas de l'évidence immédiate.

Il faut en effet *déduire* le nombre de couples possibles à partir du nombre donné de bulletins, alors que relier la probabilité et le quotient de p par n (ou de $p - 1$ par $n - 1$) relève de l'intuition première.

Ci-dessus, nous avons présenté le calcul de $\mathcal{P}(A_2 | A_1)$ de telle façon qu'il se déduise, par la définition mathématique (IV.1.), du calcul préalable, et non évident, de $\mathcal{P}(A_2 A_1)$. En procédant ainsi, nous retrouvons un résultat qui aurait pu être obtenu directement par l'intuition première. Cette façon de procéder est didactiquement intéressante, car elle montre que la théorie marche. On fait souvent cela dans l'enseignement : retrouver par une voie indirecte et compliquée un résultat qui était évident a priori. C'est très mauvais pour calculer, mais très bon pour comprendre. En effet, lorsqu'on expose une théorie élaborée, sous forme axiomatique, les étudiants ont le sentiment d'un savoir qui tombe du ciel. Mais les mathématiciens du passé qui ont créé de toutes pièces ces concepts mathématiques (espaces d'épreuves, indépendance stochastique, probabilités conditionnelles, etc.) sont partis de l'intuition première et ont construit peu à peu la théorie par tâtonnements. Le critère essentiel de validité qui guidait les créateurs était que la bonne théorie serait celle qui, dans tous les cas où l'intuition première permet de calculer un résultat, concorderait avec cette intuition première. En Physique, il faut que la théorie soit confirmée par l'expérience : chaque fois que la théorie permet de calculer un résultat et l'expérience de le mesurer, les deux résultats doivent concorder. Il en va de même pour le Calcul des probabilités, sauf que ce qui joue le rôle de l'expérience est l'intuition première. En effet, le Calcul des probabilités n'est pas une science expérimentale ; on ne *mesure* jamais les probabilités : c'est, comme pour la géométrie, à partir des symétries fondamentales qu'on postule l'équiprobabilité d'un ensemble d'épreuves (voir chapitre I). Si dans beaucoup d'applications du Calcul des probabilités on recoupe les faits expérimentaux, c'est parce que les symétries fondamentales (de l'espace-temps ou des particules quantiques, par exemple) sont d'origine expérimentale. Mais à l'intérieur du Calcul des probabilités ces symétries fondamentales sont postulées et on en déduit des *probabilités a priori*. C'est pourquoi le rôle joué par l'intuition première est absolument essentiel et constitue le véritable fondement du Calcul des probabilités. Si la définition (IV.1.) permet de retrouver, par l'application rigoureuse et abstraite des principes de base, ce que l'intuition tient pour évident, en l'occurrence que $\mathcal{P}(A_2 | A_1) = (p - 1) / (n - 1)$, c'est un signe que la théorie est bonne. Mais s'il en est ainsi, c'est bien entendu parce que tout avait été fabriqué pour qu'il en soit ainsi : le choix du modèle Ω et l'équiprobabilité des épreuves que ce choix sous-entend contient *en germe* le résultat. La théorie a été faite exprès pour qu'il en soit ainsi.

Cela dit, si retrouver par la théorie un résultat qui était évident a priori

L'indépendance stochastique

est conceptuellement instructif, on peut aussi utiliser le chemin inverse dans un but strictement pragmatique. Supposons que nous voulions calculer $\mathcal{P}(A_2A_1)$ (dont la valeur ne se voit pas immédiatement à partir de l'intuition première). Au lieu de procéder par dénombrement comme nous l'avons fait, on pourrait aussi suivre le chemin inverse : il est *évident* que $\mathcal{P}(A_1) = p/n$; il est *évident aussi* que $\mathcal{P}(A_2 | A_1) = (p - 1) / (n - 1)$. En inversant la définition (IV.1.) on obtient

$$\mathcal{P}(A_2A_1) = \mathcal{P}(A_2 | A_1) \times \mathcal{P}(A_1) \quad (IV.2.)$$

et on en déduit alors que $\mathcal{P}(A_2A_1) = \frac{p}{n} \cdot \frac{p-1}{n-1}$, c'est-à-dire la même chose que ce qu'on avait obtenu par dénombrement direct.

Cet exemple montre l'intérêt pratique des probabilités conditionnelles. En pratique (IV.2.) est plus intéressant et plus fréquemment utilisé que (IV.1.), car il arrive souvent, du moins dans les problèmes de niveau élémentaire, que les probabilités conditionnelles soient plus "évidentes" ou en tous cas plus faciles à calculer que celles des intersections, et les probabilités des intersections d'événements s'obtiennent alors par produits successifs.

On remarquera aussi comment nous avons calculé $\mathcal{P}(A_2)$ et $\mathcal{P}(B_2)$. Contrairement aux probabilités $\mathcal{P}(A_1)$ et $\mathcal{P}(B_1)$, il n'y a aucune évidence immédiate, car on ignore ce qui s'est passé au premier tirage et par conséquent on ne connaît pas le nombre de bulletins OUI présents dans l'urne au moment où on effectue le second tirage. Lorsqu'on avait à évaluer $\mathcal{P}(A_2 | A_1)$ ou $\mathcal{P}(A_2 | B_1)$ on pouvait connaître le nombre de bulletins OUI présents dans l'urne car on se plaçait dans l'hypothèse où le premier tirage était donné ; mais si on veut connaître la probabilité d'avoir OUI au second tirage sans savoir ce qui s'est produit au premier, il n'y a plus d'argument immédiatement évident. L'intuition première peut donner le sentiment vague que la probabilité d'avoir OUI au deuxième tirage doit être une sorte de moyenne sur les deux possibilités qui peuvent se produire au premier tirage. Mais pour donner un contenu quantitatif clair et solide à ce sentiment vague, il faut un raisonnement mathématique plus sophistiqué, comme celui que nous avons effectivement suivi : ce raisonnement consiste à décomposer l'événement A_2 en deux parties disjointes A_2A_1 et A_2B_1 dont on peut calculer séparément les probabilités ; alors $\#A_2 = \#(A_2A_1) + \#(A_2B_1)$, ou $\mathcal{P}(A_2) = \mathcal{P}(A_2A_1) + \mathcal{P}(A_2B_1)$. Mais si on utilise (IV.2.) on peut écrire cela sous la forme

$$\mathcal{P}(A_2) = \mathcal{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2 | B_1) \cdot \mathcal{P}(B_1) \quad (IV.3.)$$

formule qui exprime effectivement la probabilité de A_2 comme une moyenne

des probabilités conditionnelles sur les deux possibilités qui peuvent se produire au premier tirage; les coefficients qui interviennent dans ce calcul de moyenne sont les probabilités respectives de chacune de ces deux possibilités.

L'intérêt de cette formule est qu'elle permet de calculer une probabilité non évidente a priori, par composition de probabilités évidentes. Mais elle n'est rien d'autre qu'une manière un peu sophistiquée de répéter que la probabilité de la réunion de deux événements disjoints est la somme des probabilités de chacun.

Cette formule (IV.3.) peut d'ailleurs être généralisée comme suit. On découpe Ω en r morceaux disjoints $E_1, E_2, E_3, \dots, E_r$ (une telle famille d'événements disjoints et dont la réunion est Ω tout entier est appelée une *famille exhaustive d'événements*). Soit A un événement quelconque. Alors on peut dire que les événements $AE_1, AE_2, AE_3, \dots, AE_r$ sont également disjoints et que leur réunion est A . On en déduit que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(AE_1) + \mathcal{P}(AE_2) + \mathcal{P}(AE_3) + \dots + \mathcal{P}(AE_r)$, ou encore

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A | E_1) \cdot \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(A | E_2) \cdot \mathcal{P}(E_2) + \\ + \dots + \mathcal{P}(A | E_r) \cdot \mathcal{P}(E_r) \end{aligned} \quad (IV.4.)$$

Ceci est vrai quel que soit l'événement A et quelle que soit la famille exhaustive $E_1, E_2, E_3, \dots, E_r$, mais pour en tirer un résultat intéressant dans un problème donné il faut bien sûr choisir astucieusement les E_j .

Nous verrons une application importante de cette formule au chapitre **VIII** (Processus en cascade): voir problème N°2. Nous en discuterons une autre application (à la génétique) dans la section suivante (IV.4). On peut pratiquer le Calcul des probabilités sans jamais y recourir, en décomposant l'événement A en la réunion disjointe des AE_j . Mais la discussion ci-dessus montre que les probabilités conditionnelles sont souvent plus commodes ou plus évidentes que celles des intersections: c'est ce qui rend cette formule très pratique dans beaucoup de cas.

Plus haut nous avons justifié l'introduction des probabilités conditionnelles par un argument de commodité: dans l'exemple des bulletins qu'on sort de l'urne, la valeur de $\mathcal{P}(A_2)$ n'était pas "évidente a priori", tandis que $\mathcal{P}(A_1)$ et $\mathcal{P}(A_2 | A_1)$ l'étaient.

Pour *vraiment* comprendre les probabilités conditionnelles il est utile de revenir sur les raisons de cette évidence. Dès le début de cet ouvrage, nous avons appris que pour calculer une probabilité il fallait opérer de la manière suivante:

- a) trouver l'ensemble Ω de toutes les épreuves équiprobables possibles;
- b) traduire l'événement A dont on cherche la probabilité en terme de sous-ensemble de Ω .

L'indépendance stochastique

c) dénombrer Ω et A .

Les probabilités évidentes sont celles où le quotient $\#A / \#\Omega$ est tout de suite évident, sans qu'on ait besoin de réfléchir pour effectuer a), b), c). Il en est ainsi pour la probabilité de tirer un bulletin OUI dans une urne qui en contient p , sur n bulletins en tout, car on voit tout de suite que $\#\Omega = n$ et $\#A = p$. Les cardinaux sont évidents avant même d'avoir réfléchi à la nature des éléments. Lorsque les épreuves sont des mots de n lettres, des permutations d'un ensemble, ou des choses encore plus compliquées, il faut d'abord un raisonnement abstrait (les étapes a et b ci-dessus) pour comprendre que Ω est bien l'ensemble des mots de n lettres. Ensuite il faut appliquer une des formules de dénombrement du chapitre **II**. Ces formules ne peuvent pas être devinées en vitesse, elles font partie des connaissances accumulées par les mathématiciens au cours des siècles. En outre elles ne suffisent pas à elles seules et leur application ne constitue que l'étape c) : auparavant il faut avoir fait le travail de modélisation, qui constitue les étapes a) et b). Même dans le cas très simple de A_1A_2 (tirer deux fois de suite un OUI), il faut réfléchir un peu, et abstraitement, pour comprendre que Ω est l'ensemble de tous les tirages de deux bulletins distincts, et qu'il relève du deuxième cas de dénombrement (**II.2.** tirages sans remise) d'où $\#\Omega = n(n - 1)$; il faut encore recourir une seconde fois au même type de raisonnement abstrait pour $\#(A_1A_2) = p(p - 1)$. C'est pourquoi une personne n'ayant jamais étudié le Calcul des probabilités et à peine fait de mathématiques dans sa vie pourra deviner la valeur de $\mathcal{P}(A_1)$, mais pas celle de $\mathcal{P}(A_1A_2)$; et encore moins celle de $\mathcal{P}(A_2)$, car pour calculer cette dernière il faut en outre la décomposition ensembliste $A_2 = A_1A_2 \cup B_1A_2$.

Or la même personne n'ayant jamais étudié le calcul des probabilités comprendra aisément que si le premier bulletin tiré était un OUI, la probabilité de tirer un OUI une seconde fois est $(p - 1)/(n - 1)$. Les étapes a) et b) sont ici aussi inutiles, car il saute aux yeux que pour ce problème l'ensemble des épreuves est l'ensemble des bulletins restants, et l'événement l'ensemble des bulletins OUI restants. Si on considère ce sous-problème : "on a déjà tiré un bulletin OUI au premier tirage, quelle est la probabilité d'en tirer un au second tirage" et qu'on veut malgré tout passer par a) et b), on prendra pour Ω l'ensemble des $n - 1$ bulletins restant après le premier tirage, et pour A l'ensemble des $p - 1$ bulletins OUI restant après le premier tirage : c'est en tous cas la démarche implicite dans le raisonnement naïf. Toutefois, si on veut coûte que coûte procéder selon les règles formelles a), b), c), il vaut mieux prendre en compte pour ce premier tirage tous les cas possibles, ce qui revient à prendre pour Ω l'ensemble de tous les tirages de deux bulletins dont le premier est OUI, et pour A l'ensemble de tous les tirages de deux bulletins qui sont tous deux des OUI; autrement dit, on prend pour espace

des épreuves A_1 et pour événement $A = A_1A_2$. Comparés (respectivement) à l'espace de tous les tirages de deux bulletins, et à l'événement "le second est un OUI", ces deux ensembles s'obtiennent en ne retenant que les épreuves qui satisfont la condition "le premier tirage est OUI".

Dans ce problème "réduit", où l'espace des épreuves est A_1 et l'événement A_1A_2 , la probabilité s'obtient toujours selon la formule *cardinal de l'événement* sur *cardinal de l'espace*, mais cela devient alors exactement ce que dit IV.1.

Le but de ces remarques est le suivant: il n'y a absolument aucune différence de nature entre une probabilité conditionnelle et une probabilité tout court. On ne parle de probabilité conditionnelle que si on se situe dans un problème donné, et qu'on y distingue un sous-problème. N'importe quel problème de probabilité peut toujours être considéré comme un sous-problème d'un problème plus vaste, de sorte qu'on puisse le traiter en termes de probabilités conditionnelles. Par exemple, dans le problème des bulletins on peut toujours supposer qu'avant le premier tirage avait eu lieu un tirage $N^{\circ}0$. La probabilité p/n de tirer un bulletin OUI au premier tirage est identique à la probabilité conditionnelle de tirer ce bulletin OUI sachant qu'au tirage $N^{\circ}0$ on avait tiré un NON, et qu'il y avait alors $n + 1$ bulletins en tout dont p OUI, ou à la probabilité conditionnelle de tirer ce bulletin OUI sachant qu'au tirage $N^{\circ}0$ on avait tiré un OUI, et qu'il y avait alors $n + 1$ bulletins en tout dont $p + 1$ OUI.

IV. 4. Relativité du hasard.

Ce constat concernant la nature essentiellement relative des probabilités conditionnelles a des conséquences pratiques. Jusqu'ici, nous avons toujours rencontré des problèmes où la première chose à faire était de chercher les invariances afin de déterminer a priori ce qui est équiprobable. (en langage imagé "le niveau où intervient le hasard pur"). Dans le problème longuement discuté ci-dessus, où on tirait un bulletin au hasard dans une urne, il était aisé de postuler que tous les bulletins sont équiprobables, parce que nous savions que nous tirions des bulletins individuels. Transformons un peu l'expérience: imaginons qu'à l'intérieur de l'urne se trouvent, non des bulletins, mais des dés: une partie des dés est blanche, les autres sont rouges; disons p dés blancs et q dés rouges, le nombre total de dés étant $n = p + q$. Les dés rouges ont une face gagnante: si un dé rouge est tiré au sort, et qu'en le faisant rouler il marque "six", je gagne. Mais les dés blancs n'ont aucune face gagnante. Il est aisé de déterminer l'espace des épreuves Ω correspondant, c'est l'ensemble de toutes les faces de dés possibles, dont le nombre est $6n$: $\#\Omega = 6n$. L'événement A "je gagne" est l'ensemble des

L'indépendance stochastique

faces gagnantes, c'est-à-dire l'ensemble des faces "six" de dés rouges, soit q faces en tout. La probabilité de gagner est donc $\#A / \#\Omega = q/6n$.

Nous avons ainsi raisonné une fois de plus par équiprobabilité a priori, comme nous le faisons depuis le début. Ici, le "niveau où intervenait le hasard pur" était le choix d'une face de dé parmi $6n$ faces équiprobables.

Mais supposons que ce niveau nous reste caché; par exemple, supposons que nous ignorions ce qui se trouve à l'intérieur de l'urne, que le tirage d'un dé se fasse à l'intérieur de l'urne et à l'abri des regards, soit par un mécanisme caché, soit par un génie qui habite l'urne. Chaque fois que nous frottons l'urne, le génie tire au hasard un dé: si ce dé est rouge, le génie le jette hors de l'urne puis nous (qui sommes à l'extérieur) le lançons; si le dé est blanc, le génie ne se manifeste pas et rien ne sort de l'urne.

Dans cette seconde version de l'expérience il nous serait difficile de deviner comment intervient le hasard pur. En effet, rien ne nous dit que la décision du génie de lancer un dé hors de l'urne, provient d'un tirage entre des dés équiprobables; nous ignorons qu'il y a aussi des dés blancs; le constat que les dés qui sortent sont toujours rouges ne permet aucune déduction. Certes, nous voyons bien comment intervient le hasard dans la partie visible du processus: lorsque nous lançons le dé que le génie nous a jeté, nous sommes assurés que ses six faces sont équiprobables; mais la décision du génie de lancer un dé ou non, peut être attribuée à n'importe quelle forme de hasard. Et nous n'avons aucun moyen de savoir a priori quelle va être la probabilité pour qu'il lance un dé hors de l'urne; nous ne pouvons que la mesurer statistiquement: en frottant un très grand nombre de fois l'urne, on peut par exemple constater empiriquement que dans 30% des cas, un dé est jeté hors de l'urne.

Le point essentiel est alors le suivant: malgré notre ignorance de la nature du phénomène, nous pouvons calculer la probabilité de gagner en utilisant la formule IV.4, à condition d'y introduire les probabilités empiriques mesurées. Soit en effet S l'événement "un dé sort de l'urne", R l'événement "rien ne sort", et G l'événement "je gagne". En utilisant IV.4, on peut dire que

$$\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(G | S) \cdot \mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(G | R) \cdot \mathcal{P}(R) = \frac{1}{6} \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.7 = 0.05$$

Le raisonnement a priori aurait donné $q/6n$, donc (pour $q/n = 0.3$), le même résultat. Du moment que les probabilités $\mathcal{P}(S)$ et $\mathcal{P}(R)$ sont connues (peu importe que ce soit a priori ou empiriquement), la probabilité $\mathcal{P}(G)$ est déterminée *indépendamment de la manière dont le hasard est intervenu dans l'urne*. Si par exemple le choix aléatoire effectué à notre insu par le

génie dans l'urne était d'une grande complexité, de sorte que le "véritable" espace Ω aurait un cardinal énorme, que le quotient p/n serait une fraction compliquée (c'est-à-dire que p et n seraient tous deux de très grands entiers), mais proche de 0.3, le calcul ci-dessus, quoique approché, serait tout aussi correct. Mathématiquement, la formule *IV.4* se *démontre* à partir de l'existence d'un espace des épreuves. Mais, une fois fixées les probabilités $\mathcal{P}(E_j)$, la probabilité $\mathcal{P}(A)$ sera déterminée indépendamment de la nature de l'espace Ω . On peut même oublier qu'il existe quelque part un niveau où intervient le pur hasard. Si toutefois ce niveau n'*existe réellement pas*, alors la formule *IV.4* peut perdre toute validité. C'est ce qui se produit dans la Mécanique quantique, lorsque des amplitudes interfèrent (voir une discussion sur ce point à la section **XIII.3**).

Ainsi la formule *IV.4* est utilisable dans les cas où les invariances ne sont pas intégralement connues, de sorte qu'une partie seulement des probabilités peuvent être calculées a priori et que les autres, d'origine empirique, ne peuvent être déterminées qu'a posteriori par des mesures statistiques.

Autrement dit, la formule *IV.4* permet de remplacer une partie des probabilités a priori par des probabilités empiriques. Cet expédient est inévitable lorsqu'on ne peut pas accéder au niveau où intervient une invariance (cf. la discussion de la section **I.2**).

Nous allons immédiatement appliquer cela à un problème de génétique, celui des mariages consanguins. Imaginons que dans une population on isole un couple de parents, de sorte que les enfants de ces parents se reproduisent ensuite entre eux. Nous nous intéressons à la manière dont un gène particulier, G , se combinera à ses compagnons allèles du même locus (voir **III.5** et **III.6**). Nous supposons d'abord que la combinaison homozygote GG n'est pas invalidante et que les individus GG accèdent autant que les autres à la procréation.

Plusieurs cas de figure peuvent se présenter. Chacun des deux parents peut appartenir à l'une des quatre catégories XX , XG , GX , GG . La distinction entre XG et GX ne correspond à aucune différence biologique entre les individus porteurs, mais représente le choix qui s'opère entre les deux chromosomes au moment de la fécondation : dire que le père est XG signifie que c'est le chromosome porteur de X qui sera retenu pour constituer une nouvelle paire : la première des deux lettres correspond au chromosome retenu. Ainsi il y aura seize catégories pour le couple. Si les parents sont tous deux GX , les enfants seront tous GG , et par conséquent si ces enfants se croisent ensuite entre eux les petits enfants le seront aussi ; si les parents sont XG et GX (ou inversement), aucun enfant ne sera GG mais un enfant sur deux sera GX (les autres seront alors XG). Il y aura alors une chance sur

L'indépendance stochastique

quatre que les petits-enfants soient GG . Si les parents sont XX et GX (ou XX et XG), les enfants seront aussi pour moitié XG et pour l'autre moitié XG , et donc les petits-enfants auront aussi une chance sur quatre d'être GG . En regroupant systématiquement les différents cas qui se présentent on peut distinguer les trois événements suivants, selon la catégorie des parents :

$$\begin{aligned}
 E_1: & \quad GG + GG, GG + GX, GX + GG, \text{ ou } GX + GX \\
 E_2: & \quad GG + XX, GG + XG, XG + GG, XX + GG, \\
 & \quad GX + XX, GX + XG, XG + GX, \text{ ou } XX + GX \\
 E_3: & \quad XG + XG, XG + XX, XX + XG, \text{ ou } XX + XX
 \end{aligned}$$

Dans chacun de ces trois événements on aura une probabilité spécifique pour que les petits-enfants soient GG :

parents	enfants	petits-enfants
E_1	100% GG	100% GG
E_2	50% GX et 50% XG	25% GG
E_3	100% XX	0% GG

Si on appelle E l'événement "un petit-enfant est GG ", on peut interpréter le nombre qui figure dans la troisième colonne de ce tableau comme la probabilité conditionnelle de E sachant que E_1 , E_2 , ou E_3 s'est produit. Ainsi

$$\mathcal{P}(E | E_1) = 1 \quad ; \quad \mathcal{P}(E | E_2) = 0.25 \quad ; \quad \mathcal{P}(E | E_3) = 0 \quad ;$$

Pour connaître la probabilité de E lorsque les parents sont pris au hasard dans la population (donc on ignore s'ils sont dans E_1 , dans E_2 , ou dans E_3), on utilise IV.4, ce qui donne :

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E | E_1) \cdot \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E | E_2) \cdot \mathcal{P}(E_2) + \mathcal{P}(E | E_3) \cdot \mathcal{P}(E_3)$$

Tout comme pour l'expérience avec le génie caché dans l'urne, on ne peut pas, dans ce problème, trouver $\mathcal{P}(E_1)$, $\mathcal{P}(E_2)$ et $\mathcal{P}(E_3)$ en cherchant des épreuves équiprobables a priori car les mécanismes d'apparition des gènes G et X nous sont inconnus et certainement si complexes que nous serions bien incapables d'y trouver des invariances. Conformément aux remarques faites au début de cette section, on peut cependant ignorer ces invariances, il n'est même pas nécessaire qu'il existe un moyen de les mettre en évidence. Il suffit de remplacer les coefficients $\mathcal{P}(E_j)$ par leurs valeurs observées. Ainsi, l'espace Ω reste ici inconnu, mais nous pouvons nous en passer en utilisant des données empiriques. Celles-ci nous fournissent la valeur du nombre ε (la proportion d'individus GG dans la population, d'où nous déduisons par la loi de Hardy-Weinberg que si on choisit au hasard un individu dans la population, la probabilité pour qu'il soit GG sera ε , la probabilité pour qu'il

soit hétérozygote GX/XG sera $2(\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon)$, et la probabilité pour qu'il soit XX sera $\eta = 1 - 2\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon = (1 - \sqrt{\varepsilon})^2$. Si les couples de parents sont pris au hasard, la probabilité pour que par exemple les deux parents soient GG sera ε^2 . L'événement E_1 du tableau ci-dessus aura donc la probabilité

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(GG + GG) + \mathcal{P}(GG + GX) + \mathcal{P}(GX + GG) + \mathcal{P}(GX + GX) \\ &= \varepsilon^2 + \varepsilon \cdot \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \varepsilon + \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \\ &= \varepsilon^2 + x\varepsilon + \frac{x^2}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

L'événement E_2 aura la probabilité

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(GG + XG) + \mathcal{P}(GG + XX) + \mathcal{P}(GX + XG) + \mathcal{P}(GX + XX) + \\ + \mathcal{P}(XG + GG) + \mathcal{P}(XG + GX) + \mathcal{P}(XX + GG) + \mathcal{P}(XX + GX) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{x}{2} + \varepsilon \cdot \eta + \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \eta + \frac{x}{2} \cdot \varepsilon + \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} + \eta \cdot \varepsilon + \eta \cdot \frac{x}{2} \\ &= 2(\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon) = x \end{aligned}$$

Enfin, l'événement E_3 aura la probabilité

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(XG + XG) + \mathcal{P}(XG + XX) + \mathcal{P}(XX + XG) + \mathcal{P}(XX + XX) \\ &= \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \eta + \eta \cdot \frac{x}{2} + \eta^2 \\ &= (1 - \sqrt{\varepsilon})^2 = \eta \end{aligned}$$

Ces trois résultats auraient pu être obtenus sans calcul: l'événement E_1 regroupe en effet les couples de parents qui procréeront des GG , l'événement E_2 les couples de parents qui procréeront des hétérozygotes, et l'événement E_3 les couples de parents qui procréeront des XX ; il est donc logique (puisque l'on suppose que tous les couples ont la même fécondité) que les poids relatifs de ces événements soient égaux à celui de la progéniture correspondante.

Appliquons alors la règle IV.4 des probabilités conditionnelles: $\mathcal{P}(E) = \varepsilon + 0.25x + 0\eta = \frac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon)$.

On peut donc énoncer le résultat suivant: dans une population où la proportion d'individus GG est ε , un couple de parents pris au hasard a (pour chaque enfantement) la probabilité ε de mettre au monde un individu GG . Mais un couple formé de frère et soeur a la probabilité $\frac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon)$ de mettre au monde un individu GG . Si par exemple il y a un GG sur 10 000 dans la population, la procréation entre frère et soeur a une chance sur deux cent de produire un GG .

L'indépendance stochastique

La loi des accouplements consanguins peut être généralisée mais nous ne donnons ici que les résultats⁽¹⁾. Par le même procédé que celui utilisé plus haut (application de la règle *IV.4* des probabilités conditionnelles) on peut analyser l'effet de croisements moins fortement consanguins ; dans le cas de croisements entre frères et soeurs, nous avons divisé les choix possibles de parents en catégories ; pour des cousins germains, qui n'ont pas les mêmes parents, mais les mêmes grands-parents, il faudra remonter à ces derniers. Les lois obtenues sont simples : pour les exprimer on introduit un nombre appelé *facteur de consanguinité*. Ce nombre vaut $\frac{1}{2}$ pour des frères et soeurs ; il est égal à $\frac{1}{8}$ pour un couple formé d'un demi-frère et sa demi-soeur ou de doubles cousins germains, à $\frac{1}{16}$ pour des cousins germains, etc. Si f est le facteur de consanguinité d'un couple, la probabilité pour qu'il engendre un enfant GG est $f\sqrt{\varepsilon} + (1 - f)\varepsilon$ (dans l'hypothèse où les individus GG ont autant de chances de procréer que les autres). Pour les maladies génétiques très rares, ε est négligeable devant $\sqrt{\varepsilon}$; la probabilité de transmettre la maladie est donc beaucoup plus élevée en cas de mariage consanguin, car le facteur f est alors beaucoup plus grand que $\sqrt{\varepsilon}$. Pour la mucoviscidose, qui n'est pas rarissime, $\varepsilon = 1/2500$ et $\sqrt{\varepsilon} = 1/50$, donc un mariage entre cousins germains donnera une probabilité $1/615$, quatre fois plus grande que pour une procréation exogamique.

Il ne faut pas oublier qu'il s'agit là des probabilités correspondant à un choix au hasard de cousins germains parmi la population. Il est bien clair que si les cousins savent que l'un d'entre eux est homozygote XX , la probabilité d'engendrer un GG sera nulle, et s'ils savent être tous deux hétérozygotes, la probabilité sera $\frac{1}{4}$.

⁽¹⁾ On trouvera un exposé assez complet (mais rapide) des lois probabilistes de l'hérédité dans le petit ouvrage de Gustave Malécot *Les mathématiques de l'hérédité* (Masson, Paris, 1948). Le lecteur qui ne craint pas d'effectuer tous les calculs lui-même pourra trouver le thème de la consanguinité traité en exercices dans l'ouvrage de William Feller (chapitre V, problèmes N^{os} 33 à 40, pages 144 – 145).

V. RÉUNIONS D'ÉVÉNEMENTS.

V. 1. Qu'est-ce qu'un événement ?

Les problèmes scolaires de probabilités sont le plus souvent exprimés en langage courant. Par exemple : *on jette trois dés; calculer la probabilité d'avoir trois six*; ou bien : *on jette trois dés; calculer la probabilité d'avoir un double (c'est-à-dire que deux des trois dés montrent la même face)*; ou encore *on jette trois dés; calculer la probabilité pour que chacun des trois dés marque un nombre impair*; etc. Dans ces problèmes l'énoncé détermine toujours un événement dont il s'agira de calculer la probabilité. Ainsi, dans le premier des trois exemples précédents, l'événement est "les trois dés marquent six". Pour résoudre le problème, il faut traduire ce langage imagé sous forme mathématique, c'est-à-dire trouver d'abord l'espace Ω qui convient le mieux, puis déterminer le sous-ensemble A de Ω qui représente l'événement. Ainsi, la première proposition de l'énoncé *on jette trois dés* se traduit mathématiquement en prenant pour espace Ω l'ensemble des groupes de trois chiffres de 1 à 6, autrement dit l'ensemble des mots de trois lettres qu'on peut écrire avec l'alphabet $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, soit un ensemble de cardinal 216 (Ω est toujours l'ensemble de tous les résultats équiprobables possibles). La seconde proposition de l'énoncé détermine l'événement : chaque résultat *possible* est la famille des trois chiffres donnés par chaque dé, mais l'événement A cherché est l'ensemble des familles distinguées par l'énoncé : ici celles dont les trois chiffres sont six; il n'y en a qu'une sur les 216, donc A est un sous-ensemble à un seul élément, de cardinal 1, donc de probabilité $1/216$. Dans le deuxième problème, l'événement décrit par l'énoncé est "avoir un double". Le sous-ensemble B de Ω correspondant à cela est l'ensemble des familles ayant deux chiffres égaux, ou l'ensemble des mots ayant une lettre répétée; le meilleur argument pour le dénombrer consiste à prendre son complémentaire B' , qui est l'ensemble des mots dont les trois lettres sont toutes distinctes : c'est donc l'ensemble des mots ayant toutes leurs lettres distinctes (second cas de dénombrement du chapitre II), dont le cardinal est $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Donc on conclut que $\#B = 216 - 120 = 96$. Dans le troisième problème, l'événement suggéré par l'énoncé est "chacun des trois dés donne un chiffre impair". Le sous-ensemble C de Ω correspondant est l'ensemble des familles dont les trois chiffres sont tous impairs. On peut remarquer que $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3$, où C_1 est l'ensemble des familles dont le *premier* chiffre est impair (et les autres indifférents), C_2

Réunions d'événements

l'ensemble des familles dont le *second* chiffre est impair, et C_3 l'ensemble des familles dont le *troisième* chiffre est impair. On peut dire que C_1 est la traduction mathématique de "le premier dé donne un chiffre impair", et de même pour C_2 et C_3 . L'intersection des trois ensembles correspond à la phrase "le premier dé donne un chiffre impair *et* le deuxième aussi *et* le troisième aussi". Il ne reste plus qu'à remarquer que les trois événements C_1, C_2, C_3 sont stochastiquement indépendants (reflet de l'indépendance causale des trois dés), de sorte que $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(C_1) \times \mathcal{P}(C_2) \times \mathcal{P}(C_3)$. Les probabilités de C_1, C_2, C_3 sont faciles à calculer (elles valent $\frac{1}{2}$ car chacun des trois dés séparément a une chance sur deux de donner un chiffre impair), donc $\mathcal{P}(C) = \frac{1}{8}$.

On constate dans chacun de ces trois problèmes, que ce qui permet de *calculer* est la traduction mathématique préalable; c'est elle qui permet le dénombrement systématique. Mais elle a aussi permis le recours à des opérations ensemblistes (complémentaire pour le second problème et intersection pour le troisième) qui, grâce à leurs propriétés algébriques, ont facilité le calcul.

Considérons encore le quatrième problème que voici: *on jette trois dés; calculer la probabilité pour que l'un au moins des trois dés donne un chiffre impair*. Cette fois l'événement D décrit par l'énoncé est "le premier dé donne un chiffre impair *ou* le second dé donne un chiffre impair *ou* le troisième dé donne un chiffre impair" (*ou* non exclusif). Donc $D = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Pour pouvoir calculer comme dans le troisième problème, il faudrait disposer d'une formule donnant la probabilité d'une réunion d'événements ⁽¹⁾. Or une telle formule existe, c'est la formule de Poincaré.

V.2. Formule de Poincaré.

Commençons par le cas extrêmement simple de la réunion de deux événements. Il est clair que si deux ensembles A_1 et A_2 sont disjoints, le cardinal de $A_1 \cup A_2$ est la somme des cardinaux: $\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2$. Mais si les deux ensembles ne sont pas disjoints et qu'on écrit la liste numérotée des éléments de A_1 , suivie immédiatement par la liste numérotée des éléments de A_2 (cette opération est appelée *concaténation*), on obtient une liste contenant $\#A_1 + \#A_2$ éléments, mais dans laquelle tous ceux qui sont à la fois dans A_1 et dans A_2 , c'est-à-dire ceux qui sont dans $A_1 \cap A_2$, figurent deux fois. Pour compenser cette répétition, il faut donc retrancher le cardinal de $A_1 \cap A_2$; ainsi l'égalité suivante est correcte:

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2) \quad (\text{V.1.})$$

⁽¹⁾ On peut aussi considérer le complémentaire de D , qui est l'intersection des complémentaires des C_j , ce qui nous ramène au problème précédent. Mais nous y reviendrons.

Comment traiter le cas d'une réunion de trois ensembles $A_1 \cup A_2 \cup A_3$? On pourrait procéder de même, concaténer les trois listes d'éléments, puis regarder combien sont comptés plusieurs fois. On comprend aisément que ceux qui sont dans $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ sont comptés trois fois, ceux qui sont dans $A_1 \cap A_2$, $A_2 \cap A_3$, ou $A_1 \cap A_3$ sans être dans $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ sont comptés deux fois. Il faut donc retrancher $\#(A_1 \cap A_2)$, $\#(A_2 \cap A_3)$, et $\#(A_1 \cap A_3)$ à $\#A_1 + \#A_2 + \#A_3$, mais du coup on aura retranché trois fois ceux qui sont dans $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ alors qu'il n'aurait fallu les retrancher que deux fois ; on compensera donc encore en les *rajoutant* une fois. Ainsi l'égalité suivante sera correcte :

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 \\ &\quad - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_3) \\ &\quad + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned} \tag{V.2}$$

En principe on pourrait traiter ainsi, par concaténations compensées, les réunions d'un nombre arbitraire d'événements ; mais l'examen de tous les cas possibles d'intersections partielles est un exercice un peu abstrait. Il vaut mieux se contenter d'abord de *deviner* une formule générale, qu'on démontrera ensuite rigoureusement par récurrence. La formule qu'on devine par les concaténations compensées est la suivante

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) &= \sum_{j=1}^{j=n} \#A_j \\ &\quad - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} \#(A_{j_1} \cap A_{j_2}) \\ &\quad + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n} \#(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}) \\ &\quad - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq n} \#(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3} \cap A_{j_4}) \\ &\quad \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n) \end{aligned} \tag{V.3}$$

Une manière plus condensée d'exprimer cette relation est la suivante :

$$\#(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots \pm S_n \tag{V.4}$$

où

— S_1 est la somme des cardinaux de tous les A_j [cette somme contient n termes],

— S_2 est la somme des cardinaux de toutes les intersections de deux des A_j , telles que $A_1 \cap A_2$ ou $A_3 \cap A_7$ [contient $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ termes],

Réunions d'événements

— S_3 est la somme des cardinaux de toutes les intersections de trois des A_j , telles que $A_1 \cap A_5 \cap A_6$ ou $A_3 \cap A_7 \cap A_{11}$ [contient $\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$ termes],

— S_4 est la somme des cardinaux de toutes les intersections de quatre des A_j [contient $\binom{n}{4}$ termes],

...

— S_{n-1} est la somme des cardinaux de toutes les intersections de $n-1$ des A_j , [contient $\binom{n}{n-1} = n$ termes],

— S_n ne contient qu'un seul terme, $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cdots \cap A_n)$, car il n'y a qu'une seule intersection de n d'entre les A_j [$\binom{n}{n} = 1$].

On peut maintenant se proposer de démontrer cette formule par récurrence: pour amorcer la récurrence, nous disposons déjà du cas $n = 2$ (de toute façon la formule n'a vraiment de sens que pour $n \geq 2$). Supposons qu'elle soit vraie pour $n-1$ événements et montrons qu'elle doit alors automatiquement être vraie aussi pour n événements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

Or posons $B = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cdots \cup A_n$. On voit que la réunion des A_j de $j = 1$ à $j = n$, est identique à $A_1 \cup B$. Or il est déjà établi que $\#(A_1 \cup B) = \#A_1 + \#B - \#(A_1 \cap B)$. Mais d'autre part B est la réunion de $n-1$ événements, on peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence pour décomposer $\#B$; de même $A_1 \cap B$ est égal à $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_4) \cdots \cup (A_1 \cap A_n)$, c'est-à-dire à une réunion de $n-1$ événements, auxquels aussi on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence. Ce qui donne

$$\#B = Q_1 - Q_2 + Q_3 \cdots \pm Q_{n-1}$$

où Q_j est la somme des cardinaux des intersections de j parmi les $n-1$ événements $A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$. Il s'agit donc des intersections de j des n événements $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$, mais *excluant* l'événement A_1 . De même (on reprend à partir d'ici la notation multiplicative pour l'intersection):

$$\#(A_1 B) = R_1 - R_2 + R_3 \cdots \pm R_{n-1}$$

où R_j est la somme des cardinaux des intersections de j parmi les $n-1$ événements $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4, \dots, A_1 A_n$: ce sont donc les intersections de $j+1$ parmi les $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$, dont l'un est obligatoirement A_1 . On peut donc dire que $R_{j-1} + Q_j$ est la somme des cardinaux de toutes les intersections de j parmi les n événements $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$: c'est la somme pour celles qui contiennent le facteur A_1 (R_{j-1}) plus la somme pour celles qui ne contiennent pas le facteur A_1 (Q_j). On a donc pour les expressions S définies plus haut

$$S_j = R_{j-1} + Q_j$$

En appliquant alors l'hypothèse de récurrence comme indiqué, on obtient

$$\begin{aligned}
 \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_n) &= \#(A_1 \cup B) \\
 &= \#A_1 + \#B - \#(A_1 B) \\
 &= \#A_1 + Q_1 - Q_2 + Q_3 \cdots \pm Q_{n-1} \\
 &\quad - R_1 + R_2 - R_3 + \cdots \pm R_{n-1} \\
 &= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \cdots + \#A_n \\
 &\quad - (Q_2 + R_1) + (Q_3 + R_2) \\
 &\quad - (Q_4 + R_3) \cdots \pm (Q_n + R_{n-1}) \\
 &= S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \cdots \pm S_n
 \end{aligned}$$

Ceci est bien ce que nous voulions obtenir ; nous avons donc ainsi rigoureusement démontré la formule de Poincaré par récurrence.

On peut revenir au problème : *on jette trois dés ; quelle est la probabilité pour que l'un au moins donne un résultat impair ?* L'événement C_1 est formé des familles de trois chiffres dont le premier est impair ; il y a donc trois possibilités pour le premier (1, 3, et 5), et six possibilités pour chacun des deux autres, de sorte que $\#C_1 = 3 \times 6 \times 6 = 108$. De même $\#C_2 = 6 \times 3 \times 6 = 108$ et $\#C_3 = 6 \times 6 \times 3 = 108$. Pour appliquer la formule de Poincaré (ici pour trois événements, soit $V.2$) il faut connaître également les cardinaux des intersections par deux et par trois ; mais cela est aisé : $\#(C_1 C_2) = 3 \times 3 \times 6 = 54$, $\#(C_2 C_3) = 6 \times 3 \times 3 = 54$, $\#(C_1 C_3) = 3 \times 6 \times 3 = 54$; enfin $\#(C_1 C_2 C_3) = 3 \times 3 \times 3 = 27$. Ainsi

$$\#(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = 3 \times 108 - 3 \times 54 + 27 = 189$$

et la probabilité pour que *l'un au moins* des trois dés marque un chiffre impair est $189/216 = 7/8$.

V. 3. Le problème des coïncidences fortuites.

Le problème typique que l'on résoud par la formule de Poincaré est celui des *coïncidences fortuites* ou problème de Montmort (mathématicien français du *XVIII^e* siècle) ; dans la littérature anglo-saxonne *random matches problem*. Ce problème s'énonce ainsi :

n lettres sont adressées chacune à un destinataire déterminé ; mais on les distribue au hasard entre leurs n destinataires. Quelle est la probabilité pour qu'aucun des n destinataires ne reçoive la lettre qui lui était destinée ?

Réunions d'événements

Ce problème est l'un des plus anciens du Calcul des probabilités. Il est évoqué pour la première fois dans le livre de Montmort à propos du *jeu des Treize*. Dans ce jeu, on mélangeait treize cartes de valeurs 1 à 13 (les trois dernières étant valet, dame, roi, considérés comme numéros 11, 12, 13). Puis il fallait retirer les cartes une à une et voir si la k^{e} tirée avait aussi la valeur k . Montmort a posé le problème de trouver la probabilité pour que cela se produise au moins une fois.

L'historien Todhunter rapporte que c'est probablement Nicolas Bernoulli et non Montmort qui a trouvé la réponse; en effet, la première édition du livre de Montmort rapporte le résultat mais ne comporte aucune démonstration; puis dans la seconde édition Montmort donne deux démonstrations en disant qu'il les tient de Nicolas Bernoulli (Montmort et N. Bernoulli entretenaient une correspondance régulière).

La célébrité de ce problème provient de ce que la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini, est égale à $1/e$ (nous ferons ce calcul ci-dessous). Qu'on puisse rencontrer des nombres tels que e ou π dans un problème concret de probabilités, était perçu comme une découverte fantastique, et s'apparentait au miracle de la géométrie qui avait déjà fasciné les Anciens⁽²⁾.

L'explication de ce paradoxe se trouve dans le principe d'invariance qui conduit à postuler l'équiprobabilité des destinataires. L'énoncé du problème dit: *on distribue les lettres au hasard entre les destinataires*, ce que tout le monde traduit par "tous les destinataires sont équiprobables". Comme cela a déjà été discuté dans ce livre (section **I. 3** *La signification de l'équiprobabilité*), l'équiprobabilité est postulée a priori, à partir d'une invariance que le sens commun, d'origine empirique, fait percevoir comme évidente: chaque lettre est supposée avoir autant de chances d'arriver chez n'importe lequel des n destinataires. D'un point de vue empirique, cela signifie que si on refait un grand nombre de fois l'expérience consistant à distribuer les n lettres, on constatera que statistiquement elles se répartissent à peu près uniformément; nous verrons au chapitre **XI** que les variations correspondant à cet "à peu près" doivent être de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, N étant le nombre de fois qu'on répète l'expérience; l'équivalence des destinataires sera donc vraie à $1/\sqrt{N}$ près: pour vérifier expérimentalement l'équiprobabilité au millionième près, il faudrait refaire l'expérience 10^{12} fois! Et selon toute vraisemblance, on constaterait alors que l'équiprobabilité n'est pas parfaite: pour la distribution au hasard les lettres devraient être à chaque fois remélangées et tirées au sort dans un panier, mais l'une pourrait

⁽²⁾ Platon, *La République*, Livre VII.

être légèrement plus lourde et se retrouver plus souvent au fond du panier, ou une autre légèrement écornée pourrait s'accrocher aux autres et avoir plus de chances de remonter sur le dessus du panier. En un mot, l'équiprobabilité empirique est par nature approximative. Cependant, comme l'équiprobabilité est un principe qualitatif et non quantitatif, il ne se trouve pas diminué par le caractère approximatif de sa vérification empirique. Il en va de même dans d'autres domaines; si par exemple on énonce "la constante c de l'électromagnétisme (vitesse de la lumière dans le vide) vaut $2.997\,925 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ", une mesure plus précise augmentera l'information ainsi exprimée, car elle est uniquement quantitative et ne contient rien d'autre que la connaissance de décimales. Mais si on énonce "la constante c de l'électromagnétisme est la même dans tous les repères galiléens", une vérification plus précise de ce principe ne l'améliore plus (tout au plus elle peut conduire à l'infirmier).

Les philosophes de la Grèce antique ont été fascinés devant la possibilité de connaître le nombre π par les pures mathématiques, avec une précision infinie, alors que la mesure physique d'une circonférence ne pouvait jamais donner plus de trois décimales. Platon en déduisait dans le texte célèbre de *La République* (op. cit.) que l'on peut donc atteindre par la pensée une vérité située au-delà de tout ce que l'expérience sensible permet de connaître. La raison de ce paradoxe (ou de cette illusion) est que le calcul de π par la géométrie résulte du principe *qualitatif* d'une invariance de l'espace par rotation. Ce principe qualitatif est d'origine expérimentale, mais le fait qu'il soit qualitatif permet le glissement conceptuel d'une validité approchée à une validité parfaite. Si on a mesuré π expérimentalement avec six décimales, on ne peut pas deviner les décimales suivantes; mais si on a établi à six décimales près l'invariance de l'espace par rotation, on peut deviner ou croire que cette invariance se maintiendra pour des mesures plus précises (du moins jusqu'au jour où ces mesures seront devenues précises au point de montrer les limites de l'invariance) et en déduire mathématiquement une valeur de π "exacte", avec une infinité de décimales.

La fascination des contemporains de Montmort devant la probabilité égale à $1/e$ est la même que celle de Platon devant la valeur mathématiquement exacte de π . L'équiprobabilité rigoureuse n'existe jamais en pratique; mais si on la traduit sous forme de vérité mathématique (on appelle cela aujourd'hui "construire un modèle mathématique"), elle conduit à des nombres qui peuvent être calculés avec une précision infinie. Il est cependant bien évident que si on distribue *réellement, matériellement*, les lettres par tirage au sort dans un panier, l'équiprobabilité ne sera satisfaite qu'approximativement (tout comme pour les dates de naissances

Réunions d'événements

du problème de la section **II.2.**), de telle sorte que les premières décimales du modèle mathématique seront correctes, mais les suivantes fantaisistes. Le calcul par les pures mathématiques donnera $1/e = 0.367879\dots$, mais la probabilité pour qu'aucune lettre n'arrive à son destinataire sera de 37%.

Voyons maintenant comment on résoud le problème de Montmort. L'espace Ω est l'ensemble de toutes les distributions possibles. Chaque distribution correspond à une permutation des lettres par rapport à la distribution correcte; comme il y a n lettres, il y a $n!$ permutations, soit $\#\Omega = n!$. L'événement défini par l'énoncé est \mathcal{A} : "aucun destinataire ne reçoit la lettre qui lui est destinée". Son complémentaire est \mathcal{B} : "*au moins un* destinataire reçoit la lettre qui lui est destinée". L'expression *au moins un* correspond à une réunion, celle des événements:

\mathcal{B}_1 : "le destinataire $N^\circ 1$ reçoit la lettre qui lui est destinée"

\mathcal{B}_2 : "le destinataire $N^\circ 2$ reçoit la lettre qui lui est destinée"

...

\mathcal{B}_n : "le destinataire $N^\circ n$ reçoit la lettre qui lui est destinée"

Ainsi $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \dots \cup \mathcal{B}_n$, et on peut obtenir la probabilité de \mathcal{B} par la formule de Poincaré.

Ici, il convient peut-être de faire deux remarques:

1. Le lecteur peut trouver bizarre que le problème de Montmort, résolu au début du *XVIII^e* siècle, fasse appel à la formule de Poincaré (mathématicien français 1854 – 1912). Il est clair qu'on savait calculer la probabilité d'une réunion bien avant! Les démonstrations de Nicolas Bernoulli, mentionnées plus haut, ne faisaient évidemment pas appel à la "formule de Poincaré", mais à des procédés spécifiques.

L'appellation "formule de Poincaré", ou "théorème de Poincaré", ou encore "identité de Poincaré" pour *V.3* ou *V.4* provient du fait qu'on la trouvait sous cette forme générale dans le *Calcul des probabilités* (op. cit. chap **I**, note 6 et bibliographie) de Henri Poincaré. Mais les cas particuliers *V.1* et *V.2* étaient connus dès la fin du *XVII^e* siècle (Jacques Bernoulli), et leur généralisation par récurrence était évidemment dès cette époque à la portée de n'importe quel mathématicien. La formule n'est donc pas une découverte de Poincaré: il l'a simplement rendue populaire.

2. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \dots \cup \mathcal{B}_n$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3 \dots \cap \mathcal{A}_n$, où \mathcal{A}_j est le complémentaire de \mathcal{B}_j et \mathcal{A} celui de \mathcal{B} . Pourquoi ne pas utiliser la formule beaucoup plus simple $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{A}_1) \times \mathcal{P}(\mathcal{A}_2) \times \mathcal{P}(\mathcal{A}_3) \dots \times \mathcal{P}(\mathcal{A}_n)$? **Réponse:** ce serait faux, car les événements \mathcal{A}_j ne sont pas stochastiquement indépendants. \mathcal{A}_j est l'événement "le destinataire $N^\circ j$ ne reçoit pas la lettre qui lui était destinée": donc un autre la reçoit, à qui elle n'était pas destinée non plus, ce qui implique que le fait d'appartenir à l'un des \mathcal{A}_j augmente la probabilité d'appartenir aussi à l'un des autres. La propriété du produit est simple et pratique, mais ne marche malheureusement que pour des événements indépendants, tandis que la formule de Poincaré est valable pour n'importe quelle sorte d'événements.

Pour calculer $\#\mathcal{B}$ par la formule de Poincaré, il faut d'abord connaître les cardinaux des \mathcal{B}_j , puis des $\mathcal{B}_{j_1} \cap \mathcal{B}_{j_2}$, puis des $\mathcal{B}_{j_1} \cap \mathcal{B}_{j_2} \cap \mathcal{B}_{j_3}$, et ainsi de suite. De l'équivalence des différents destinataires, on peut déjà déduire que les \mathcal{B}_j ont tous le même cardinal (sinon, cela indiquerait que certains destinataires seraient plus égaux que d'autres). De même, le cardinal de $\mathcal{B}_{j_1} \cap \mathcal{B}_{j_2}$ ne peut pas dépendre de j_1 ou de j_2 , ni celui de $\mathcal{B}_{j_1} \cap \mathcal{B}_{j_2} \cap \mathcal{B}_{j_3}$ de j_1, j_2 ou j_3 .

Sachant que les intersections par deux sont au nombre de $\binom{n}{2}$, que les intersections par trois sont au nombre de $\binom{n}{3}$, etc. il suffit donc de calculer les cardinaux de \mathcal{B}_1 , de $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$, de $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3, \dots \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 \cdots \mathcal{B}_n$, et on aura

$$\#\mathcal{B} = n \#\mathcal{B}_1 - \binom{n}{2} \#(\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2) + \binom{n}{3} \#(\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3) \cdots \pm \binom{n}{n} \#(\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 \cdots \mathcal{B}_n) \quad (V.5.)$$

Or \mathcal{B}_1 étant l'événement "le destinataire $N^\circ 1$ reçoit la lettre qui lui est destinée", son cardinal est évidemment le nombre de permutations des $n-1$ lettres restantes, soit $(n-1)!$. L'événement $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ est "les destinataires $N^\circ 1$ et $N^\circ 2$ ont reçu les lettres qui leur sont destinées" donc son cardinal est le nombre de permutations des $n-2$ lettres restantes, soit $(n-2)!$. En général, $\#(\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 \cdots \mathcal{B}_k) = (n-k)!$. Substituant dans (V.5) on obtient

$$\begin{aligned} \#\mathcal{B} &= n(n-1)! - \binom{n}{2} (n-2)! + \cdots - (-1)^k \binom{n}{k} (n-k) \cdots - (-1)^n \\ &= -n! \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

On obtient les probabilités en divisant par $\#\Omega = n!$ d'où

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}) = - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Passant au complémentaire, cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{A}) &= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{B}) = 1 + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{1}{k!} \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \end{aligned} \quad (V.6.)$$

En faisant tendre n vers l'infini, on reconnaît le développement en série de MacLaurin de e^{-1} , ce qui montre que pour n grand, la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est proche de $1/e$. Une autre observation est aussi que cette probabilité est la même quel que soit le nombre de destinataires, pourvu qu'il soit grand.

Réunions d'événements

L'expression *V.6*, en tant qu'expression algébrique, garde la trace de la formule de Poincaré dont elle est issue; elle ne se simplifie pas davantage, montrant par là que le problème de Montmort relève intrinsèquement d'une réunion d'événements non disjoints et qu'il ne peut pas faire l'objet d'une réduction à un problème plus simple. Ce type de constat permet souvent en mathématique de s'assurer qu'il n'existe pas de réduction sous-jacente (ou au contraire de deviner qu'il en existe certainement une). Remarquons en passant que c'est sur ce type de raisonnement algébrique que reposent les démonstrations de l'impossibilité de la quadrature du cercle ou de l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations de degré supérieur ou égal à cinq. En Calcul des probabilités, on peut également tirer des renseignements de l'étude de la fraction, dans la mesure où celle-ci reflète une structure algébrique: tant qu'il s'agit de probabilités a priori et exactes, elles s'expriment sous forme de fraction, dont le dénominateur est en principe le cardinal de l'espace des épreuves. Mais il peut arriver (et il arrive souvent) que la fraction se simplifie et que le dénominateur devienne alors plus petit que le cardinal de l'espace sur lequel on a travaillé. Ce phénomène signifie alors que la probabilité obtenue aurait pu être calculée sur un espace des épreuves réduit. Nous avons en effet observé à propos des probabilités conditionnelles (voir remarques à la fin de **IV.3**), que les problèmes de probabilité peuvent parfois être réduits à des espaces d'épreuves plus petits, par la considération de probabilités conditionnelles.

Un exemple de ce phénomène est fourni par le quatrième problème de la section **V.1.**: *on jette trois dés; calculer la probabilité pour que l'un au moins des trois dés donne un chiffre impair*. Nous avons introduit les événements C_j : "le dé $N^{\circ}j$ donne un chiffre impair", et l'événement du problème "au moins des trois dés donne un chiffre impair" était la réunion $D = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. En calculant avec la formule de Poincaré nous avons trouvé que $\#D = 189$, d'où $\mathcal{P}(D) = \frac{189}{216} = \frac{7}{8}$. On voit que cette fraction, contrairement à *V.6*, ne garde aucune trace de la formule de Poincaré dont elle est issue; en outre, le dénominateur est 8, ce qui laisse soupçonner qu'on devait pouvoir traiter le problème sur un espace des épreuves de cardinal 8 seulement. La probabilité du complémentaire \bar{D} de D est $\frac{1}{8}$, montrant par là qu'il ne contient qu'une seule de ces épreuves réduites; cela devrait nous mettre sur la voie. Et en effet, \bar{D} est l'intersection des complémentaires des C_j : $\bar{D} = \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3$. Par ailleurs, \bar{C}_1 , \bar{C}_2 , et \bar{C}_3 sont relatifs à trois dés indépendants et sont donc des événements stochastiquement indépendants, de sorte que $\mathcal{P}(\bar{D}) = \mathcal{P}(\bar{C}_1) \times \mathcal{P}(\bar{C}_2) \times \mathcal{P}(\bar{C}_3)$. Or \bar{C}_j n'est autre que "le dé $N^{\circ}j$ donne un chiffre pair", événement dont la probabilité est *évidemment* $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, le dénominateur 8 signifie tout simplement qu'on pouvait se contenter de prendre pour épreuves les huit triplets de *pair* et *impair*

possibles, au lieu des 216 triplets de chiffres.

V. 4. Les textes aléatoires.

Un autre problème classique où on est amené à considérer des réunions d'événements est celui des suites aléatoires. Nous avons déjà rencontré les suites aléatoires au chapitre I à propos du chaos déterministe (voir I.4). Un problème célèbre discuté par Émile Borel et popularisé par *La bibliothèque de Babel* de J. L. Borges⁽³⁾ est celui de l'apparition aléatoire d'un texte sensé dans une suite de lettres écrites au hasard.

Ce problème se présente ainsi: une machine écrit au hasard à la suite les uns des autres des caractères de base de la typographie: 26 lettres de l'alphabet majuscules et minuscules, signes de ponctuation, parenthèses, lettres accentuées telles que é, ê, è, ë, î, ï, chiffres de 0 à 9, blanc séparant les mots, retour-chariot avec ou sans alinea; disons cent caractères en tout. Chaque élément successif de la suite est choisi au hasard parmi les cent caractères de base. Une suite de n caractères est donc un "mot" de n lettres écrit avec l'alphabet des cent caractères de base. Le problème relève du cas de dénombrement étudié en II.1: on peut écrire 100^n suites différentes. Ces suites étant supposées équiprobables, la probabilité d'en obtenir une particulière parmi toutes celles possibles est alors 100^{-n} .

Le problème étudié par Émile Borel est celui de l'apparition *partielle* d'un texte sensé particulier: quelle est la probabilité pour que dans une suite de longueur n , apparaisse au moins une fois quelque part un texte donné de longueur k ? Si la machine a écrit une suite de $10^{1000000}$ de caractères, quelle est la probabilité d'y trouver quelque part, noyé dans un océan de gallimatias insensé, le texte exact des Voyages de Gulliver?

Ce problème revient à calculer la probabilité d'une *réunion* d'événements. En effet, appelons A_j l'événement "entre le rang $N^o j$ inclu et le rang $N^o j+k$ exclu de la suite se trouve exactement le texte cherché". Il est clair que j ne peut pas être supérieur à $n - k$, puisqu'à partir du rang $N^o j$ il doit rester assez de place pour placer le texte de k caractères. Donc $1 \leq j \leq n - k$. L'événement "le texte prédéfini se rencontre au moins une fois dans la suite" est alors la réunion $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-k}$.

D'après la formule de Poincaré, pour avoir la probabilité de la réunion E , nous devons déterminer non seulement les probabilités de chacun des A_j , mais aussi celles des intersections $A_{j_1} A_{j_2}$, puis $A_{j_1} A_{j_2} A_{j_3}$, etc.

⁽³⁾ Jorge Luis Borges, *Fictions*; traduction française chez Gallimard, collection folio.

Réunions d'événements

Dans le problème discuté avant (celui des lettres et des destinataires), les intersections étaient toutes équivalentes car les destinataires étaient interchangeables. Ici, la situation est un peu plus complexe car la probabilité d'une intersection ne sera pas la même selon que les textes peuvent ou non se superposer : si le texte comporte à son début une partie de longueur ℓ qu'on retrouve à la fin, il y a une probabilité non nulle pour une intersection de la forme $A_j A_{j+k-\ell}$ impliquant la superposition de ces parties. Mais pour un texte qui n'est pas autosuperposable, les intersections $A_{j_1} A_{j_2}$ pour lesquelles $j_2 - j_1 < k$ auront une probabilité nulle. En revanche les autres intersections (pour lesquelles $j_2 - j_1 \geq k$) auront toutes la même probabilité. Il en va de même pour les intersections de trois, quatre, ..., des A_j .

Ainsi la somme des cardinaux des intersections de r parmi les A_j , que dans la formule de Poincaré V.4 nous avons désignée par S_r , sera égale au nombre d'intersections possibles de r événements A_j sans recouvrement de texte, multiplié par le cardinal commun de ces intersections. Appelons provisoirement $G_{n,k}^r$ ce nombre d'intersections possibles. Le calcul de ces nombres $G_{n,k}^r$ n'est pas immédiat et nous y procéderons d'ici peu. Par contre le cardinal de l'une quelconque de ces intersections résulte directement de la formule de dénombrement II.1 : en effet, soient $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$ tels que les textes correspondants ne se recouvrent pas. Cela équivaut à ce que les différences entre deux quelconques des indices j_ℓ soient toutes supérieures à k . Un élément de cette intersection (une épreuve) est une suite dont les caractères situés dans les intervalles disjoints $\{j_1 \dots j_1 + k - 1\}, \{j_2 \dots j_2 + k - 1\}, \dots, \{j_r \dots j_r + k - 1\}$ constituent les r occurrences du textepredéfini et sont donc déterminés. Le nombre de ces caractères déterminés est par conséquent $r \times k$. La suite comporte n caractères en tout, de sorte qu'il reste $n - rk$ caractères à choisir de toutes les façons possibles, ce qui d'après II.1 fait 100^{n-rk} possibilités. Ainsi $\#(A_{j_1} \cup A_{j_2} \dots \cup A_{j_r}) = 100^{n-rk}$. L'espace Ω de toutes les suites possibles ayant le cardinal 100^n , cela donne la probabilité 100^{-rk} pour l'intersection.

En conclusion, nous aurons d'après la formule de Poincaré :

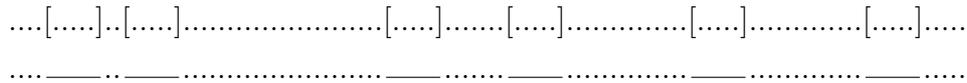
$$\mathcal{P}(E) = \frac{G_{n,k}^1}{100^k} - \frac{G_{n,k}^2}{100^{2k}} + \frac{G_{n,k}^3}{100^{3k}} - \frac{G_{n,k}^4}{100^{4k}} + \dots$$

Bien entendu, si la machine utilise non pas 100 caractères mais un nombre quelconque m , la probabilité cherchée sera

$$\mathcal{P}(E) = \sum_{1 \leq r \leq \frac{n}{k}} (-1)^{r-1} \frac{G_{n,k}^r}{m^{rk}} \quad (V.7.)$$

Cette expression de $\mathcal{P}(E)$ n'est toutefois absolument exacte que si les recouvrements de textes sont impossibles ; si les textes peuvent se recouvrir en partie, il faut tenir compte d'une probabilité non nulle pour des intersections d'événements A_j dont les indices diffèrent de moins de k . Le texte des voyages de Gulliver (comme la quasi totalité des textes de la littérature) ne permet aucune superposition partielle ; pour avoir une telle superposition il faut fabriquer des textes ad hoc. Par ailleurs, même pour de tels textes spéciaux, le changement quantitatif de la probabilité est infime et ne change rien tant qu'on n'envisage que des valeurs approchées.

Il reste à calculer les nombres $G_{n,k}^r$. Ce problème ne relève pas directement des cas de dénombrement passés en revue au chapitre **II**, mais s'y ramène par une simple réduction. Représentons la suite des caractères écrits par la machine par des points sur une droite. On alignera ainsi en tout n points. Puis remplaçons chaque apparition du texte prédéfini (occurrence) par un seul segment regroupant les k points correspondants, comme le montre la figure ci-dessous où les apparitions du texte sont marquées par des crochets ($n = 100, k = 5, r = 6$) :



Si on a r occurrences du texte (ne se recouvrant pas), la droite portera $n - rk$ points restés isolés et r segments. À chaque distribution particulière de r occurrences correspond ainsi univoquement une succession déterminée de $n - rk$ points isolés et r segments. Le dénombrement de toutes les intersections possibles des événements A_j équivaut donc au dénombrement des configurations de $n - rk$ points et r segments, soit $n - r[k - 1]$ éléments en tout, ce qui relève du cas **II.3**. Par conséquent

$$G_{n,k}^r = \binom{n - r[k - 1]}{r} \tag{V.8}$$

Le problème est surtout intéressant pour de grandes valeurs de n . Dans ce cas on peut avoir des valeurs approchées pour $G_{n,k}^r$. Le coefficient binomial qui apparaît dans V.8 peut s'écrire (ici k remplace $k - 1$) :

$$\begin{aligned} \binom{n - rk}{r} &= \frac{(n - rk)(n - rk - 1)(n - rk - 2) \cdots (n - rk - r + 1)}{r!} \\ &= \frac{(n - rk)^r}{r!} \left(1 - \frac{1}{n - rk}\right) \left(1 - \frac{2}{n - rk}\right) \cdots \left(1 - \frac{r - 1}{n - rk}\right) \\ &= \frac{n^r}{r!} \left[1 - \frac{rk}{n}\right]^r \cdot \left(1 - \frac{1}{n - rk}\right) \left(1 - \frac{2}{n - rk}\right) \cdots \left(1 - \frac{r - 1}{n - rk}\right) \end{aligned} \tag{V.9}$$

Réunions d'événements

Reportons le tout dans la formule de Poincaré V.7. On obtient alors

$$\mathcal{P}(E) = \sum_{1 \leq r \leq \frac{n}{k}} (-1)^{r-1} \frac{x^r}{r!} a_r \quad (\text{V.10.})$$

où l'on a posé

$$x = \frac{n}{m^k}$$

$$a_r = \left[1 - \frac{r[k-1]}{n}\right]^r \cdot \left(1 - \frac{1}{n-r[k-1]}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n-r[k-1]}\right)$$

On peut remarquer que pour les petites valeurs de r , a_r est pratiquement égal à 1; par contre pour les grandes valeurs de r , c'est le terme $\frac{x^r}{r!}$ qui devient très petit (en toute rigueur, la condition pour que ces deux cas ne puissent pas se présenter en même temps est que n , quoique très grand, reste petit devant m^{2k}/k). Sous cette condition on peut dire que la somme V.10 est pratiquement égale à la série $\sum (-1)^{r-1} \frac{x^r}{r!} = 1 - e^{-x}$. Si n est trop grand (du même ordre que m^{2k}/k , ou plus grand encore), le terme $\frac{x^r}{r!}$ sera encore grand lorsque les a_r deviendront plus petits que 1 et on ne pourra pas assimiler simplement la somme V.10 à la série exponentielle, mais il n'y en aura même pas besoin, car dans ce cas il est clair que la probabilité $\mathcal{P}(E)$ sera pratiquement égale à 1.

On peut donc conclure que si une machine écrit au hasard n caractères (choisis dans un alphabet de m caractères) à la suite les uns des autres, la probabilité pour qu'il apparaisse au moins une fois un texte donné de k caractères est égale à $1 - e^{-x}$ avec $x = n/m^k$. Pour $m = 100$ par exemple, la probabilité restera négligeable tant que x sera petit, c'est-à-dire tant que n sera petit devant 100^k . Les exégètes de la bibliothèque de Babel avaient découvert un volume qui contenait — comme unique passage sensé — la phrase "O temps tes pyramides"; cette phrase comporte (blancs compris) 21 caractères. Tant que n reste petit devant $100^{21} = 10^{42}$ la probabilité de trouver la phrase "O temps tes pyramides" est nulle. À l'inverse, lorsque n deviendra nettement plus grand que 10^{42} , la probabilité de voir apparaître "O temps tes pyramides" deviendra égale à 1. Ce sera seulement lorsque n sera de l'ordre de 10^{42} que l'on verra le passage *progressif* de la probabilité 0 à la probabilité 1; ce passage se produira selon la loi $1 - e^{-x}$.

Une approche heuristique du problème, ne faisant pas appel à la formule de Poincaré, est envisageable. On pourrait par exemple se dire que l'apparition d'un texte sensé dans un texte écrit au hasard étant forcément un événement rare, on peut négliger les cas où un tel texte apparaîtrait

deux, trois, quatre fois, et approcher la probabilité $\mathcal{P}(E)$ par la somme $\sum_j \mathcal{P}(A_j)$. Autrement dit ne retenir que le début de la formule de Poincaré. Le résultat qu'on obtiendrait alors serait $(n - k)/m^k \simeq x$. Ceci constitue bien une approximation de $1 - e^{-x}$ lorsque x est petit et en ce sens le raisonnement heuristique est correct. Mais lorsque x n'est pas petit, il devient grossièrement faux. L'explication en est simple : négliger l'apparition de plusieurs occurrences est effectivement légitime pour des événements rares ; mais nous avons vu que lorsque n devient grand par rapport à m^k , non seulement l'apparition d'une occurrence cesse d'être rare, mais devient même quasi-certaine. C'est pourquoi on ne peut pas se passer de la formule de Poincaré complète.

Jusqu'ici nous avons considéré le cas asymptotique où l'entier n est grand. Dans ce cas la somme *V.7* comporte un très grand nombre de termes et devient pratiquement une série, comme nous avons vu.

Bien sûr *V.7* est une expression "exacte", en ce sens qu'elle se déduit mathématiquement sans approximation de l'hypothèse d'équiprobabilité a priori des épreuves ; elle est donc tout aussi exacte pour des valeurs modestes de n . Dans la pratique des probabilités ne peuvent pas être exactes ; cela n'a aucun sens réel. L'expression *V.7* (de même que tout calcul de probabilité a priori) n'est exacte que dans la mesure où l'hypothèse d'équiprobabilité des épreuves est elle-même exacte. Comme nous l'avons déjà discuté au début de la section **V. 3**, ce type d'exactitude est comparable à celui de la géométrie : on peut montrer que le rapport de la circonférence au diamètre est "exactement" π ou que le rapport de la diagonale au côté du carré est "exactement" $\sqrt{2}$ — ces nombres ayant une infinité de décimales déterminées — uniquement parce qu'on admet que les invariances de l'espace (par rotations et translations) sont elles-mêmes absolument exactes.

On peut dire que s'il existe une légère inexactitude dans l'équiprobabilité des caractères alignés par la machine, celle-ci se répercutera sur le résultat du calcul exact ; mais comme l'hypothèse de l'équiprobabilité des épreuves est indépendante de la valeur des paramètres tels que n , k , m , etc., il n'y a aucune raison pour qu'une inexactitude à ce niveau se manifeste plutôt pour les petites valeurs de n que pour les grandes. Par contre, l'approximation exponentielle reposait explicitement sur l'hypothèse que n est grand. Donc la formule *V.7* s'applique en principe pour n'importe quelle valeur de n , tandis que l'approximation exponentielle ne s'applique en principe que pour n grand. On peut se rendre compte de son domaine de validité en comparant un calcul effectué directement à partir de *V.7* au résultat donné par l'approximation exponentielle.

Cherchons par exemple les probabilités pour que, dans une suite de vingt,

Réunions d'événements

cent, trois cents, mille, trois-mille, et dix-mille chiffres décimaux écrits au hasard, la suite 314 apparaisse au moins une fois. Désignons respectivement par $\mathcal{P}(20)$, $\mathcal{P}(100)$, $\mathcal{P}(300)$, $\mathcal{P}(1000)$, $\mathcal{P}(3000)$, $\mathcal{P}(10000)$ ces probabilités. Le tableau suivant donne les valeurs obtenues d'après V.7, suivies entre parenthèses par le calcul selon l'approximation exponentielle :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(20) &= \frac{18}{10^3} - \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 10^6} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{6 \cdot 10^9} - \dots \simeq 0.01788 \quad (0.01980) \\ \mathcal{P}(100) &= \frac{98}{10^3} - \frac{96 \cdot 95}{2 \cdot 10^6} + \frac{94 \cdot 93 \cdot 92}{6 \cdot 10^9} - \dots \simeq 0.09357 \quad (0.09516) \\ \mathcal{P}(300) &= \frac{298}{10^3} - \frac{296 \cdot 295}{2 \cdot 10^6} + \frac{294 \cdot 293 \cdot 292}{6 \cdot 10^9} - \dots \simeq 0.25825 \quad (0.25918) \\ \mathcal{P}(1000) &= \frac{998}{10^3} - \frac{996 \cdot 995}{2 \cdot 10^6} + \frac{994 \cdot 993 \cdot 992}{6 \cdot 10^9} - \dots \simeq 0.63231 \quad (0.63212) \\ \mathcal{P}(3000) &= \frac{2998}{10^3} - \frac{2996 \cdot 2995}{2 \cdot 10^6} + \dots \simeq 0.95049 \quad (0.95021) \\ \mathcal{P}(10000) &= \frac{9998}{10^3} - \frac{9996 \cdot 9995}{2 \cdot 10^6} + \dots \simeq 0.99984 \quad (0.99995) \end{aligned}$$

On constate aisément que l'approximation exponentielle est déjà très bonne pour $n = 100$; sur le tableau, l'approximation ne diffère notablement du calcul "exact" que pour $n = 20$ (erreur relative de 11%).

Le problème de l'apparition d'un passage sensé dans un texte aléatoire a été utilisé par Émile Borel⁽⁴⁾ pour discuter la nature du hasard. Borel considérait surtout des suites infinies (il était mathématicien). Il expliquait que si une suite de caractères infinie est *vraiment* écrite au hasard, elle doit comporter obligatoirement n'importe quel texte donné ; donc tous les textes qui ont été écrits et qui seront écrits un jour y figurent, et y figurent même une infinité de fois, car dès que l'un apparaît, la suite se poursuit comme si elle repartait de zéro. Une suite infinie dans laquelle ne figurerait nulle part un certain passage ne peut pas avoir été écrite au hasard, car il a fallu prescrire à la machine qui l'a engendrée d'éviter le passage manquant. Si toutes les suites de n caractères d'un alphabet qui en comporte m sont équiprobables, alors la probabilité de voir apparaître un certain passage de longueur k au bout de $n = x m^k$ caractères est $1 - e^{-x}$, qui tend vers 1 quand x (et donc n) tend vers l'infini. La contraposée de cette assertion vraie est donc : si un passage donné n'apparaît jamais, alors les suites ne sont pas toutes équiprobables ; en particulier celle qui contient le passage est moins probable que les autres.

⁽⁴⁾ Émile Borel *Le hasard* éd. Alcan, Paris, 1914, page 162.

Ces observations sur le hasard faites au début du siècle par Émile Borel ont une postérité considérable, qui est la théorie des suites aléatoires déjà évoquée (section I.4). Il s'agit de savoir quels sont les critères qui garantissent qu'une suite est "vraiment" aléatoire. Pour qu'il en soit ainsi, il faut donc, non seulement que chaque lettre y revienne aussi souvent que n'importe quelle autre, mais il faut aussi que n'importe quelle chaîne de caractères fixée à l'avance y revienne aussi souvent que n'importe quelle autre de même longueur. Émile Borel⁽⁵⁾ a appelé *suites normales* les suites de chiffres ou de lettres qui satisfont ce critère. Mais il est apparu par la suite qu'on pouvait engendrer algorithmiquement des suites infinies satisfaisant à cette condition. De nombreux critères plus restrictifs ont été proposés, dont il n'est pas toujours évident qu'ils soient équivalents les uns aux autres. Le critère le plus reconnu aujourd'hui est le critère algorithmique de Solomonov et Kolmogorov (années 1960) : une suite est aléatoire si pour tout n il est impossible d'en produire les n premiers éléments avec un algorithme plus court que la simple donnée de ces n premiers éléments. Ce critère présente toutefois des variantes et des subtilités du fait qu'il n'y a pas de mesure à la fois universelle et absolument exacte de la longueur des algorithmes⁽⁶⁾.

Revenons à notre calcul basé sur la formule de Poincaré. Il a montré que si on lit une telle suite infinie, pour avoir une chance non nulle d'*atteindre* un texte donné de longueur k , il faut lire la suite jusqu'au m^k -ième caractère environ.

Cela implique que si nous lisons à la vitesse de 10^6 caractères par heure (vitesse de lecture excessive pour comprendre la *Critique de la Raison pure* mais suffisante si on cherche seulement à repérer des passages sensés dans un texte aléatoire), nous devrons lire pendant 10^{36} heures, soit environ 10^{32} années avant d'avoir une chance de tomber sur le passage "O temps tes pyramides". Si on est moins exigeant, on peut s'estimer heureux de tomber sur un passage sensé non choisi à l'avance. Une phrase semblable à "O temps tes pyramides" peut s'obtenir en mettant à la suite quatre mots de la langue française ; on peut estimer à 10^{12} le nombre de combinaisons de quatre mots susceptibles de produire un sens (éventuellement en forçant un peu l'herméneutique). Dans ce cas, l'événement A_j considéré avant (trouver la phrase "O temps tes pyramides" entre les rangs j et $j + 20$ de la suite), dont la probabilité était 100^{-21} , est remplacé par l'événement A'_j (trouver n'importe quelle phrase sensée de 21 caractères entre les rangs j et $j + 20$ de la suite), dont la probabilité est 10^{12} fois plus grande, soit 10^{-30} . Pour avoir une chance non infime de rencontrer un tel texte au cours de la lecture

⁽⁵⁾ *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, déjà cité.

⁽⁶⁾ Voir le livre de Jean-Paul Delahaye *Information, complexité, et hasard*, déjà cité.

séquentielle, il faut alors parcourir 10^{30} caractères, opération qui prendra 10^{20} années.

Le critère algorithmique de Solomonov et Kolmogorov est radicalement restrictif; la notion de hasard qu'il sous-entend exclut absolument la possibilité d'une simulation algorithmique du hasard. Or nous avons vu dès le chapitre **I** que le hasard réel et pratique est généralement un effet de chaos déterministe; les fonctions **random** simulent le hasard par déroulement d'un algorithme; et la question de savoir si dans le monde réel il y a un hasard primordial (par exemple celui de la Mécanique quantique) est une question métaphysique: elle ne peut pas être tranchée par l'expérience. C'est dire que le critère de Solomonov et Kolmogorov, pris à la lettre, est purement théorique et ne concerne pas le monde réel. Par exemple, la suite des décimales de π , $\sqrt{2}$, e , etc, est engendrée par un algorithme; mais, bien qu'on ne sache pas le démontrer rigoureusement, ces suites sont vraisemblablement normales au sens de Borel et utilisables pratiquement comme simulation de l'aléatoire: si on convertit les décimales de π , $\sqrt{2}$, e , etc, en lettres, il faudra certainement aller aussi loin dans ces suites pour trouver le passage "O temps tes pyramides" que dans n'importe quelle suite "vraiment" aléatoire.

C'est que l'algorithme qui calcule les décimales est basé sur l'arithmétique et n'a aucune raison spéciale de favoriser ou défavoriser l'apparition de la phrase fatidique; il y a une sorte d'indépendance causale entre l'algorithme arithmétique et la phrase "O temps tes pyramides".

Un des projets utopiques formulés par quelques mathématiciens (notamment Peano, Hilbert, et Russel, mais contre une grande majorité de sceptiques) aux alentours de 1900 fut la formalisation intégrale de la mathématique. Dans cette conception, les démonstrations mathématiques devenaient l'application automatique d'un algorithme; un théorème aurait alors été par définition le résultat codé d'un tel algorithme. Mais il est bien évident que ces algorithmes de déduction logique formelle seraient tout aussi indépendants de notre perception de l'espace que les algorithmes arithmétiques peuvent l'être de la phrase "O temps tes pyramides". En sorte que si on avait automatisé la déduction des théorèmes de la géométrie selon ce principe, comme l'avait rêvé Peano, on aurait dû attendre aussi longtemps l'arrivée du premier théorème *sensé* que l'apparition de la phrase "O temps tes pyramides" dans le déroulement des décimales de π ou $\sqrt{2}$.

Si on veut trouver des passages plus longs, par exemple le texte intégral de *Madame Bovary*, qui comporte environ 980 000 caractères, il faudra lire au moins $n = 100^{980\,000}$ caractères de la suite, ce qui prendra de l'ordre de $10^{1\,960\,000}$ années.

Ces nombres prodigieusement grands (ou les probabilités prodigieusement petites qui leur correspondent) ne peuvent être calculés que par des raisonnements a priori et n'ont aucun sens empirique. C'est pourquoi Émile Borel (qui a beaucoup étudié ces probabilités extrêmes) a posé le principe "les événements dont la probabilité est infinitésimale ne se produisent jamais".

Les lois déterministes de la Physique macroscopique, comme la loi de Planck étudiée en **II.6**, sont déduites par des raisonnements a priori à partir de certaines hypothèses d'invariances. Pour la loi de Planck, l'hypothèse était l'équiprobabilité des modes d'occupation pour les photons du rayonnement. Ces raisonnements a priori conduisent toujours à des probabilités infinitésimales, parce que les formules de dénombrement contiennent des puissances ou des factorielles. Ainsi on peut calculer la probabilité a priori pour que la distribution des photons selon les intervalles de fréquences diffère de la loi de Planck. Nous avons vu en **II.6** que cette probabilité diminue en fonction de l'amplitude de l'écart selon un facteur gaussien (exponentielle du carré de l'amplitude), ce qui conduit très rapidement à des probabilités extrêmes. C'est pourquoi de tels écarts "ne se produisent jamais" et que la loi est déterministe. Nous y reviendrons encore au chapitre **XIV**.

VI. VARIABLES ALÉATOIRES.

VI.1. Le concept de variable aléatoire.

Dans les livres sur le Calcul des probabilités, on définit usuellement une variable aléatoire en disant que c'est une application définie sur l'espace Ω des épreuves, et à valeurs réelles.

Ceci est une définition mathématique; l'idée sous-jacente est celle d'une grandeur qui prend des valeurs "au hasard". Voyons cela sur des exemples. Imaginons une expérience de physique avec un détecteur, par exemple on veut détecter les impacts d'électrons sur un écran fluorescent. La position de l'électron sur l'écran est imprévisible (peu importe que ce soit pour des raisons quantiques ou thermiques ou autres). On peut repérer cette position par deux coordonnées x et y . Mais ni x , ni y , n'ont une valeur déterminée. Elles peuvent prendre n'importe quelle valeur (entre les limites de l'écran), et d'un impact à l'autre ces valeurs varient au hasard: elles sont variables et aléatoires. C'est pourquoi on dit que x et y sont des *variables aléatoires*. Il s'agit maintenant de comprendre le rapport entre cette idée et la définition mathématique.

Au chapitre *I* nous avons vu que la structure de l'espace des épreuves Ω contenait implicitement toute l'information sur la manière dont intervient le hasard pur dans le problème considéré. On parvient en quelque sorte au *hasard pur* lorsqu'on a identifié le niveau auquel se situent les choix équiprobables (nous avons insisté alors sur l'analogie entre le hasard *pur* et les repères galiléens). Ainsi, dans l'exemple des trois boules qui remplissent deux cases (figure 1), on a vu qu'il y a huit distributions différentes, dont l'équiprobabilité reflète les symétries spatio-temporelles: chaque boule a une chance sur deux exactement de choisir l'une ou l'autre case (symétrie spatiale) et l'expérience avec une boule est rigoureusement reproductible (invariance temporelle), de sorte que la deuxième ou la troisième boule n'est pas influencée par ce qui est arrivé aux précédentes. Si les deux cases ont la même probabilité $\frac{1}{2}$ d'être choisies, on considère que c'est le hasard pur qui a présidé (si l'on peut dire) au choix; si l'une des deux cases avait plus de chances que l'autre, on penserait qu'une cause, peut-être inconnue, modifie les choix purs du hasard. Comme nous l'avons vu à la fin du chapitre **I**, quand il y a équiprobabilité quelque part, la quête d'une cause s'arrête, car on a alors atteint en quelque sorte le niveau de

connaissance maximale sur la partie compréhensible du phénomène. Cela est tout particulièrement convaincant dans le cas des quantons⁽¹⁾ : la propriété de non-séparabilité quantique fait que pour des bosons par exemple il n'y a pas huit distributions, mais quatre modes d'occupation équiprobables. Une conséquence de cela est que (si on lance les particules l'une après l'autre) le deuxième boson a une probabilité $\frac{2}{3}$ d'aller dans l'état déjà occupé par le premier et une probabilité $\frac{1}{3}$ d'aller dans l'état encore vide. On dit alors qu'il y a une cause qui influence le second boson afin qu'il préfère aller dans l'état déjà occupé et on donne des noms à cette cause : non-séparabilité, condensation de Bose, etc. Mais cela signifie simplement que le hasard pur n'intervient pas au niveau du choix, séparé pour chaque quanton, de l'état qu'il va occuper. Si on veut chercher à quel niveau intervient le hasard pur, il faut chercher ce qui est équiprobable et on trouve que ce sont les modes d'occupation (figure 1, colonne de droite).

Dans l'expérience avec un détecteur, nous mesurons les coordonnées x et y des impacts d'électrons sur un écran ; si nous constatons une certaine répartition, qui favorise certains points et en défavorise d'autres (par exemple si les impacts s'accumulent le long de certaines lignes et forment ainsi une figure d'interférence), nous dirons que le hasard pur n'agit pas directement au niveau du choix du point sur l'écran, et qu'il y a une cause qui favorise les crêtes des franges d'interférence. L'espace Ω devra être recherché "en amont". Par contre si les impacts se répartissent uniformément sur l'écran, on pourra prendre pour Ω l'ensemble des pixels de l'écran. Dans le cas où Ω devra être recherché en amont, chaque élément de Ω devra évidemment correspondre à un résultat possible ; autrement dit, à *chaque* épreuve ω , élément de Ω , doit correspondre un impact *déterminé* sur l'écran. Ici, attention ! Le mot *déterminé* ne doit pas être compris comme signifiant qu'il y a du déterminisme. Pour chaque électron, il y a un choix *non déterministe*, en ce sens que s'il y a eu un déterminisme quelconque dans ce choix, il a été effacé par un brouillage ; mais le choix "par le pur hasard" ne se situe pas au niveau de la position sur l'écran, puisqu'il n'y a pas d'équiprobabilité à ce niveau, et que donc l'action du hasard est mélangée avec celle d'une cause qui favorise les crêtes de franges. L'action du pur hasard se situe "en amont", à un niveau où il y a une équiprobabilité des choix, un niveau qu'il s'agit de découvrir et qui sera celui de l'espace des épreuves Ω . Alors, pour chaque choix non-déterministe fait par le hasard à *ce niveau*, il correspondra un impact *déterminé* sur l'écran, de coordonnées x et y . Ainsi, x et y sont des fonctions de ce choix.

⁽¹⁾ particules soumises à la Mécanique quantique ; cf. l'ouvrage de J. M. LEVY-LEBLOND et F. BALIBAR, *Quantique, rudiments*.

D'où la définition mathématique "une variable aléatoire est une fonction définie sur l'espace des épreuves, à valeurs réelles". Cela signifie tout simplement qu'à chaque choix équiprobable ω (une épreuve, un élément de Ω), la fonction fait correspondre un nombre (par exemple la coordonnée de l'impact sur l'écran. Le hasard pur choisit aveuglément, au niveau où il intervient, une épreuve parmi toutes les épreuves équiprobables possibles, sans en favoriser aucune, et on observe une valeur numérique x , qui est un effet de ce choix, mais qui n'a aucune raison d'être répartie uniformément sur l'ensemble des valeurs possibles. C'est cette valeur numérique qui constitue la variable aléatoire.

**VI.2. La loi d'une variable aléatoire. Espérance, variance.
Fonction génératrice. Fonction caractéristique.**

On peut donc résumer ce qui précède de la façon suivante : une variable aléatoire prend une valeur numérique déterminée pour chaque épreuve ω (en langage mathématique : c'est une fonction de Ω dans \mathbb{R}). Ce n'est pas la valeur numérique prise par la variable aléatoire qui est "choisie au hasard", mais l'épreuve ω ; le choix de ω parmi toutes les épreuves équiprobables détermine alors la valeur que prendra la variable aléatoire. Il est clair que les valeurs numériques prises par la variable aléatoire ne sont pas, sauf exception, équiprobables. Par conséquent chacune des valeurs numériques possibles a une certaine probabilité. On appelle alors la donnée de ces probabilités la **loi de la variable aléatoire**. En termes plus mathématiques :

Soit X une variable aléatoire. L'ensemble $X(\Omega)$ de toutes les valeurs prises par X est nécessairement fini (et de cardinal au plus égal à celui de Ω), appelons $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ses éléments. Pour chaque x_k soit A_k l'ensemble des épreuves ω telles que $X(\omega) = x_k$ ($A_k = \{\omega \mid X(\omega) = x_k\}$). A_k est donc un événement qu'on peut désigner dans le langage imagé par "la variable aléatoire X prend la valeur x_k ". Chaque A_k a une probabilité $p_k = \#A_k / \#\Omega$. La loi de X est la donnée des x_k et des p_k : on la notera $\{x_k, (p_k)\}$.

Exemple a. Des cordes étant distribuées au hasard sur un cercle de rayon R (selon l'un des trois procédés que nous avons vu au chapitre I), la *longueur* d'une corde est une variable aléatoire. Appelons-la ℓ ; l'événement A dont nous avons calculé la probabilité au chapitre I était " $\ell > R\sqrt{3}$ ". Une autre variable aléatoire est d , la distance au centre du cercle. L'événement A est aussi " $d < \frac{1}{2}R$ ". Pour fixer les idées, mettons que les cordes sont distribuées selon le cas 2 (cf. figure 2), et que leur distribution est discrétisée en 360 degrés d'angle pour repérer (à 1 degré près, donc) la direction de la corde, et que le rayon $R = 1 m.$ est divisé en 100 *cm* (ainsi $\#\Omega = 36000$). Alors la variable aléatoire d prend les valeurs numériques (en

cm.): $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots, x_{100} = 100$, avec les probabilités $p_0 = 0.01, p_1 = 0.01, p_2 = 0.01, p_3 = 0.01, \dots, p_{99} = 0.01$ (elles sont toutes égales, on peut dire que la loi est *uniforme*).

Si on s'intéresse à la variable ℓ , on discrétisera les valeurs prises par la longueur. Celle-ci variant entre 0 cm et 200 cm , il est naturel de discrétiser en cm . On trouve alors que la probabilité pour que $\ell = k \text{ cm}$. (ou de façon plus précise $k \text{ cm.} \leq \ell < k + 1 \text{ cm.}$) est $k / 2\sqrt{40000 - k^2}$ (cette fois la loi n'est plus uniforme).

Exemple b. On considère les marches aléatoires à $2n$ pas. L'abscisse X atteinte par la marche au $2n^{\text{e}}$ pas est une variable aléatoire qui prend les valeurs $-2n, -2n+2, -2n+4, \dots, +2n-4, +2n-2, +2n$ avec les probabilités suivantes (cf. chapitre III) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X = -2n) &= 2^{-2n} \\ \mathcal{P}(X = -2n + 2) &= 2^{-2n} \binom{2n}{1} \\ \mathcal{P}(X = -2n + 4) &= 2^{-2n} \binom{2n}{2} \\ &\dots \\ \mathcal{P}(X = -2n + 2k) &= 2^{-2n} \binom{2n}{k} \\ &\dots \\ \mathcal{P}(X = 2n - 4) &= 2^{-2n} \binom{2n}{2} \\ \mathcal{P}(X = 2n - 2) &= 2^{-2n} \binom{2n}{1} \\ \mathcal{P}(X = 2n) &= 2^{-2n} \end{aligned}$$

Nous avons vu au chapitre II que les coefficients binômiaux $\binom{2n}{k}$ atteignaient leur maximum pour $k = n$, que ce maximum, pour n grand, pouvait être approché par $2^{2n} / \sqrt{\pi n}$, et que au voisinage du maximum on avait (cf. II.6.)

$$\binom{2n}{n+j} \simeq \binom{2n}{n} \cdot e^{-\frac{j^2}{n}} \simeq \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \cdot e^{-\frac{j^2}{n}}$$

On en déduit que *si n est grand*, ces probabilités (c'est-à-dire la loi de X) sont

$$\mathcal{P}(X = 2j) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot e^{-\frac{j^2}{n}}$$

Variables aléatoires

Pour $j^2 \gg n$ ces probabilités sont infinitésimales; elles ne sont notables que lorsque j est du même ordre de grandeur que \sqrt{n} ou plus petit. Pour se faire une idée plus concrète, soit $n = 1000$; alors $\sqrt{n} \simeq 32$; si $j > 100$, $e^{-j^2/n} < e^{-10} \simeq 0.0000454$, si $j > 150$, $e^{-j^2/n} < e^{-22.5} \simeq 1.7 \cdot 10^{-10}$. On voit qu'il est pratiquement impossible que X prenne des valeurs supérieures à 300 ou inférieures à -300 . La probabilité pour que $X = -2000$ ou $X = +2000$ est $2^{-2000} \simeq 10^{-602}$, alors que la probabilité pour que $X = 0$ est $2^{-2000} \cdot \binom{2000}{1000} \simeq 1/\sqrt{1000\pi} \simeq 1/56$. Ainsi, alors que toutes les marches possibles sont équiprobables, on observe une énorme disparité pour les probabilités des valeurs prises par la variable X . Sur l'ensemble Ω de tous les parcours possibles, le hasard n'en favorise aucun; mais précisément de ce fait il en résulte, *uniquement par l'intermédiaire des mécanismes de combinaisons*, que le hasard favorise énormément les valeurs de X comprises entre -300 et $+300$, au détriment des valeurs extrêmes.

Si on avait pris $n = 1\,000\,000$, ce phénomène serait encore plus marqué; en effet, on aurait alors $\mathcal{P}(X = \pm 2\,000\,000) = 2^{-2\,000\,000} \simeq 10^{-602\,060}$, et $\mathcal{P}(X = 0) \simeq 1/1772$. La probabilité pour que X soit compris entre -5000 et $+5000$ est alors supérieure à 0.9996. Si on compte en valeur relative, c'est-à-dire à l'échelle de n , en posant $x = X/n$, cela signifie que la probabilité pour que x soit compris entre -0.005 et $+0.005$ est supérieure à 0.9996. Pour $n = 1\,000\,000\,000$, x serait compris entre -0.0002 et $+0.0002$ avec une probabilité supérieure à 0.9999. Autrement dit, *par le seul mécanisme des combinaisons*, un choix aléatoire entre des parcours équiprobables se traduit, lorsque le nombre de pas n est très grand, par un quasi-déterminisme au niveau de l'ordonnée atteinte: on est pratiquement certain que celle-ci est proche de 0. En général, la loi est la suivante:

La probabilité pour que X/\sqrt{n} s'écarte de 0 de plus de 5 est inférieure à 0.0005; ou encore: la probabilité pour que $x = X/n$ s'écarte de 0 de plus de $5/\sqrt{n}$ est inférieure à 0.0005.

On est donc pratiquement certain que x sera dans un intervalle de largeur $10/\sqrt{n}$ autour de 0. La largeur de cet intervalle diminue proportionnellement à $1/\sqrt{n}$ quand n augmente, elle devient donc minuscule quand n est très grand. Le facteur 10 au numérateur de la fourchette $10/\sqrt{n}$ est lié au degré de certitude (déterminé ici par la probabilité 0.0005); si on prend une fourchette moins large, le degré de certitude baisse: ainsi la probabilité pour que x s'écarte de 0 de plus de $4/\sqrt{n}$ est 0.0046; pour $3/\sqrt{n}$ elle est de 0.034, pour $2/\sqrt{n}$ elle est de 0.157, et pour $1/\sqrt{n}$ elle est de 0.48. On voit donc que si la fourchette est cinq fois plus étroite, il n'y a pratiquement plus de certitude. Tout cela résulte de la variation en e^{-t^2} : cette fonction garde une valeur notablement différente de zéro tant que t est inférieur à 2

environ; pour $t > 3$, elle devient très vite extrêmement petite.

La propriété qui se manifeste ainsi est une propriété générale du hasard, que nous voyons ici à l'oeuvre dans un cas particulier. Cette propriété est **la loi des grands nombres**; elle sera étudiée sous sa forme générale au chapitre suivant. La loi des grands nombres a pour effet de transformer le hasard en déterminisme. L'exemple ci-dessus de la variable aléatoire $x = X/n$ le montre. Pour de petites valeurs de n , par exemple $n = 2$ ou $n = 5$, la variable x est réellement *aléatoire*, c'est-à-dire que les différentes valeurs qu'elle peut prendre ($-2, -1, 0, +1, +2$ si $n = 2$ et $-2, -1.6, -1.2, -0.8, -0.4, 0, +0.4, +0.8, +1.2, +1.6, +2$ pour $n = 5$) sont imprévisibles et ont seulement une certaine probabilité. Mais si n est très grand, et qu'on mesure les valeurs prises par la variable avec une précision de l'ordre de $\frac{5}{\sqrt{n}}$, alors la variable x prend la valeur 0 avec certitude. Dans un tel processus, le hasard n'a pas cessé d'agir: c'est bien toujours "le hasard pur" qui effectue pour la marche aléatoire des choix équiprobables *sur l'ensemble de tous les parcours possibles*; mais à un autre niveau d'observation, qui est celui des valeurs prises par la variable x , cela se traduit par du déterminisme.

Cette loi des grands nombres par laquelle le hasard se transforme en déterminisme est en quelque sorte l'inverse du chaos, qui transforme le déterminisme en hasard. Ce phénomène n'est pas différent de celui que nous avons plusieurs fois déjà souligné, à savoir que des choix équiprobables du hasard à un certain niveau se traduisent par des résultats non équiprobables à un autre niveau (que par exemple un choix équiprobable des deux extrémités d'une corde sur un cercle se traduisait par une répartition non équiprobable de la distance au centre); la loi des grands nombres est un effet de ce type, mais amplifié au point que la non-équiprobabilité devient extrême.

Nous avons étudié à la fin du chapitre **II** un exemple typique où intervient cette loi des grands nombres: la loi de Planck. En termes de variables aléatoires, on peut reformuler le problème étudié alors (cf. **II.6.**) en disant que les *nombre d'occupation* n_i de chaque intervalle d'énergie sont des variables aléatoires. La loi de Planck résultait de la loi des grands nombres, car la probabilité pour que les n_i soient proches de $m_i/(\exp(\hbar\omega_i/kT) - 1)$ est pratiquement égale à 1 pour la même raison que ci-dessus pour la variable aléatoire $x = X/n$. Lorsqu'on constate expérimentalement la distribution selon les fréquences du rayonnement émis par un corps chauffé, la loi de Planck apparaît comme une loi déterministe. En réalité elle est un effet du hasard.

La Physique a montré que le monde macroscopique est entièrement gou-

Variables aléatoires

verné par la loi des grands nombres⁽²⁾. Le monde des atomes et des particules est gouverné par le hasard, qui effectue des choix équiprobables sur l'ensemble de tous les états quantiques possibles (par exemple sur l'ensemble des modes d'occupations en statistique de Bose-Einstein). Mais au niveau des observations macroscopiques, cela se traduit par le déterminisme des lois de la thermodynamique ou de la mécanique classique. Il n'y a pas d'autre secret dans cette transformation du hasard en déterminisme, que la loi des grands nombres.

Exemple c. On considère toujours les marches aléatoires, et on appelle T l'instant du premier retour à 0. Nous avons vu au chapitre III que

$$\mathcal{P}(T = k) = \begin{cases} 2^{-2\ell} \binom{2\ell}{\ell} \frac{1}{2^{\ell-1}} & \text{si } k = 2\ell \text{ et } \ell \neq 0 \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair ou nul} \end{cases}$$

Ainsi T est une variable aléatoire qui prend les valeurs entières paires, avec les probabilités indiquées ci-dessus. Mais si on considère les marches aléatoires à $2n$ pas, il peut arriver aussi que le retour à zéro ne se produise jamais; la variable T peut donc prendre aussi la valeur "jamais", qui n'est évidemment pas numérique si on prend la définition au pied de la lettre. On peut montrer que la probabilité de cette valeur "jamais" est

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-2j} \binom{2j}{j} \frac{1}{2j-1} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Ainsi la variable T prend les valeurs $2, 4, 6, \dots, 2n-2, 2n$, et "jamais" avec les probabilités respectives données ci-dessus.

Remarque : En Calcul des probabilités on dit qu'une variable aléatoire qui peut ainsi n'avoir aucune valeur définie pour certaines épreuves est *incomplète*. Toutefois on voit que si n tend vers l'infini, la probabilité de la valeur "jamais" tend vers 0. Ceci donne envie de considérer parfois des espaces Ω infinis. Par exemple dans le cas présent, on aurait pour Ω l'ensemble de toutes les marches de durée infinie (donc sans limitation du nombre de pas). C'est la raison pour laquelle beaucoup (et même la plupart) des livres sur le Calcul des probabilités présentent une théorie pour des espaces Ω infinis. Le prix à payer pour cela est toutefois exorbitant: la plupart des propriétés que nous avons rencontrées dans ce cours sont extrêmement faciles à établir tant que Ω est un ensemble fini. Elles exigent des mathématiques très sophistiquées dès lors que Ω est infini (intégrale de Lebesgue, analyse fonctionnelle, etc. En outre, elles ne permettent pas de

⁽²⁾ Pour en savoir plus sur le rôle joué par la loi des grands nombres dans le comportement des corps macroscopiques, on pourra consulter: *Cours de Physique de Berkeley*, vol. 5, *Physique statistique* (Armand Colin, éd., coll. U), chapitre 1: propriétés caractéristiques des systèmes macroscopiques.

calculer davantage de choses : comme cela a été montré dans un ouvrage récent⁽³⁾, tout ce qui peut être effectivement calculé dans le cadre de ces théories sophistiquées peut aussi être calculé en traitant d'abord le problème avec un espace Ω fini, et en faisant tendre *ensuite*, dans les résultats obtenus, le cardinal de Ω vers l'infini.

On peut faire la convention que “jamais” soit représentée par la valeur numérique 0. Cette valeur ne risque pas, en effet, d'être déjà prise par la variable T , puisque l'instant zéro est celui du départ et ne peut donc être celui d'un *retour*. Cela élimine l'inélégance d'une valeur non numérique sans recourir pour autant à l'infini. On peut pratiquement toujours se débrouiller avec de tels expédients.

Étant donnée une variable aléatoire X qui prend les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{N-1}, p_N$, on appelle *moyenne* ou *espérance mathématique* de X la grandeur

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^N x_k p_k \tag{VI.1.}$$

On appelle *variance* de X la grandeur

$$\mathbf{Var}(X) = \sum_{k=1}^N (x_k - m)^2 p_k \tag{VI.2.}$$

avec $m = \mathbf{E}(X)$. En développant le carré $(x_k - m)^2 = x_k^2 - 2mx_k + m^2$ on peut écrire aussi :

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(X) &= \sum_{k=1}^N x_k^2 p_k - 2m \sum_{k=1}^N x_k p_k + m^2 \sum_{k=1}^N p_k \\ &= \mathbf{E}(X^2) - 2m^2 + m^2 = \mathbf{E}(X^2) - m^2 \end{aligned} \tag{VI.2 a.}$$

La moyenne ne nécessite aucune explication, elle relève de l'intuition première. La variance mérite par contre un commentaire. Comme on le voit dans la définition VI.2, c'est une somme de termes positifs (des carrés) ; la variance est donc d'autant plus grande que les nombres $x_k - m$ sont plus grands, mais la somme étant pondérée par les probabilités p_k , une grande valeur pour $x_k - m$ va peser d'autant plus que la probabilité correspondante, p_k , est plus grande. $x_k - m$ est en fait l'écart de x_k par rapport à la moyenne m . La variance est la moyenne du carré de l'écart. Elle est d'autant plus grande que la variable X s'écarte davantage de sa moyenne, et d'autant plus grande aussi que ces écarts se produisent avec une forte probabilité.

⁽³⁾ Edward NELSON *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton University Press, 1989.

Variables aléatoires

Autrement dit, la variance est une estimation de la tendance de la variable aléatoire à s'écartier de la moyenne, à se disperser. On aurait pu aussi mesurer cette tendance à la dispersion par la moyenne de la valeur absolue $\sum p_k |x_k - m|$ (il faut évidemment prendre la valeur absolue, car si on calcule la moyenne de $x_k - m$ en valeur algébrique, on trouve 0), ou par la moyenne de la puissance quatrième $\sum p_k (x_k - m)^4$. Comparé à la valeur absolue, le carré fait payer plus cher les grands écarts. La puissance quatrième les ferait payer encore plus cher. Il n'y a pas d'estimation absolue ou universelle de la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire. Le choix du carré est purement conventionnel et s'il sert de référence c'est simplement parce qu'on n'a pas trop à s'en plaindre; entre la valeur absolue qui sous-estime les grands écarts et la puissance quatrième qui les surestime, c'est peut-être un bon compromis; il se peut aussi que l'analogie avec le moment d'inertie ait contribué à en faire un *standard mondial*. Pour voir les choses plus concrètement, on peut examiner un exemple très simple.

Soient les variables aléatoires :

X , prenant les valeurs $-2, -1, 0, +1, +2$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{7}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$

Y , prenant les valeurs $-2, -1, 0, +1, +2$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$

Z , prenant les valeurs $-2, -1, 0, +1, +2$ avec les probabilités respectives $\frac{4}{10}, \frac{1}{10}, 0, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}$.

Pour les trois variables, la dispersion des valeurs est la même, mais la probabilité d'une grande dispersion est élevée pour Z et faible pour X . Leurs variances sont :

$$\mathbf{Var}(X) = 0.6 \quad \mathbf{Var}(Y) = 2.0 \quad \mathbf{var}(Z) = 3.4$$

ce qui reflète bien les différents types de dispersion (la variable Z à forte dispersion a une variance nettement plus élevée que la variable X à faible dispersion). Si on avait pris la moyenne des valeurs absolues pour mesurer la dispersion on aurait obtenu les valeurs :

$$\text{pour } X : 0.4 \quad \text{pour } Y : 1.2 \quad \text{pour } Z : 1.8$$

Comme prévu on voit que les trois cas sont moins nettement départagés (les grands écarts ne sont pas renforcés). Enfin, si on prend la moyenne des quatrièmes puissances :

$$\text{pour } X : 0.9 \quad \text{pour } Y : 6.8 \quad \text{pour } Z : 13.0$$

On voit l'effet de la surestimation des grands écarts. La variance est une convention très répandue, mais peut aussi devenir un pont-aux-ânes ; dans tel ou tel cas particulier on peut avoir de bonnes raisons de préférer estimer la dispersion par la quatrième puissance que par la variance, et il faut donner la priorité aux bonnes raisons sur le conformisme.

Un défaut de la variance est de ne pas mesurer l'écart dans les mêmes unités que la variable : si les x_k sont des *cm*, la variance sera en cm^2 . C'est pourquoi on introduit une autre estimation de l'écart qui est la racine carrée de la variance ou *écart-type*. Pour les variables X, Y, Z les écarts-types sont

$$\text{pour } X : 0.77 \quad \text{pour } Y : 1.41 \quad \text{pour } Z : 1.8$$

Pour l'estimation par les puissances quatrièmes, on pourra également prendre la racine quatrième du résultat, et on obtient ainsi une autre estimation, un «écart-type d'ordre 4» :

$$\text{pour } X : 0.97 \quad \text{pour } Y : 1.61 \quad \text{pour } Z : 1.90$$

On voit que la surestimation des grands écarts est réduite. En règle générale, on peut dire ceci : avec un écart-type d'ordre n (racine n^e de la moyenne des valeurs absolues des puissances n^e), plus n est élevé, plus on pénalise les grands écarts, même s'ils ont une probabilité faible.

Nous avons ainsi vu qu'on pouvait analyser la loi d'une variable aléatoire à l'aide de paramètres quantitatifs tels que la variance, l'écart-type, etc. Nous avons introduit la moyenne des puissances quatrièmes des écarts, qui comme les carrés, ou comme toute autre puissance paire, sont toujours positives. Si on voulait prendre des puissances impaires, il faudrait bien sûr prendre la moyenne *de leurs valeurs absolues* pour avoir une estimation significative de la dispersion. Toutefois, la moyenne d'une puissance impaire, sans valeur absolue, contient aussi de l'information sur la loi de la variable aléatoire ; quoique elle n'exprime pas la dispersion, une telle grandeur joue un rôle dans l'analyse de Fourier des lois de probabilité. On appelle **moments** ce type de grandeurs. De façon précise :

On appelle **moment d'ordre n** d'une variable aléatoire X la moyenne $\sum p_k x_k^n$ des n^e puissances des valeurs de X . La moyenne de X est ainsi le moment d'ordre 1 de X et la variance de X est le moment d'ordre 2 de $X - m$.

Les paramètres quantitatifs tels que les moments ou la moyenne des valeurs absolues, les écarts-types, etc. contiennent une information sur la loi de la variable aléatoire, mais ne contiennent pas toute l'information. On ne peut pas retrouver la loi d'une variable aléatoire si on n'en connaît que la moyenne et l'écart-type. Sous certaines conditions assez compliquées mais pas trop restrictives, la donnée de tous les moments détermine la loi de la variable, mais nous laissons cette question de côté. Par contre il y a

Variables aléatoires

deux manières très efficaces de condenser la totalité de l'information sur la loi d'une variable aléatoire, c'est d'introduire la *fonction génératrice* et la *fonction caractéristique*.

Étant donnée une variable aléatoire de loi $\{x_k, (p_k)\}$, on appelle *fonction caractéristique* de X la fonction

$$\Phi_X(t) = \sum_k p_k e^{itx_k} \quad (VI.3.)$$

En fait c'est simplement la transformée de Fourier de la loi. La fonction génératrice est

$$G_X(z) = \sum_k p_k z^{x_k} \quad (VI.4.)$$

La fonction génératrice est plutôt recommandée lorsque les x_k sont des nombres entiers; dans ce cas c'est un polynôme, ou, si on fait tendre le nombre des x_k vers l'infini, une fonction analytique de z . On bénéficie alors de tous les outils mathématiques liés aux polynômes ou aux fonctions d'une variable complexe. Rien n'interdit dans le principe de la prendre en considération même lorsque les x_k sont non entiers, mais dans un tel cas elle est beaucoup moins commode et on lui préférera alors la fonction caractéristique.

De toute façon, fonction caractéristique et fonction génératrice sont liées par la relation

$$\Phi_X(t) = G_X(e^{it}) \quad (VI.5.)$$

Pour une variable aléatoire X à valeurs entières, on obtient les probabilités de chaque valeur (c'est-à-dire la loi de la variable aléatoire X) en développant la fonction génératrice $G_X(z)$ en série entière, ou en série de Laurent s'il y a des valeurs négatives.

On peut aussi déduire directement de la fonction génératrice d'autres grandeurs liées à la variable aléatoire telles que la moyenne et la variance. Ainsi, la moyenne n'est autre que $G'_X(1)$ (la dérivée de $G_X(z)$ au point $z = 1$). En effet

$$G'_X(z) = \sum_n n p_n z^{n-1}$$

donc pour $z = 1$ cela donne

$$G'_X(1) = \sum_n n p_n = \mathbf{E}(X) \quad (VI.6.)$$

La dérivée seconde fournira la variance :

$$G_X''(z) = \sum_n n(n-1)p_n z^{n-2}$$

ce qui pour $z = 1$ donne $G_X''(1) = \sum_n n(n-1)p_n = \sum_n n^2 p_n - \sum_n n p_n = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)$. En utilisant *VI.2a* on peut avoir la variance sous la forme :

$$\mathbf{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 \quad (\text{VI.7.})$$

Des expressions analogues pour la moyenne ou la variance peuvent être obtenues à partir des fonctions caractéristiques. Ces expressions seront utilisées lorsque la variable aléatoire n'est pas à valeurs entières. On obtient en effet par dérivation :

$$\begin{aligned} \Phi_X'(t) &= \sum_k i x_k p_k e^{i x_k t} \\ \Phi_X''(t) &= \sum_k -x_k^2 p_k e^{i x_k t} \end{aligned}$$

donc pour $t = 0$

$$\begin{aligned} \Phi_X'(0) &= i \sum_k x_k p_k = i \mathbf{E}(X) \\ \Phi_X''(0) &= - \sum_k x_k^2 p_k = -\mathbf{E}(X^2) \end{aligned}$$

Cela conduit (compte tenu aussi de *VI.2a*) aux expressions suivantes de la moyenne et de la variance :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= -i \Phi_X'(0) \\ \mathbf{Var}(X) &= \Phi_X'(0)^2 - \Phi_X''(0) \end{aligned} \quad (\text{VI.8.})$$

Comme nous connaissons déjà quelques variables aléatoires, nous pouvons à titre d'exemple illustratif calculer leurs fonctions génératrices ou leurs fonctions caractéristiques. Reprenons les exemples *b* et *c* ci-dessus : il s'agissait de (*a*) l'abscisse atteinte par une marche aléatoire au bout de $2n$ pas ; (*b*) l'instant du premier retour en zéro. Les fonctions génératrices correspondantes sont

$$\begin{aligned} G_a(z) &= \sum_{j=-n}^{+n} 2^{-2n} \binom{2n}{n+j} z^{2j} = \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^{2n} \\ G_b(z) &= \sum_{j=1}^n 2^{-2n} \binom{2j}{j} \frac{1}{2j-1} z^{2j} + \text{reste} \end{aligned}$$

Variables aléatoires

Le reste n'est pas vraiment défini puisqu'il correspond à la valeur "jamais" du premier retour mais il tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, et on peut alors montrer que la limite est $G_b(z) = 1 - \sqrt{1 - z^2}$. Si on convient, comme nous en avons évoqué la possibilité plus haut, de réserver la valeur 0 pour "jamais", le reste sera tout simplement le terme constant

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-2j} \binom{2j}{j} \frac{1}{2j-1}$$

On voit que l'expédient qui consiste à prendre la valeur zéro pour "jamais" n'apporte aucune simplification dans les calculs : les fonctions génératrices sont en général un puissant outil de calcul. Dans ce cas particulier, elles le restent quand n est grand, car $G_b(z)$ est alors une fonction dont l'expression analytique est simple.

Quant aux fonctions caractéristiques, elles s'obtiennent en remplaçant z par e^{it} dans les expressions de la fonction génératrice, soit :

$$\begin{aligned} \Phi_a(t) &= \left[\frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) \right]^{2n} = [\cos(t)]^{2n} \\ \Phi_b(t) &\simeq 1 - \sqrt{1 - e^{2it}} \end{aligned}$$

(ici \simeq signifie que l'égalité est approchée pour n grand).

IV.3. L'indépendance stochastique de deux (ou plusieurs) variables aléatoires.

Au chapitre *IV* nous avons étudié l'indépendance stochastique de deux événements ou de deux familles d'événements. Nous avons vu que l'indépendance stochastique était toujours liée à une factorisation de l'espace Ω : deux événements A et B étaient alors stochastiquement indépendants si on pouvait factoriser l'ensemble Ω sous la forme d'un tableau (une matrice) rectangulaire, dans lequel l'événement A était un ensemble de lignes (plus exactement une réunion de lignes complètes) et l'événement B un ensemble de colonnes. De même une famille d'événements $\{A_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ est stochastiquement indépendante d'une famille d'événements $\{B_j\}_{j=1,2,\dots,n}$, si on peut factoriser Ω de telle manière que les A_i soient des ensembles de lignes et les B_j des ensembles de colonnes. On a alors la propriété $\mathcal{P}(A_i B_j) = \mathcal{P}(A_i) \times \mathcal{P}(B_j)$.

On dit que deux variables aléatoires X et Y de lois respectives $\{x_i(p_i)\}$ et $\{y_j(q_j)\}$ sont stochastiquement indépendantes si la famille d'événements $A_i : X = x_i$ est stochastiquement indépendante de la famille $B_j : Y = y_j$. Il y a alors une factorisation de Ω dans laquelle les événements A_i sont

formés de lignes complètes et les B_j de colonnes complètes ; cela signifie que la variable aléatoire X est constante le long des lignes et Y est constante le long des colonnes. Une épreuve ω dans le tableau est définie par la donnée de son numéro de ligne $\ell(\omega)$ et son numéro de colonne $col(\omega)$. On peut alors exprimer l'indépendance stochastique de X et Y en disant que $X(\omega)$ ne dépend que de $\ell(\omega)$, et $Y(\omega)$ ne dépend que de $col(\omega)$. En tous cas, on a la propriété de factorisation $\mathcal{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = \mathcal{P}(X = x_i) \times \mathcal{P}(Y = y_j) = p_i q_j$, qui évidemment n'aurait pas lieu si X et Y n'étaient pas stochastiquement indépendantes.

Lorsque deux variables aléatoires sont stochastiquement indépendantes, il y a des règles simples pour calculer leur somme. En effet, l'événement $X + Y = z_k$ est la réunion des événements disjoints $X = x_i$ et $Y = y_j$ pour lesquels $x_i + y_j = z_k$; or d'après l'indépendance stochastique on peut dire que $\mathcal{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = p_i q_j$, donc

$$\mathcal{P}(X + Y = z_k) = \sum_{x_i + y_j = z_k} p_i q_j$$

(la sommation sur $x_i + y_j = z_k$ signifie qu'on ne retient pour la somme que les indices i et j pour lesquels $x_i + y_j = z_k$). Si on applique cela à la fonction caractéristique de la variable aléatoire $X + Y$, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(t) &= \sum_k \mathcal{P}(X + Y = z_k) e^{itz_k} \\ &= \sum_k \left[\sum_{x_i + y_j = z_k} p_i q_j \right] e^{itz_k} \\ &= \sum_k \left[\sum_{x_i + y_j = z_k} p_i q_j \right] e^{it(x_i + y_j)} \\ &= \sum_k \left[\sum_{x_i + y_j = z_k} p_i e^{itx_i} q_j e^{ity_j} \right] \\ &= \sum_{i,j} p_i e^{itx_i} q_j e^{ity_j} \end{aligned}$$

qui n'est autre que le produit $\Phi_X(t) \times \Phi_Y(t)$ des fonctions caractéristiques de X et de Y .

On peut donc énoncer :

Théorème : Si X et Y sont des variables aléatoires stochastiquement indépendantes, alors la fonction caractéristique de leur somme est le produit des fonctions caractéristiques de chacune :

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \times \Phi_Y(t) \tag{VI.9.}$$

Variables aléatoires

Bien entendu, puisque $\Phi_X(t) = G_X(e^{it})$, il est clair qu'on a la même propriété pour les fonctions génératrices :

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \times G_Y(z) \quad (VI.10.)$$

mais comme on le verra dans les exemples et exercices, cette relation pour les fonctions génératrices, quoique toujours vraie, n'est d'un emploi commode que si les x_i et y_j sont entiers.

On peut interpréter l'abscisse atteinte au bout de $2n$ pas par une marche aléatoire comme la somme de $2n$ variables aléatoires X_j :

$$X_j = \begin{cases} +1 & \text{(avec prob. } 1/2) \text{ si le } j^{\text{e}} \text{ pas est un pas en avant} \\ -1 & \text{(avec prob. } 1/2) \text{ si le } j^{\text{e}} \text{ pas est un pas en arrière} \end{cases}$$

l'abscisse atteinte après $2n$ pas est alors égale à $S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{2n}$. Ces variables aléatoires sont stochastiquement indépendantes, puisque chaque pas d'une marche aléatoire est stochastiquement indépendant des autres. La fonction génératrice de chacune des X_j est $G_j(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ et d'après le théorème ci-dessus on doit avoir $G_S(z) = [\frac{1}{2}(z + 1/z)]^{2n}$, ce qui effectivement recoupe le calcul direct précédent. On pouvait donc utiliser la multiplication des fonctions génératrices pour calculer la loi de S , au cas où on ne l'aurait pas déjà calculée par un autre procédé.

VI.4. La loi conjointe de deux (ou plus) variables aléatoires.

Lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes, on peut calculer la probabilité d'événements tels que $\{X = x_j ; Y = y_k\}$ à partir de la seule connaissance des lois respectives de X et Y . Il suffit pour cela d'appliquer la règle du produit. En effet, l'événement $\{X = x_j ; Y = y_k\}$ (" $X = x_j$ et $Y = y_k$ ") est l'intersection $\{X = x_j\} \cap \{Y = y_k\}$; donc sa probabilité est, d'après la règle du produit, égale à $\mathcal{P}(X = x_j) \cdot \mathcal{P}(Y = y_k)$.

Par contre, si X et Y ne sont pas stochastiquement indépendantes, on ne peut pas déduire les probabilités $\mathcal{P}(X = x_j ; Y = y_k)$ des probabilités $\mathcal{P}(X = x_j)$ et $\mathcal{P}(Y = y_k)$. Il faut disposer d'une information supplémentaire, qui caractérise la dépendance entre X et Y .

Supposons que Y soit une fonction de X , par exemple $Y = X^2$. Dans ce cas on peut calculer les probabilités $\mathcal{P}(X = x_j ; Y = y_k)$ à partir des probabilités $\mathcal{P}(X = x_j)$ et $\mathcal{P}(Y = y_k)$.

On peut même faire plus fort : les calculer à partir des seules $\mathcal{P}(X = x_j)$. En effet, les y_k sont alors nécessairement les carrés des x_j ; si deux x_j distincts, disons x_{j_1} et x_{j_2} , ont le même carré y_k (cela équivaut à dire que

$x_{j_2} = -x_{j_1}$), alors $\mathcal{P}(Y = y_k) = \mathcal{P}(X = x_{j_1}) + \mathcal{P}(X = x_{j_2})$; si un seul des x_j , disons x_{j_0} , a pour carré y_k , alors $\mathcal{P}(Y = y_k) = \mathcal{P}(X = x_{j_0})$. On voit que dans ce cas la loi de Y se déduit directement de celle de X . Quant aux probabilités $\mathcal{P}(X = x_j ; Y = y_k)$, elles sont évidemment nulles si y_k n'est le carré d'aucun x_j , et égales à $\mathcal{P}(X = x_j)$ sinon. On peut dire que non seulement il n'y a pas plus d'information dans la donnée des probabilités des événements faisant intervenir les deux variables aléatoires X et Y que dans la donnée des probabilités des événements faisant intervenir séparément chacune des deux variables aléatoires X et Y , mais même qu'il n'y en a pas plus que dans la donnée des probabilités des événements faisant intervenir la seule variable aléatoire X .

L'exemple que nous venons de voir est en fait un cas extrême de dépendance. Il s'agit du cas où X et Y sont fonction l'une de l'autre. X est bien aléatoire, c'est-à-dire que les valeurs prises par X dépendent d'un choix (fait sur Ω) du hasard; mais la valeur prise par X détermine alors univoquement la valeur prise par Y , de sorte qu'il n'y a aucune intervention *supplémentaire* du hasard pour déterminer Y . Entre les deux extrêmes, il peut y avoir des formes de dépendance moins radicales qu'une telle relation fonctionnelle: que par exemple, la valeur de X étant fixée, plusieurs valeurs puissent être prises par Y , chacune avec une certaine probabilité, mais que ces probabilités dépendent de la valeur de X . L'indépendance stochastique signifie que les probabilités pour que Y prenne une valeur y_k ne sont pas influencées par la valeur prise par X . Si ces probabilités dépendent de la valeur de X , il y a une dépendance *stochastique* de Y par rapport à X , mais Y n'est pas pour autant une *fonction* de X . Pour rendre cela plus concret, prenons les trois exemples que voici.

X est une variable aléatoire qui prend les valeurs $-2, -1, 0, +1, +2$. Y est une autre variable aléatoire qui prend les valeurs $0, +1, +4$. Chacun des trois tableaux ci-contre représente une répartition différente des probabilités $\mathcal{P}(X = x_j ; Y = y_k)$. Dans les trois tableaux, les lois de probabilités de X et de Y sont les mêmes, c'est-à-dire que les probabilités

$$p_j = \mathcal{P}(X = j) = \sum_{k=0,1,4} \mathcal{P}(X = j ; Y = k)$$

pour $j = -2, -1, 0, +1, +2$, ainsi que les probabilités

$$q_k = \mathcal{P}(Y = k) = \sum_{j=0,\pm 1,\pm 2} \mathcal{P}(X = j ; Y = k)$$

pour $k = 0, 1, 4$, sont les mêmes dans les trois tableaux (on obtient les p_j en faisant la somme des éléments de la colonne j et les q_k en faisant la somme

Variables aléatoires

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$	$X = +2$
$Y = 0$	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
$Y = +1$	2/25	2/25	2/25	2/25	2/25
$Y = +4$	2/25	2/25	2/25	2/25	2/25

tableau 1

Ce tableau représente la loi de probabilité conjointe de deux variables aléatoires X et Y *indépendantes*. On trouve la probabilité pour que $X = j$ et $Y = k$ (avec $j = -2, -1, 0, +1, +2$ et $k = 0, 1, 4$) à l'intersection de la ligne $Y = k$ et de la colonne $X = j$. On peut constater que la probabilité conditionnelle pour que Y prenne l'une de ses trois valeurs est la même quelle que soit la valeur de X (les rapports des nombres figurant dans une même ligne à la somme des éléments de la ligne sont les mêmes pour chaque ligne ; de même pour les colonnes).

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$	$X = +2$
$Y = 0$	0	0	1/5	0	0
$Y = +1$	0	1/5	0	1/5	0
$Y = +4$	1/5	0	0	0	1/5

tableau 2

Ce tableau représente la loi de probabilité conjointe de deux variables aléatoires X et Y *liées* par la relation $Y = X^2$. On voit que les probabilités sont nulles lorsque $Y \neq X^2$. Mais la loi de X (somme des probabilités figurant sur une même colonne) et la loi de Y (somme des probabilités figurant sur une même ligne) sont les mêmes que dans le tableau 1.

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$	$X = +2$
$Y = 0$	1/60	1/30	1/10	1/30	1/60
$Y = +1$	1/15	1/10	1/15	1/10	1/15
$Y = +4$	7/60	1/15	1/30	1/15	7/60

tableau 3

Ce tableau représente la loi de probabilité conjointe de deux variables aléatoires X et Y qui ne sont ni indépendantes, ni fonction l'une de l'autre. La probabilité conditionnelle pour que $Y = k$ sachant que $X = j$ dépend de j , mais par exemple pour $X = 0$ il y a comme on voit trois valeurs possibles pour Y , avec probabilités non nulles $1/10$, $1/15$, $1/30$. La probabilité conditionnelle pour que $Y = 0$ sachant que $X = 0$ est $\frac{1}{2}$; mais la probabilité conditionnelle pour que $Y = 0$ sachant que $X = 1$ est $\frac{1}{6}$ et la probabilité conditionnelle pour que $Y = 0$ sachant que $X = 2$ est $\frac{1}{12}$: elle dépend fortement de la valeur de X , mais n'est pas égale à 0 ou 1 comme c'était le cas pour le tableau 2.

des éléments de la ligne j). Par contre ces trois exemples diffèrent par la répartition bidimensionnelle des probabilités, qui reflète la dépendance entre les deux variables.

Dans le premier tableau la répartition est faite de façon à assurer l'indépendance stochastique entre X et Y . En effet, si on calcule les probabilités conditionnelles

$$\mathcal{P}(X = j | Y = k) = \frac{\mathcal{P}(X = j ; Y = k)}{\mathcal{P}(Y = k)} = \frac{\mathcal{P}(X = j ; Y = k)}{\sum_j \mathcal{P}(X = j ; Y = k)}$$

qui sont donc pour chaque ligne le quotient des éléments de la ligne par la somme des éléments de la ligne, on constate que ces probabilités conditionnelles ne dépendent pas de k , ce qui est bien la marque de l'indépendance stochastique; au demeurant $\mathcal{P}(X = j | Y = k) = \mathcal{P}(X = j)$. De même les probabilités conditionnelles

$$\mathcal{P}(Y = k | X = j) = \frac{\mathcal{P}(X = j ; Y = k)}{\mathcal{P}(X = j)} = \frac{\mathcal{P}(X = j ; Y = k)}{\sum_k \mathcal{P}(X = j ; Y = k)}$$

qui sont donc pour chaque colonne le quotient des éléments de la colonne par la somme des éléments de la colonne, ne dépendent pas de j . (Vérifiez cela sur le tableau avec un crayon).

Variables aléatoires

Le second tableau représente la répartition des probabilités lorsque $Y = X^2$. Cette dépendance absolue fait que Y ne peut pas prendre une valeur qui ne soit pas le carré de X . Si $X = 2$, Y ne peut pas être égal à 0 ou à 1, ce qui se traduit sur le tableau par le fait que la probabilité pour que $X = 2$ et $Y = 0$, ou pour que $X = 2$ et $Y = 1$, est nulle.

Enfin, dans le troisième tableau, on a un exemple de dépendance *stochastique*, c'est-à-dire que la variable Y n'est pas une fonction de X , mais n'est pas non plus stochastiquement indépendante de X : lorsque X prend la valeur +2, Y ne prend pas *forcément* la valeur +4, et peut prendre n'importe laquelle des trois valeurs 0, 1, ou 4. Mais cette fois, contrairement à ce qui se passe sur le tableau 1, les probabilités conditionnelles $\mathcal{P}(Y = k | X = j)$ dépendent de j , et aussi les probabilités conditionnelles $\mathcal{P}(X = j | Y = k)$ dépendent de k . Par exemple, la probabilité (conditionnelle) pour que $Y = 0$ sachant que $X = 0$ est $\frac{1}{2}$, mais la probabilité conditionnelle pour que $Y = 0$ sachant que $X = +1$ est $\frac{1}{6}$ et la probabilité conditionnelle pour que $Y = 0$ sachant que $X = +2$ est $\frac{1}{12}$. Dans le tableau 2, si $X = 0$, il est *certain* que $Y = 0$; dans le tableau 1, la probabilité conditionnelle pour que $Y = 0$ sachant que $X = j$ est *toujours* $\frac{1}{5}$ quelle que soit la valeur j de X .

Tout cela montre que, si deux variables aléatoires X et Y ne sont ni stochastiquement indépendantes, ni liées par une relation fonctionnelle, on ne peut déduire à *partir de leurs deux lois* les probabilités de toutes les combinaisons de valeurs qu'elles peuvent prendre conjointement : il faut disposer d'un tableau qui donne directement l'information complète. On appelle *loi conjointe* des deux variables aléatoires X et Y la donnée de ce tableau, c'est-à-dire la donnée de

a) toutes les valeurs x_j que peut prendre X et toutes les valeurs y_k que peut prendre Y ;

b) toutes les probabilités $r_{j,k} = \mathcal{P}(X = x_j ; Y = y_k)$

Pour désigner commodément une loi conjointe on écrira $\{x_j, y_k ; (r_{j,k})\}$. Cela signifiera que la probabilité pour que $X = x_j$ et $Y = y_k$ est $r_{j,k}$. Cette loi conjointe contient donc une information qui *n'est pas* déjà contenue dans les deux lois $\{x_j ; (p_j)\}$ et $\{y_k ; (q_k)\}$, sauf, comme nous l'avons déjà dit, si X et Y sont stochastiquement indépendantes (alors $r_{j,k} = p_j q_k$) ou si $Y = f(X)$, f étant une fonction non aléatoire (alors $r_{j,k} = 0$ si $y_k \neq f(x_j)$ et $r_{j,k} = p_j$ si $y_k = f(x_j)$, comme sur le tableau 2).

Les deux lois $\{x_j ; (p_j)\}$ et $\{y_k ; (q_k)\}$, c'est-à-dire les lois de X et de Y sont appelées *lois marginales*, par opposition à la loi conjointe du couple X, Y . Lorsque la loi conjointe de deux variables est représentée sur

un tableau à double entrée comme les tableaux 1, 2, et 3, on obtient les lois marginales en effectuant les sommes sur les lignes et sur les colonnes.

Cela peut se généraliser à un nombre quelconque de variables aléatoires : au lieu d'un tableau à deux indices (ou matrice), on aurait un tableau à n indices ou dimensions.

Tout cela n'est bien sûr qu'une question de langage ; si dès le départ (et certains auteurs procèdent ainsi) on avait annoncé que les variables aléatoires sont des grandeurs vectorielles, que ce sont bien des fonctions définies sur l'espace Ω , mais à valeurs dans \mathbb{R}^n et non dans \mathbb{R} , on n'aurait pas eu à distinguer le cas de plusieurs variables aléatoires du cas d'une seule ; la loi d'une variable aléatoire vectorielle X serait la donnée des valeurs vectorielles x_j et de leurs probabilités, qui serait évidemment la même chose que la loi conjointe des n composantes de X . Dans ce langage vectoriel on ne parlerait pas de l'indépendance stochastique entre n variables aléatoires, mais entre les n composantes d'une variable aléatoire.

Ce qui en tous cas reste certain, c'est que (dit dans le langage non vectoriel) si deux variables aléatoires ne sont ni stochastiquement indépendantes, ni liées par une relation fonctionnelle, on ne peut calculer les probabilités qui leur sont relatives que si on connaît leur loi conjointe.

Précédemment (§VI.3) nous avons associé à la loi d'une variable aléatoire des grandeurs comme les moments (la variance) ou des fonctions comme les fonctions génératrices ou caractéristiques. On peut en faire autant avec les lois conjointes. Ainsi on appelle *covariance* des deux variables aléatoires X et Y (de loi conjointe $\{x_j, y_k ; (r_{j,k})\}$) la grandeur

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \sum_{j,k} r_{j,k} [x_j - \mathbf{E}(X)][y_k - \mathbf{E}(Y)] \quad (VI.11.)$$

De même on appellera *fonction génératrice conjointe* de X et Y la fonction de *deux* variables complexes

$$G_{X,Y}(z, w) = \sum_{j,k} r_{j,k} z^{x_j} w^{y_k} \quad (VI.12.)$$

(peu pratique si les nombres x_j et y_k ne sont pas entiers) et *fonction caractéristique conjointe* de X et Y la fonction de *deux* variables réelles

$$\Phi_{X,Y}(s, t) = \sum_{j,k} r_{j,k} e^{isx_j} e^{ity_k} \quad (VI.13.)$$

Bien entendu si X et Y sont stochastiquement indépendantes on aura

$$G_{X,Y}(z, w) = G_X(z) \cdot G_Y(w) \quad (VI.14.)$$

Variables aléatoires

et

$$\Phi_{X,Y}(s, t) = \Phi_X(s) \cdot \Phi_Y(t) \quad (VI.15.)$$

Si X et Y sont stochastiquement indépendantes, leur covariance est nécessairement nulle: en effet, dans ce cas on aura $r_{j,k} = p_j q_k$, et par conséquent l'expression (VI.11.) de la covariance se factorise

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(X, Y) &= \sum_{j,k} r_{j,k} [x_j - \mathbf{E}(X)][y_k - \mathbf{E}(Y)] \\ &= \sum_j p_j [x_j - \mathbf{E}(X)] \times \sum_k q_k [y_k - \mathbf{E}(Y)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Une erreur tentante chez les débutants est de croire que la réciproque a lieu: que si la covariance de deux variables aléatoires est nulle, alors elles sont indépendantes. Cela est faux et on en a deux exemples avec les tableaux 2 et 3: si on calcule la covariance de X et Y avec la loi conjointe du tableau 2 ou du tableau 3, on trouve qu'elle est nulle, alors que X et Y ne sont indépendantes dans aucun de ces deux cas.

Nous avons vu au §VI.2. que si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on peut facilement calculer la loi de leur somme en faisant le produit des fonctions génératrices ou des fonctions caractéristiques. Lorsque deux variables ne sont pas indépendantes, mais qu'on connaît leur loi conjointe, et par conséquent leur fonction génératrice ou caractéristique conjointe, on obtient la fonction génératrice ou caractéristique de leur somme par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(t) &= \Phi_{X,Y}(t, t) \\ G_{X+Y}(z) &= G_{X,Y}(z, z) \end{aligned} \quad (VI.16.)$$

Si on combine cela avec (VI.15.) ou (VI.14.) on retrouve (VI.9.) ou (VI.10.)

Cela s'étend comme on le devine au cas de 2, 3, 4... variables aléatoires.

VII. LA LOI NORMALE.

VII.1. Un exemple simple : la marche aléatoire ou le jeu de pile ou face.

Nous avons déjà remarqué (voir VI.2., exemple b) que l'abscisse S atteinte après $2n$ pas par une marche aléatoire était la somme de $2n$ variables aléatoires X_j , égales à -1 ou $+1$ (avec probabilité $\frac{1}{2}$) selon que le j^e pas est en arrière ou en avant. La loi de la variable aléatoire S est, comme nous l'avons calculée au chapitre III,

$$\mathcal{P}(S = -2n + 2k) = 2^{-2n} \binom{2n}{k}$$

Sa fonction caractéristique est $\Phi_S(t) = [\cos(t)]^{2n}$, ce qui est logique puisque la fonction caractéristique de chacune des X_j est $\Phi_{X_j}(t) = \cos(t)$ et que la fonction caractéristique de la somme des X_j , qui sont indépendantes, est le produit de leurs fonctions caractéristiques.

Nous avons établi au chapitre II l'approximation suivante pour les coefficients binômiaux, valable pour n grand :

$$\binom{2n}{n+j} \sim \binom{2n}{n} \exp\left[-\frac{j^2}{n}\right] \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \cdot \exp\left[-\frac{j^2}{n}\right]$$

Cela peut s'interpréter en disant que la probabilité pour que $S = 2j$ (lorsque j est un entier entre $-n$ et $+n$), est $(1/\sqrt{\pi n}) \exp[-j^2/n]$ (approximativement), ou encore, que *pour n grand*, la loi de probabilité de la variable aléatoire S est approximativement gaussienne, avec un écart-type $\sigma = \sqrt{n/2}$.

Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire S s'étendent de $-2n$ à $+2n$. Mais les valeurs extrêmes $\pm 2n$ ont une probabilité prodigieusement petite: 2^{-2n} . La valeur la plus probable est $S = 0$ qui a une probabilité à peu près égale à $1/\sqrt{\pi n}$ (ce qui pour n grand est incomparablement plus grand que 2^{-2n}) et l'approximation montre que la probabilité décroît autour de ce maximum selon la loi gaussienne

$$\mathcal{P}(S = 2j) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left[-\frac{j^2}{n}\right]$$

La loi normale

Comme nous l'avons déjà discuté au chapitre **VI** (exemple **b**), si j est sensiblement supérieur à l'écart-type $\sqrt{n/2}$, cette probabilité devient rapidement très petite, c'est le phénomène connu sous le nom de *loi des grands nombres*. Si on lance 1000 fois une pièce de monnaie (rappelons que la marche aléatoire est aussi un modèle pour les jeux de pile ou face), le calcul ci-dessus montre que le nombre de pile le plus probable est 500 (probabilité $1/\sqrt{500\pi} \simeq 0.0252$; obtenir 519 a une probabilité un peu plus faible : $1/\sqrt{500\pi} \cdot \exp(-19^2/500) \simeq 0.0122$. Pour 530 la probabilité tombe à 0.0042, pour 550 à 0.00017, pour 575 à $3.28 \cdot 10^{-7}$, et pour 600 à $5.19 \cdot 10^{-11}$. Si on lançait la pièce 1 000 000 de fois au lieu de 1 000, on obtiendrait les probabilités correspondantes que voici :

500 000	$7.98 \cdot 10^{-4}$
519 000	$2.72 \cdot 10^{-314}$
530 000	$1.81 \cdot 10^{-782}$
575 000	$1.33 \cdot 10^{-4886}$
600 000	$9.4 \cdot 10^{-312693}$

On voit que pour des écarts proportionnellement équivalents, les probabilités sont absolument infinitésimales pour un million d'essais, alors qu'elles ne l'étaient pas pour mille essais. Par contre pour des écarts de l'ordre de 500 (donc pour obtenir 500 500 pile sur 1 000 000 de lancers), la probabilité est $6.21 \cdot 10^{-4}$, soit seulement 1.28 fois plus petite que la probabilité maximum. On peut conclure de cette petite observation numérique que si on lance une pièce de monnaie mille fois, la probabilité d'obtenir plus de 600 pile et moins de 400 face ou vice-versa (c'est-à-dire d'obtenir des fluctuations supérieures à 20%) sera extrêmement faible, en tous cas inférieure à 10^{-9} . Par contre la probabilité d'obtenir entre 400 et 600 pile sera très proche de 1. Si on lance la pièce 1 000 000 de fois, la probabilité d'obtenir des fluctuations supérieures à 20% sera inférieure à $10^{-312000}$, ce qui signifie pratiquement que de telles fluctuations sont *absolument* impossibles. Pour 1 000 000 de lancers, la probabilité d'obtenir des fluctuations de plus de 1% par rapport à 500 000 (c'est-à-dire un nombre de pile ou de face inférieur à 495 000 ou supérieur à 505 000) est de l'ordre de 10^{-10} .

Ce qui détermine le seuil à partir duquel une probabilité qui suit une loi gaussienne devient petite est l'écart-type (ici $\sqrt{n/2}$); cette probabilité devient absolument infinitésimale lorsqu'on s'écarte de la valeur la plus probable de dix fois l'écart-type. Or l'écart-type de la marche aléatoire (ou du jeu de pile ou face) étant de l'ordre de la racine carrée de n , est, proportionnellement à n lui-même, d'autant plus petit que n est plus grand : si on lance $2n$ fois une pièce de monnaie, la fréquence relative des pile et des face tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini, et les fluctuations *en*

valeur relative sont de plus en plus improbables ; si on appelle x l'amplitude relative ($x = j/n$) de ces fluctuations, la probabilité des fluctuations décroît en e^{-nx^2} , qui devient pratiquement nul ($e^{-10} \simeq 4.5 \cdot 10^{-5}$) lorsque $nx^2 > 10$, et absolument infinitésimal ($e^{-30} \sim 10^{-13}$) lorsque $nx^2 > 30$. On peut donc dire que sur $2n$ lancers de pièce, il est extrêmement improbable et donc pratiquement impossible d'obtenir des écarts supérieurs à $\sqrt{30/n}$ en valeur relative par rapport à la valeur moyenne.

Il a déjà été dit au chapitre précédent que cette loi des grands nombres transformait – à l'inverse du chaos – le hasard en déterminisme : il suffit pour cela que la précision avec laquelle le résultat est perçu ou mesuré ne soit pas parfaite, que le résultat ne puisse être connu qu'à quelques écart-types près. Les valeurs “les plus probables” deviennent alors certaines.

Il se trouve que cette propriété n'est pas seulement vraie dans le cas de la marche aléatoire ou du jeu de pile ou face, mais qu'elle est vraie pour *n'importe quel* phénomène aléatoire qui se répète un grand nombre de fois, pourvu qu'il y ait — comme c'était le cas pour la pièce de monnaie — indépendance stochastique entre les répétitions. C'est ce que nous allons prouver dans les deux sections suivantes.

VII.2. Une propriété des fonctions caractéristiques.

Soit X une variable aléatoire de loi $\{x_k (p_k)\}$. Sa fonction caractéristique est (voir VI.2) $\Phi(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}$. Or on dispose pour la fonction $e^{i\alpha}$ du développement limité suivant :

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - i\alpha^3 \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} e^{i\alpha\tau} d\tau$$

Si on reporte ce développement dans l'expression de la fonction caractéristique on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_k p_k e^{itx_k} \\ &= \sum_k p_k \left[1 + itx_k - \frac{t^2}{2}x_k^2 - it^3x_k^3 \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} e^{itx_k\tau} d\tau \right] \\ &= \sum p_k + it\sum p_k x_k - \frac{t^2}{2}\sum p_k x_k^2 - it^3\sum p_k x_k^3 \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} e^{itx_k\tau} d\tau \end{aligned}$$

Cette expression est un développement limité de la fonction caractéristique (pour t petit). On constate que le coefficient de t dans ce développement est $i\sum p_k x_k$, c'est-à-dire $i\mathbf{E}(X)$; le coefficient de t^2 est $-\frac{1}{2}\sum p_k x_k^2$, c'est-à-dire $-\frac{1}{2}E(X^2)$. Si $\mathbf{E}(X) = 0$, $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{Var}(X)$: dans ce cas le développement

La loi normale

limité de $\Phi(t)$ commence par $1 - \frac{t^2}{2}\mathbf{Var}(X)$. Cela est vrai pour la fonction caractéristique de *n'importe quelle variable aléatoire*, pourvu que sa moyenne et la moyenne de son carré ne soient pas infinies.

Si on souhaite pousser plus loin le développement limité, aucune difficulté particulière ne s'y oppose. Pour écrire un tel développement, il est commode d'introduire les moments :

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathbf{E}(X) & M_2 &= \sum_k p_k x_k^2 \\ M_3 &= \sum_k p_k x_k^3 & M_4 &= \sum_k p_k x_k^4 \\ & & \dots & \end{aligned}$$

Alors le développement limité de la fonction caractéristique peut s'écrire

$$\Phi(t) = 1 + itM_1 - \frac{t^2}{2}M_2 - i\frac{t^3}{6}M_3 + \frac{t^4}{24}M_4 \quad \dots \quad (VII.1.)$$

On peut observer cela sur les cas particuliers que nous avons déjà étudiés. Par exemple si X est une variable aléatoire qui prend les valeurs $+1$ et -1 avec probabilités $\frac{1}{2}$, la fonction caractéristique est $\cos(t)$; $\mathbf{E}(X) = 0$, $\mathbf{Var}(X) = 1$, et on a bien $\cos(t) \simeq 1 - \frac{t^2}{2}$. On pourrait constater qu'il en est de même pour toutes les fonctions caractéristiques de variables aléatoires dont la moyenne et la variance sont finies. Si X est par exemple le premier retour à zéro d'une variable aléatoire, nous avons vu que (à la limite où le nombre n de pas tend vers l'infini) la moyenne est infinie; la fonction caractéristique, qui dans ce cas était $1 - \sqrt{1 - e^{2it}}$ ne possède pas de développement limité à l'ordre 2: en fait elle n'est pas dérivable au point $t = 0$.

On peut donc dire que toutes les fonctions caractéristiques sont de la forme $1 + it\mathbf{E}(X) - \frac{t^2}{2}\mathbf{E}(X^2)$ au voisinage de $t = 0$ (pourvu que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$ soient finies). Une fonction qui n'aurait pas un développement limité de cette forme au voisinage de zéro (qui serait par exemple de la forme $1 + \frac{t^2}{2}$) ne pourrait être la fonction caractéristique d'aucune variable aléatoire⁽¹⁾

⁽¹⁾ à moins de considérer des variables aléatoires à valeurs complexes: ainsi une v.a. qui prendrait les valeurs $\pm i$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacune, aurait une fonction caractéristique égale à $\cosh(t) \simeq 1 + \frac{t^2}{2}$. Nous ne considérons que des v.a. à valeurs réelles, et s'il y a un jour des valeurs complexes à prendre en compte, on décomposera en partie réelle et partie imaginaire. De toute façon, même en admettant des v.a. complexes, leurs fonctions caractéristiques obéissent à des contraintes strictes (la transformée de Fourier d'une loi de probabilité ne peut pas être n'importe quoi); il existe des ouvrages entiers rien que sur ce sujet: voir par exemple Eugène Lukacs *fonctions caractéristiques* Dunod, Paris, 1964.

En dehors du développement limité au voisinage de zéro, les fonctions caractéristiques ont encore d'autres propriétés caractéristiques ; par exemple elles sont toujours bornées par 1 : si X est une variable aléatoire absolument quelconque, on aura toujours $|\Phi_X(t)| \leq 1$. Il est très facile de s'en assurer, il suffit de remarquer que

$$|\Phi_X(t)| = \left| \sum_k p_k e^{itx_k} \right| \leq \sum_k |p_k e^{itx_k}| = \sum_k p_k = 1$$

Cette propriété est donc simplement due au fait que les probabilités p_k sont des nombres positifs dont la somme vaut 1 (notons qu'on a aussi utilisé le fait que $|e^{itx_k}| = 1$, ce qui serait faux si les valeurs x_k pouvaient être complexes).

Si les valeurs x_k prises par la variable aléatoire X sont entières, la fonction caractéristique est périodique (de période 2π). Plus généralement, si les x_k sont tous des multiples entiers d'un même nombre réel a (c'est-à-dire qu'ils ne sont pas mutuellement incommensurables), la fonction caractéristique est périodique, de période $2\pi/a$. Si par contre les x_k sont mutuellement incommensurables, la fonction caractéristique n'est pas périodique.

VII.3. La somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes.

Nous avons vu à la section précédente que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de moyenne nulle est de la forme $1 - \frac{t^2}{2} \mathbf{Var}(X)$ au voisinage de $t = 0$. Maintenant nous allons voir que cette propriété des fonctions caractéristiques a une conséquence capitale : la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes suit une loi approximativement gaussienne, et cela *quelle que soit la loi des variables individuelles*.

En étudiant l'exemple du jeu de pile ou face, nous avons vu que les fluctuations pour n lancers avaient un écart-type σ de l'ordre de \sqrt{n} . Cela veut dire que des fluctuations de plusieurs dizaines de fois σ sont pratiquement impossibles, et que donc les fluctuations autour de la valeur moyenne (qui est la plus probable) sont pratiquement toutes de l'ordre de \sqrt{n} . Ainsi l'amplitude de ces fluctuations tend vers l'infini en même temps que n , mais plus lentement ; si par contre on ne les compte qu'en valeur relative (en les divisant donc par n), leur amplitude tend vers zéro. On obtiendrait une valeur-limite de l'écart-type lorsque n tend vers l'infini en divisant les fluctuations par \sqrt{n} . C'est pourquoi, en étudiant le cas général, nous ne mesurerons les fluctuations ni en valeur exacte, ni en valeur relative, mais à l'échelle intermédiaire \sqrt{n} .

Voici donc ce que nous nous proposons d'établir :

La loi normale

Théorème: soient des variables aléatoires $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ indépendantes et de moyenne nulle. On considère les fluctuations de la somme (rapportée comme annoncé à l'unité \sqrt{n}):

$$S = \frac{X_1 + X_2 + X_3 \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

Alors la variable aléatoire S a, pour n grand, une loi approximativement gaussienne.

Ce théorème exige deux commentaires :

a) avoir supposé que les variables aléatoires $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ sont de moyenne nulle n'est pas une restriction. Nous ne nous intéressons en effet qu'aux *fluctuations* de leur somme autour de la moyenne; si les X_j ont des moyennes $\mathbf{E}(X_j) = m_j$ non nulles, leur somme T a pour moyenne la somme des moyennes, soit $\mathbf{E}(T) = m = \sum m_j$. Les fluctuations de T autour de cette moyenne peuvent s'écrire $T - m = \sum (X_j - m_j)$ et les fluctuations rapportées à l'unité \sqrt{n} seront

$$S = \frac{T - m}{\sqrt{n}} = \frac{\sum (X_j - m_j)}{\sqrt{n}}$$

de sorte que tout se ramène à des variables aléatoires de moyenne nulle, à savoir les $X_j - m_j$.

b) Le sens de l'expression "une loi approximativement gaussienne" doit être précisé. Dans le cas de la marche aléatoire (voir section **VII.1**) ce sens était clair; la loi exacte était donnée par les coefficients du binôme et ceux-ci pouvaient être approchés par une expression de la forme e^{-x^2} . Mais on savait alors que les valeurs prises par la variable aléatoire étaient entières. Dans le cas général il n'y a plus aucune raison pour que les valeurs soient entières, ni même équidistantes, mais celles-ci sont cependant toujours discrètes; une approximation de cette loi discrète ne peut pas se réduire à une approximation des probabilités de chaque valeur: il faut en outre avoir une approximation des valeurs elles-mêmes. Par ailleurs la fonction e^{-x^2} est définie sur les nombres réels, c'est-à-dire qu'elle dépend d'une variable qui varie de façon continue; en particulier, dans l'hypothèse où les valeurs prises par la variable aléatoire ne sont pas équidistantes, toute information sur la distance entre les valeurs discrètes a disparu. Dans quel sens peut-on alors dire qu'une loi continue approche une loi discrète?

Cela devra être entendu dans le sens suivant: divisons l'intervalle compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs en N parties égales de longueur ε . Il faut que ε soit petit, mais pas trop: il doit être assez petit pour que la fonction continue (en l'occurrence e^{-x^2}) varie peu sur la distance

ε , mais il faut aussi qu'il soit grand par rapport à la distance moyenne entre les valeurs prises par la variable aléatoire, afin que chacun des intervalles de longueur ε contienne un échantillon statistiquement significatif de valeurs discrètes. Une telle opération s'appelle un échantillonnage. On dira alors qu'une densité continue $y = f(x)$ approche une loi discrète $\{x_j, (p_j)\}$ si dans chacun des intervalles d'échantillonnage J de longueur ε , on a

$$\sum_{x_j \in J} p_j \simeq \varepsilon f(x_j)$$

Il serait équivalent de dire ceci : pour tout intervalle $[a, b[$ dont la longueur est suffisante pour contenir un échantillon statistiquement significatif de valeurs discrètes, on a

$$\sum_{a \leq x_j < b} p_j \simeq \int_a^b f(x) dx$$

Dans l'exemple de la marche aléatoire, la variable aléatoire dont on voulait approcher la loi par une densité continue est le déplacement rapporté à \sqrt{n} , qui prend des valeurs allant de $-\sqrt{n}$ à $+\sqrt{n}$, avec un pas égal à $2/\sqrt{n}$. Dans ce cas le nombre ε évoqué ci-dessus, qui représente — en ordre de grandeur — la taille optimale des intervalles d'échantillonnage, doit être sensiblement plus grand que le pas $2/\sqrt{n}$, tout en étant petit à l'échelle usuelle, macroscopique (celle où le pas de la marche vaut 1); une valeur de ε telle que par exemple $n^{-1/4}$ serait correcte.

On pourrait penser à la première lecture que toutes ces considérations sur les intervalles qui doivent être “petits, mais pas trop”, qui doivent “contenir un échantillon statistiquement significatif”, etc. sont des simplifications grossières de physicien ou d'ingénieur, mais que les véritables mathématiques permettent de dépasser ces vulgarités et offrir des énoncés et des démonstrations “propres” et “rigoureux”, où ε pourrait être rendu aussi petit que l'on veut.

Or il n'en est rien. Le fait que la longueur des intervalles d'échantillonnage doive être sensiblement moins petite que $1/\sqrt{n}$ est une nécessité objective qu'on ne peut pas faire disparaître en introduisant plus de rigueur. Certes, on trouvera des ouvrages plus «mathématiques» que celui-ci sur le Calcul des probabilités, dans lesquels tout cela sera traité soigneusement en termes de limites quand n tend vers l'infini. Mais si on regarde les démonstrations de plus près, on s'apercevra que cette histoire d'échantillonnage y figure simplement sous une forme déguisée, et si on parvient à y reconnaître le paramètre qui joue le rôle de ε , on s'apercevra qu'il tend certes vers zéro, mais de telle sorte que $\varepsilon \times \sqrt{n}$ tende vers l'infini (ce qui est évidemment

La loi normale

équivalent à dire que ε doit être grand par rapport à $1/\sqrt{n}$. Le défaut de ce genre d'ouvrage est de noyer la propriété importante, qui en l'occurrence est précisément cette affaire d'ordre de grandeur de l'échantillonnage, dans les détails techniques d'une démonstration sophistiquée.

Afin de rendre les choses plus concrètes, le mieux est encore de voir deux exemples extrêmes.

Soit $f(x)$ une fonction continue de la variable réelle x sur un intervalle $[a, b]$, qui peut représenter une densité de probabilité (elle est donc positive et $\int f(x) dx = 1$). Prenons deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $[a, b]$, dont l'une, X , prend des valeurs équidistantes $x_j = j\varepsilon$ avec une probabilité variable p_j , et l'autre, Y , des valeurs non équidistantes y_j mais équiprobables (pour tout j on a $\mathcal{P}(Y = y_j) = p$). On suppose que pour X on a $p_j = f(x_j) = f(j\varepsilon)$ et que pour Y la distance entre deux valeurs consécutives est $y_{j+1} - y_j = p/f(y_j)$. On a représenté graphiquement les deux lois de X et de Y sur la figure 11, dans le cas où $f(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$.

Si on veut approcher la loi de probabilité de X par une densité continue, il suffira — comme on l'a fait à la section 1 pour la marche aléatoire — d'approcher la valeur des p_j . Mais si on veut approcher la loi de Y , il faudra tenir compte du fait que, les valeurs de Y étant plus nombreuses (plus denses) au voisinage de zéro, il y aura une plus forte probabilité pour Y de prendre une valeur proche de zéro, bien que chaque valeur discrète prise isolément soit équiprobable. L'opération d'échantillonnage évoquée ci-dessus consiste à regrouper les valeurs prises par les variables aléatoires dans des intervalles de longueur égale ε ; en choisissant ε égal au dixième de la largeur totale des graphiques de la figure 11, on obtient dix intervalles d'échantillonnage, et la probabilité pour que X ou Y prenne ses valeurs dans l'un de ces dix intervalles est représentée sur la figure 12. On voit que les deux graphiques sont déjà bien plus ressemblants.

Une autre manière, équivalente à l'échantillonnage, de passer d'une loi discrète à une densité continue est la *convolution*; cette opération consiste à moyenniser les lois de probabilité ou, comme on dit en traitement du signal, à appliquer un filtre passe-bas. Dans ce cas, le paramètre ε sera la *longueur de corrélation* de ce filtre passe-bas. Mathématiquement, la convolution est l'opération suivante: étant donnée une loi discrète $\{x_k (p_k)\}$ et une fonction $y = \rho(x)$ de la variable réelle x , on appelle *convolution* de la loi discrète par la fonction ρ la fonction:

$$g(x) = \sum_k p_k \rho(x - x_k)$$

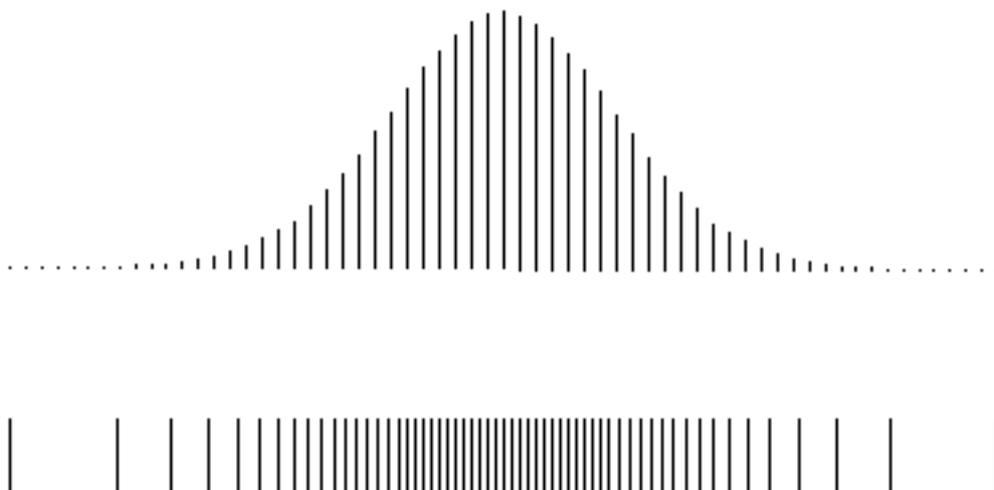


figure 11

On a représenté sur cette figure les graphiques de deux lois de probabilité: la première (graphique du haut) est la loi d'une variable aléatoire qui prend des valeurs équidistantes avec une probabilité variable (en e^{-x^2}); la seconde (graphique du bas) est la loi d'une variable aléatoire qui prend des valeurs équiprobables mais non équidistantes; toutefois dans la seconde loi les valeurs ont une densité plus grande au centre qu'au bord, et cette densité (mesurée en nombre de traits par mm.) est exactement proportionnelle à e^{-x^2}). De façon plus précise, on peut voir que les deux variables aléatoires prennent 59 valeurs chacune; la deuxième prend chaque valeur avec probabilité $1/59$; les deux graphiques sont à la même échelle, c'est-à-dire que la somme des longueurs (variables) des traits du graphique du haut est égale à la somme des longueurs (constantes) des traits du graphique du bas.

Ces deux lois sont représentées approximativement par la même densité continue e^{-x^2} .

La fonction ρ est le *filtre*; si par exemple

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2}\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \end{cases} \quad (\text{VII.2a})$$

alors la convolution est simplement la moyennisation sur des intervalles de largeur ε . On peut également prendre des filtres gaussiens d'écart-type ε ; dans ce cas on aura

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} \quad (\text{VII.2b})$$

La loi normale

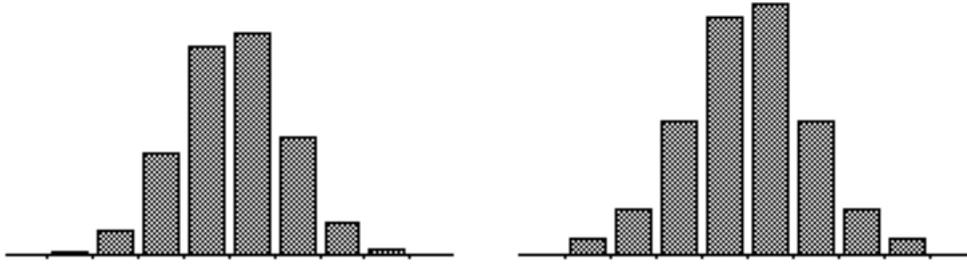


figure 12

On retrouve ici les deux graphiques de la figure 11, *après* échantillonnage (celui de gauche ci-dessus correspond à celui du haut dans la figure 11, et celui de droite à celui du bas).

Un autre filtre fréquemment considéré est le filtre

$$\rho(x) = \frac{\sin(\frac{1}{\varepsilon} \pi x)}{\pi x} \quad (VII.2c)$$

dont l'importance est due principalement au fait que sa transformée de Fourier est la fonction qui vaut 1 dans l'intervalle $[-\frac{1}{\varepsilon}, +\frac{1}{\varepsilon}]$ et zéro en dehors.

On peut voir le résultat de ces convolutions sur les figures 13 à 16.

On peut remarquer sur ces figures que le lissage de la loi de probabilité discrète par convolution donne bien une courbe approximativement gaussienne, mais seulement lorsque la longueur de corrélation ε du filtre se situe dans une certaine plage de valeurs. Si ε est trop petit, le *bruit discret* subsiste et la courbe lissée n'est pas proche de la gaussienne. Si ε est trop grand, la moyennisation ne porte pas seulement sur les hautes fréquences caractéristiques de la loi discrète, mais aussi sur l'écart-type de la loi elle-même, ce qui aboutit à trop étaler la loi.

Ainsi, lorsqu'on énonce une phrase telle que "la loi discrète X est approximativement gaussienne", il faut comprendre que pour un choix optimal du paramètre ε (celui-ci n'étant ni trop grand, ni trop petit), la loi X *filtrée* (qui, elle, est une densité continue) est proche de la densité continue gaussienne.

Lorsqu'on dit qu'une loi discrète X est approximativement gaussienne, son graphique (par exemple l'un des deux graphiques de la figure 11) est très différent du graphique de la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \mathbf{Var}(X)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \mathbf{Var}(X)}\right\}$$

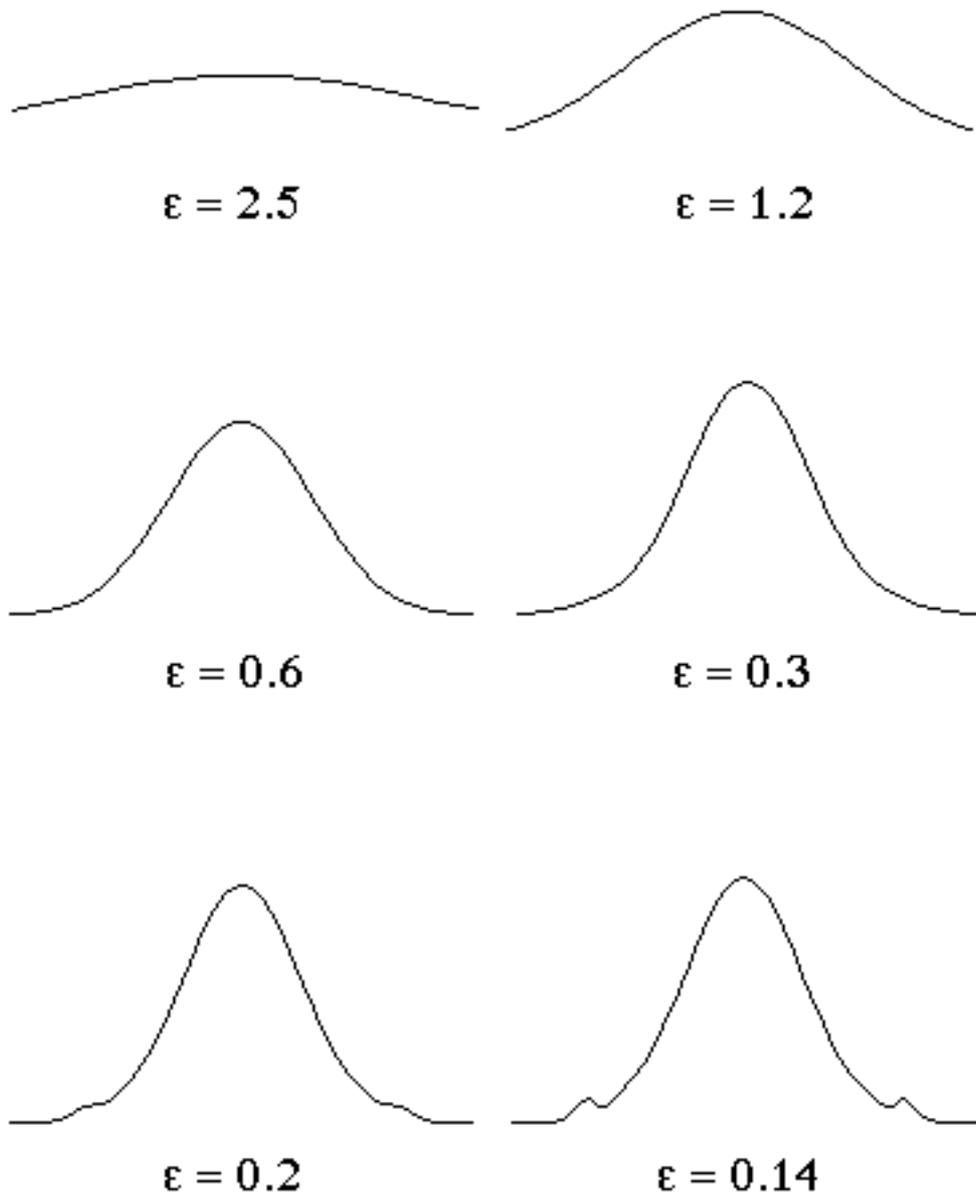


figure 13 (début)

La loi normale

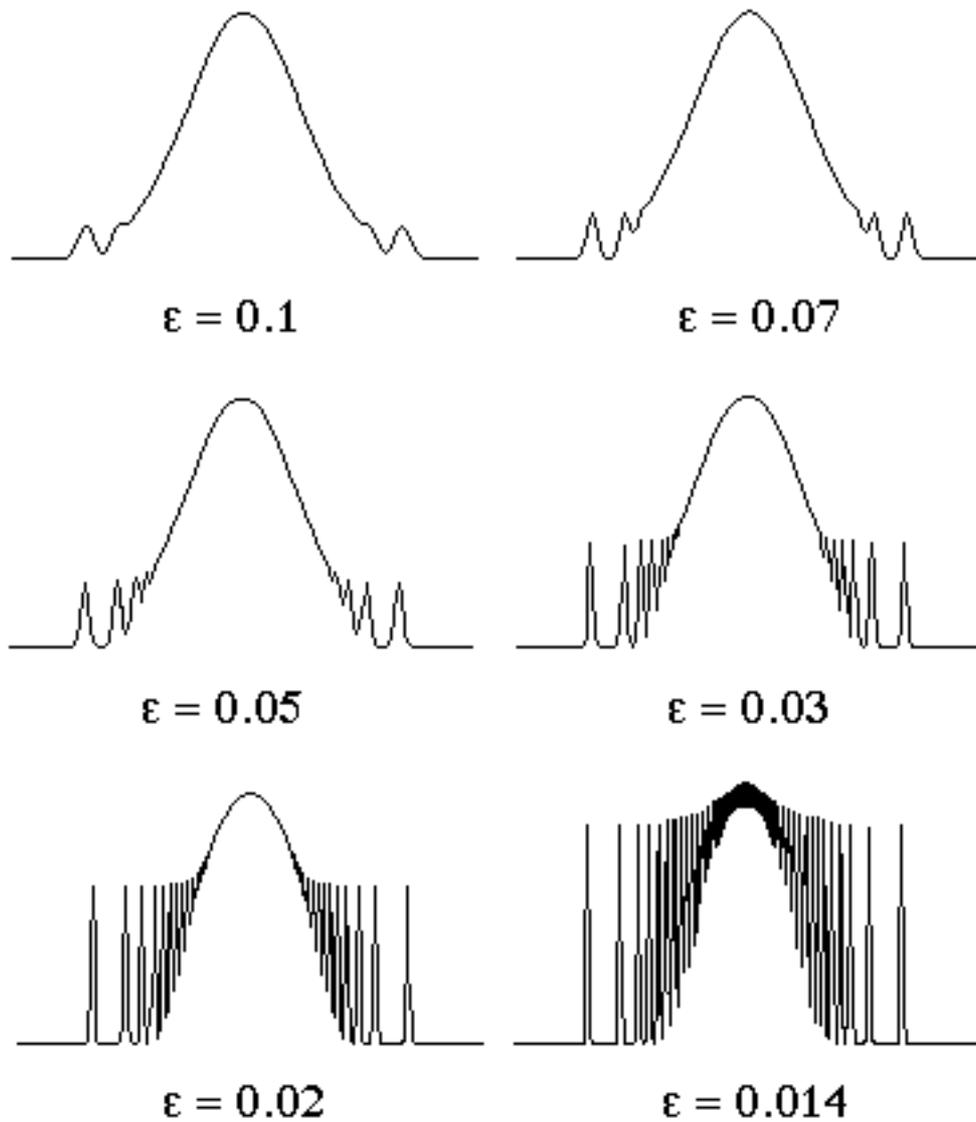


figure 13 (suite)

On peut voir sur ces huit graphiques le résultat de convolutions par un filtre gaussien d'écart-type ϵ variant de 1.2 à 0.014 sur la loi correspondant au graphique du bas dans figure 11. On constate que le filtrage donne une courbe ressemblant à la loi normale en e^{-x^2} lorsque ϵ est de l'ordre de 0.3 à 0.6. Pour ϵ plus petit, le "bruit" discret n'est pas éliminé, et pour ϵ plus grand, la courbe est trop aplatie (le filtrage élimine alors non seulement les fréquences du bruit discret, mais même celle de la courbe normale).

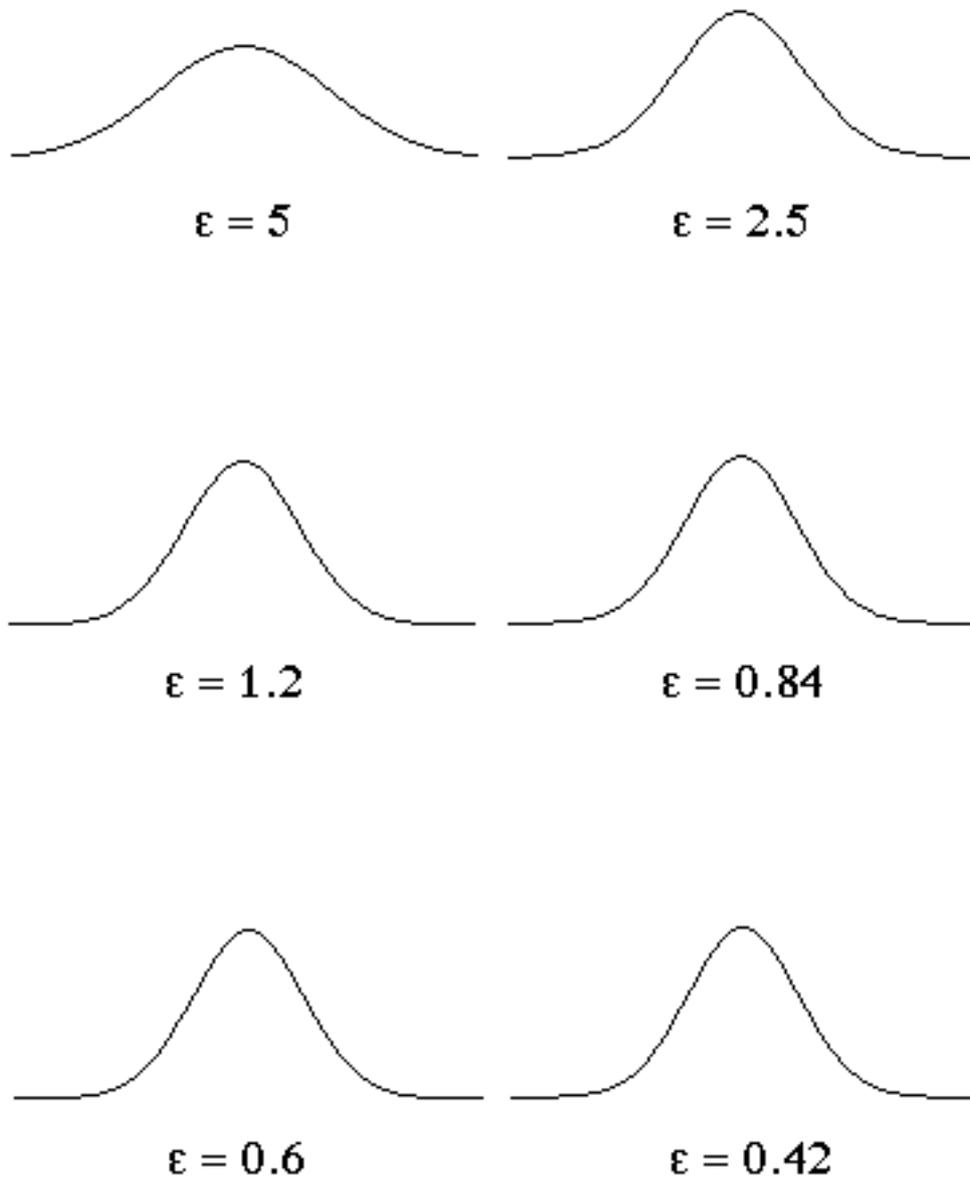


figure 14 (début)

La loi normale

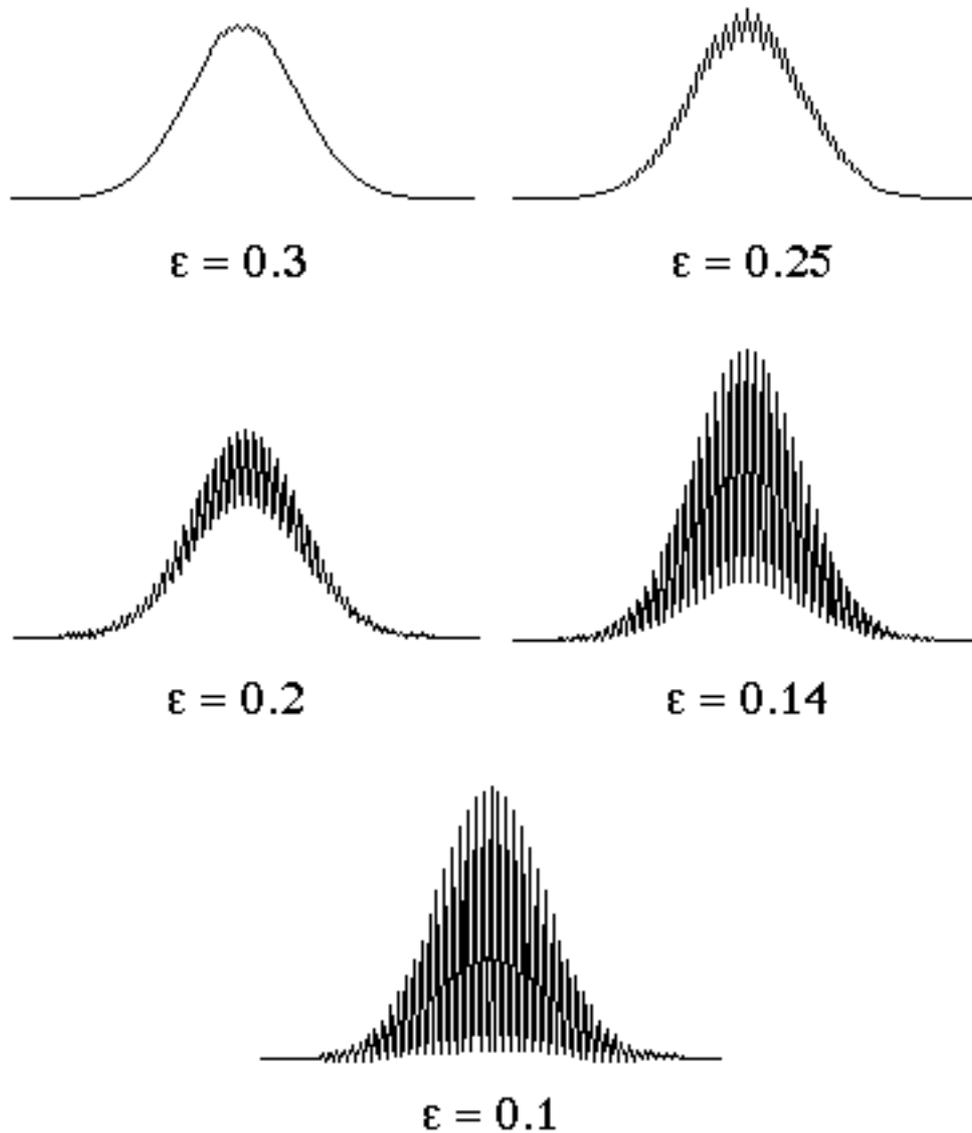


figure 14 (suite)

On a fait la même chose que dans la figure 13 mais pour l'autre loi de probabilité (graphique du haut dans la figure 11). On constate que là aussi, les valeurs de ϵ pour lesquelles le lissage transforme la loi discrète en loi gaussienne sont de l'ordre de 0.3 – 0.6.

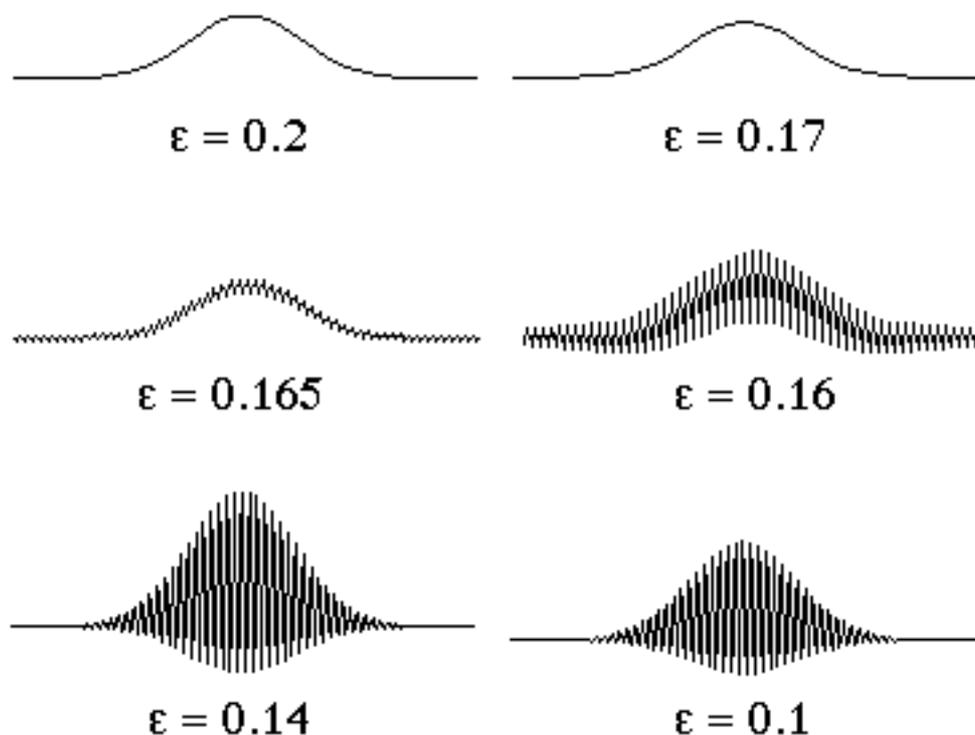


figure 15

Ici on a fait la même chose que dans la figure 14, mais à la place du filtre gaussien on a utilisé pour le lissage le filtre $\sin(\pi x/\varepsilon)/\pi x$; il s'agit donc de la loi de probabilité représentée par le graphique du *haut* dans la figure 11. On retrouve qualitativement les mêmes phénomènes que ceux observés avec le filtre gaussien. On remarquera toutefois que la disparition du bruit discret est beaucoup plus brusque qu'avec le filtre gaussien: elle se produit entre $\varepsilon = 0.16$, où le bruit discret est encore quasiment maximum, et $\varepsilon = 0.17$, où il a pratiquement disparu. On voit sur la deuxième partie de la figure 14 que dans le cas du filtre gaussien, cette disparition est plus progressive et s'étale de $\varepsilon = 0.1$ à $\varepsilon = 0.3$. Chaque filtre présente des caractéristiques particulières, mais tous ont en commun que la courbe lissée ne correspond à la loi gaussienne limite que lorsque ε est de l'ordre de 0.3 à 0.6 (ces chiffres précis n'étant bien sûr valables que pour le cas particulier de l'exemple).

La loi normale

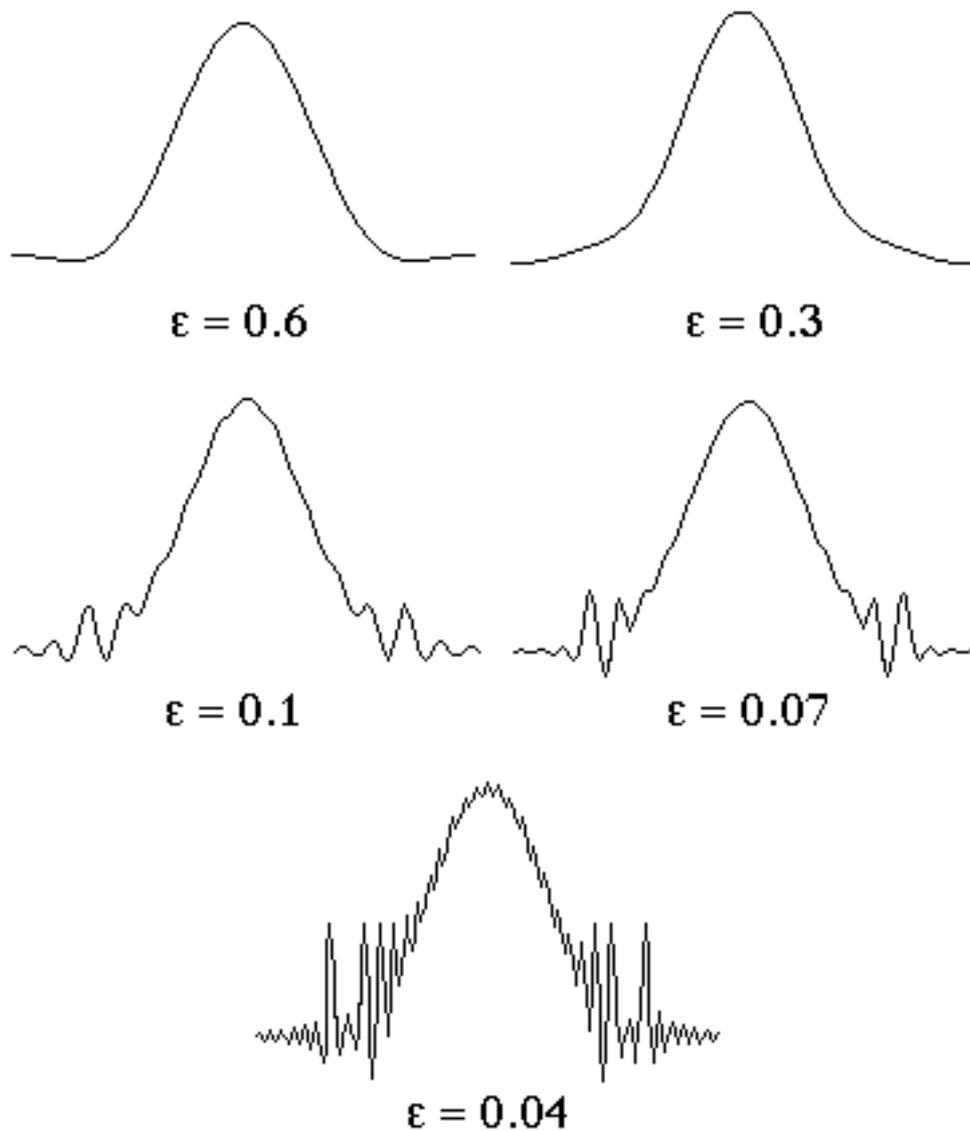


figure 16

Ici on a fait la même chose que dans la figure 13, en remplaçant le filtre gaussien par le filtre $\sin(1.66x/\epsilon)/x$; ou encore: la même chose que dans la figure 15, mais pour la loi de probabilité représentée par le graphique du *bas* dans la figure 11.

mais il lui devient ressemblant si on effectue un échantillonnage (comme le montre la figure 12) ou un filtrage par convolution (comme le montrent les figures 13 à 16).

Le théorème qui fait l'objet de ce chapitre affirme que la somme d'un grand nombre de variables aléatoires *indépendantes* a une loi approximativement gaussienne, dans le sens qui vient d'être précisé. En fait, la loi d'une telle somme peut être simple (par exemple si chacune des variables aléatoires a pour loi $\{-1 \ (\frac{1}{2}), +1 \ (\frac{1}{2})\}$: dans ce cas la loi de la somme correspond au graphique du haut dans la figure 11); mais ce peut être aussi une loi extrêmement compliquée et chaotique (si par exemple les variables aléatoires prennent des valeurs nombreuses et incommensurables entre elles, avec des probabilités respectives également chaotiques: voir la figure 17). Le théorème dit alors que même si la loi discrète *exacte* de la somme est extrêmement compliquée et chaotique, sa *densité*, qu'on peut révéler par échantillonnage, moyennisation, ou convolution, sera néanmoins proche d'une densité gaussienne; la partie compliquée de la loi se situe uniquement dans le bruit discret, et après élimination de ce bruit par échantillonnage ou filtrage, les probabilités se répartiront selon une loi gaussienne simple: il se produira pour la loi compliquée et chaotique la même chose que ce qui s'est produit dans les figures 13 et 16.

La démonstration du théorème fait apparaître le mécanisme de ce miracle. Si on effectue la somme de n variables aléatoires X stochastiquement indépendantes, toutes de même loi, alors la fonction caractéristique de leur somme $S = \sum X$ est le produit des fonctions caractéristiques, c'est-à-dire

$$\Phi_S(t) = \Phi_X(t)^n$$

Si on pose $Z = S/\sqrt{n}$, alors

$$\Phi_Z(t) = \Phi_S\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \Phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

En effet,

$$\Phi_Z(t) = \sum_k p_k \exp\left(i \frac{x_k}{\sqrt{n}} t\right) = \sum_k p_k \exp\left(i x_k \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \Phi_S\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

Il résulte de la section **VII.2.** que $\Phi_X(t)$, comme toute fonction caractéristique de variable aléatoire, possède *au voisinage de $t = 0$* le développement limité

$$1 - \mathbf{Var}(X) \frac{t^2}{2}$$

La loi normale

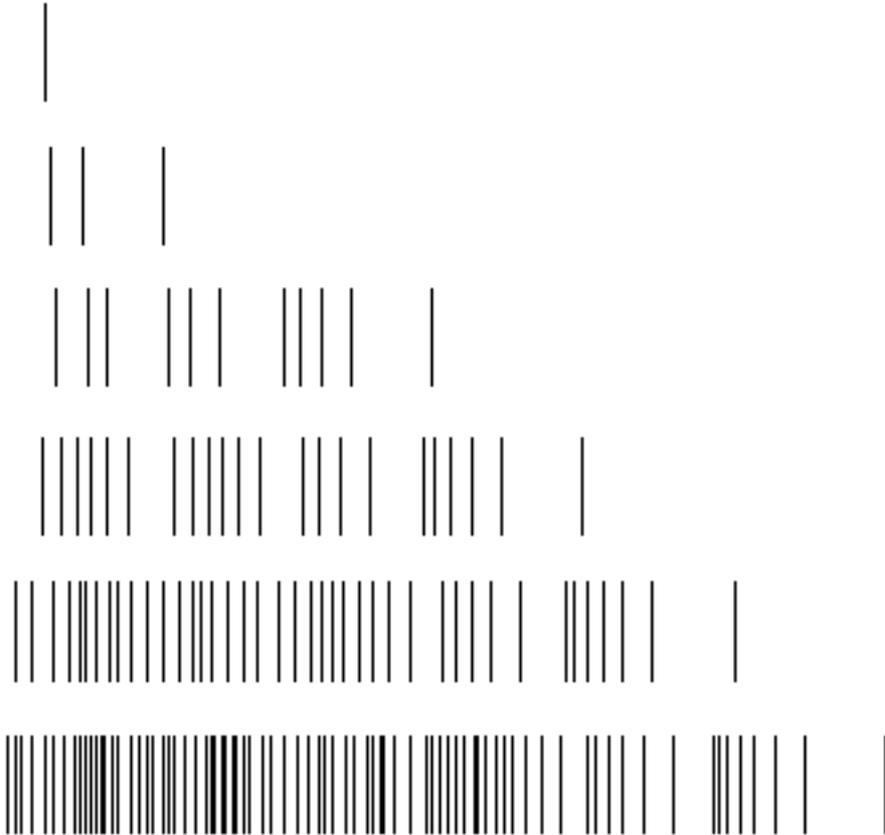


figure 17

Les six graphiques que voici représentent la loi de la somme d'un nombre de plus en plus grand de variables aléatoires. Afin d'économiser la place, on n'a reproduit que la moitié positive du graphique, la moitié négative étant symétrique; ainsi la valeur 0 est à l'extrême gauche du graphique. Les variables aléatoires sont, pour $j = 1$ à $j = 6$,

$$X_j = \begin{cases} \sqrt{j/3} + \sqrt{2-j/5} + \sqrt{j/7} & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ -\sqrt{j/3} - \sqrt{2-j/5} - \sqrt{j/7} & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ces valeurs bizarres ont été choisies parce qu'elles sont incommensurables, de sorte qu'on ne peut avoir deux fois la même somme avec des termes différents; ainsi toutes les valeurs prises par la somme sont équiprobables et on obtient donc une loi du type de celle du bas dans la figure 12.

Le premier graphique (tout en haut) est celui de la loi de X_1 . Le second celui de la loi de $X_1 + X_2$, puis $X_1 + X_2 + X_3$, puis $X_1 + X_2 + X_3 + X_4, \dots$

On devine que, au fur et à mesure que le nombre de termes augmente, la densité se rapproche d'une gaussienne; l'étalement augmente aussi, comme prévu (il est proportionnel à la racine carrée du nombre de termes).

et par conséquent

$$\Phi_Z(t) \simeq \left[1 - \mathbf{Var}(X) \frac{t^2}{2n}\right]^n$$

pourvu que t/\sqrt{n} soit petit. Or tout est là : Φ_Z est la transformée de Fourier de la loi discrète de Z ; cela signifie que le comportement de $\Phi_Z(t)$ pour les grandes valeurs de t est conditionné par la structure fine de la loi de Z ; en revanche, la loi moyennisée conditionne le comportement de $\Phi_Z(t)$ pour les petites valeurs de t . La structure fine de la loi de Z , qui est le bruit discret, peut être très variable et très compliquée selon les cas, et on ne peut rien dire de général sur le comportement de $\Phi_Z(t)$ pour les grandes valeurs de t ; celui-ci peut être arbitrairement compliqué. Par contre, *toutes* les fonctions caractéristiques Φ_X ont en commun le développement limité au voisinage de $t = 0$, ce qui permet d'affirmer, en ignorant tout de ce qui se passe pour les grandes valeurs de t , que pour t petit,

$$\Phi_Z(t) \simeq \left[1 - \mathbf{Var}(X) \frac{t^2}{2n}\right]^n \simeq e^{-\mathbf{Var}(X) \frac{t^2}{2}}$$

Le mécanisme de la formation d'une loi de densité gaussienne par simple accumulation de contributions stochastiquement indépendantes (comme on peut le voir sur la figure 17) se comprend donc qualitativement à partir de cette propriété des fonctions caractéristiques. Il reste à comprendre *quantitativement* le rapport entre la coïncidence des fonctions caractéristiques et celle des densités ; en particulier il va falloir préciser l'expression "t petit" : t doit être suffisamment petit pour que le développement limité ci-dessus soit valable, mais aussi pour que $(1 - \mathbf{Var}(X) t^2/2n)^n \simeq e^{-\mathbf{Var}(X) t^2/2}$. Pour cela il faut que $\mathbf{Var}(X) t^2/n$ soit petit, c'est-à-dire que t soit d'un ordre de grandeur petit devant $\sqrt{n/\mathbf{Var}(X)}$. Cela précise la longueur de corrélation du filtre : il doit éliminer les fréquences de l'ordre de $\sqrt{n/\mathbf{Var}(X)}$ ou plus. Pour cette étude quantitative, désignons par $\{z_k, (p_k)\}$ la loi discrète de la variable aléatoire Z . Sa fonction caractéristique est alors

$$\Phi_Z(t) = \sum_k p_k e^{-iz_k t}$$

Par ailleurs, la transformée de Fourier de la fonction densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathbf{Var}(X)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \mathbf{Var}(X)}\right\}$$

est

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixt} dx = \exp\left\{-\mathbf{Var}(X) \frac{t^2}{2}\right\}$$

La loi normale

On constate en comparant $\phi(t)$ avec le développement limité de $\Phi_Z(t)$ que les deux expressions sont semblables ; autrement dit, pour t petit, $\Phi_Z(t) \simeq \phi(t)$.

Nous allons voir que le paramètre ε , la longueur de corrélation de l'échantillonnage qui est nécessaire pour approcher la loi de Z par une densité continue, est déterminé par la largeur de l'intervalle dans lequel $\Phi_Z(t)$ reste proche de $\phi(t)$. Cette largeur dépend de n , mais aussi de la loi de X . Nous nous proposons maintenant de trouver la valeur optimale de ε en fonction de n et de la loi de X .

Revenons au développement limité (VII.1.) Afin de bien contrôler le domaine de valeurs de t dans lequel les approximations sont valables, une bonne méthode consiste à pousser les développements limités à un ordre plus grand que ce qui sera finalement retenu, ce qui permet d'avoir une expression explicite de l'erreur. Dans le cas qui nous intéresse, c'est le développement à l'ordre 2 qui sera finalement retenu, donc nous effectuerons tous les calculs en incluant l'ordre 3. On a alors

$$\Phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \simeq 1 - \frac{t^2}{2n} M_2 - i \frac{t^3}{6n\sqrt{n}} M_3$$

On obtient $\Phi_Z(t)$ en élevant cela à la puissance n . Pour avoir un développement limité, prenons les logarithmes. Ici $\Phi_X(t/\sqrt{n}) = 1 - z$ avec

$$z \simeq \frac{t^2}{2n} M_2 + i \frac{t^3}{6n\sqrt{n}}$$

et $\ln(1 - z) \simeq -z - \frac{1}{2}z^2$. La variable z est complexe, mais comme nous avons affaire à des développements en puissances entières de z , cela ne pose aucun problème tant que $|z| < 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \ln\left\{\Phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\} &\simeq -z - \frac{1}{2}z^2 \\ &\simeq -\frac{t^2}{2n} M_2 - i \frac{t^3}{6n\sqrt{n}} M_3 - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2n} M_2 + i \frac{t^3}{6n\sqrt{n}} M_3\right]^2 \end{aligned}$$

On voit que les termes correspondant à z^2 sont d'ordre supérieur à $t^3/n\sqrt{n}$; on va donc les négliger. En multipliant par n cela devient

$$\ln\left\{\Phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\right\} \simeq -\frac{t^2}{2} M_2 - i \frac{t^3}{6\sqrt{n}} M_3$$

et en revenant aux exponentielles

$$\Phi_Z(t) = \Phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \simeq e^{-\frac{t^2}{2} M_2} \cdot e^{-i \frac{t^3}{6\sqrt{n}} M_3}$$

On voit alors que la condition pour que $\Phi_Z(t) \simeq \exp(-(t^2/2)M_2)$ est que $(t^3/6\sqrt{n})M_3$ soit petit, c'est-à-dire que

$$t \ll \sqrt[3]{\frac{6}{|M_3|}} n^{1/6} \tag{VII.3.}$$

Par conséquent l'intervalle de valeurs de t pour lesquelles $\Phi_Z(t) \simeq e^{-\frac{t^2}{2}M_2}$ est d'autant plus large que M_3 est plus petit et n plus grand; mais sa largeur croît très lentement avec n . A partir de maintenant on appellera η cette largeur; elle est caractérisée par l'amplitude qu'on tolère pour la différence entre $\Phi_Z(t)$ et $\phi(t)$. Si on se fixe une différence relative maximum autorisée de 1%, cela signifie que le facteur $\exp(-i(t^3/6\sqrt{n})M_3)$ doit être compris entre 0.99 et 1.01, ce qui correspond à peu près à la condition $|(t^3/6\sqrt{n})M_3| \leq 0.01$, d'où $\eta = \sqrt[3]{0.06/|M_3|} n^{1/6}$. Si la marge d'erreur tolérée avait été 1/10 000, on aurait eu $\eta = \sqrt[3]{0.0006/|M_3|} n^{1/6}$. Plus généralement, pour une marge d'erreur donnée α , on aura

$$\eta(\alpha) = \sqrt[3]{6\alpha / |M_3|} n^{1/6} \tag{VII.4.}$$

Remarque : Cette estimation de l'erreur a été obtenue en retenant le terme d'ordre 3 et en négligeant les suivants, ce qui est légitime si les suivants sont plus petits que lui; mais si M_3 était beaucoup plus petit que M_4 ou même nul, ce ne serait plus le cas et il faudrait tenir compte du terme d'ordre 4. Le calcul aurait alors donné :

$$t \ll \sqrt[4]{\frac{24}{|M_4 - 3M_2^2|}} n^{1/4} \tag{VII.3a.}$$

et par conséquent

$$\eta(\alpha) = \sqrt[4]{24\alpha / |M_4 - 3M_2^2|} n^{1/4} \tag{VII.4a.}$$

Bien entendu, si en plus de $M_3 \simeq 0$ on a aussi $M_4 \simeq 3M_2$, il faudra pousser les développements limités jusqu'à l'ordre t^5 , et ainsi de suite.

Pour filtrer les lois discrètes et faire apparaître leurs densités, nous avons vu qu'on pouvait procéder par échantillonnage ou par convolution. Nous opérons ici pour la convolution, car les rapports de cette opération avec la transformation de Fourier sont plus commodes. Soit donc $\rho(x)$ un filtre de convolution, par exemple une des fonctions (VII.3 a, b, c). La convolution de la loi de Z par le filtre ρ est alors la fonction $g(x) = \sum_k p_k \rho(x - x_k)$. La transformée de Fourier de cette fonction est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{itx} dx = \sum_k p_k \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x - x_k) e^{itx} dx$$

La loi normale

Avec le changement de variable $y = x - x_k$ cela devient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{itx} dx &= \sum_k p_k e^{itx_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y) e^{ity} dy \\ &= \sum_k p_k e^{itx_k} \hat{\rho}(t) \\ &= \Phi_Z(t) \hat{\rho}(t) \end{aligned}$$

où $\hat{\rho}(t)$ est la transformée de Fourier de $\rho(x)$. Ainsi, la convolution g de la loi de Z avec le filtre ρ a pour transformée de Fourier le produit de Φ_Z par $\hat{\rho}$. Or, si ρ est une fonction du type (VII.2c) avec $\varepsilon = 1/\eta$, c'est-à-dire si

$$\rho(x) = \frac{\sin(\eta\pi x)}{\pi x}$$

alors $\hat{\rho}(t)$ est la fonction égale à 0 pour $|t| \geq \eta$ et égale à 1 pour $|t| < \eta$. En convoluant la loi de Z par ρ , on multiplie donc $\Phi_Z(t)$ par 0 lorsque $|t| \geq \eta$ et par 1 lorsque $|t| < \eta$, ce qui revient à tronquer Φ_Z de tout ce qui est en dehors de l'intervalle $[-\eta, +\eta]$. Cela consiste donc bien à appliquer un filtre passe-bas.

La fonction caractéristique $\Phi_Z(t)$ n'était proche de $\phi(t)$ que pour les petites valeurs de t ; précisément les valeurs comprises entre $-\eta$ et $+\eta$. En dehors de cet intervalle, $\Phi_Z(t)$ pouvait différer énormément de $\phi(t)$. Mais la fonction tronquée, elle, est *partout* proche de $\phi(t)$, car en dehors de l'intervalle $[-\eta, +\eta]$ la fonction tronquée est nulle, et la fonction $\phi(t)$ est inférieure à $\exp(-(\eta^2/2)\mathbf{Var}(X))$, donc pratiquement nulle si η est assez grand.

Il est facile de comparer les fonctions $f(x)$ et $g(x)$; en effet, on peut inverser l'intégrale de Fourier, de sorte que

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi(t) - \Phi_Z(t) \hat{\rho}(t)] e^{-itx} dt$$

On en déduit en prenant les modules

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t) - \Phi_Z(t) \hat{\rho}(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |1 - e^{-i\frac{t^3}{6\sqrt{n}}M_3}| \phi(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{+\infty} \phi(t) dt \end{aligned}$$

Le second terme est d'autant plus petit que η est plus grand. Quant au premier, on remarque qu'il est égal au seuil d'erreur α (cf. VII.4.) qu'on s'est fixé, multiplié par $\frac{1}{2\pi} \int \phi(t) dt$, ce qui vaut $\alpha/\sqrt{2\pi M_2}$

Bien entendu l'erreur *ne peut pas* être rendue arbitrairement petite pour une valeur fixée de n : on voit que si on prend α trop petit, η sera trop petit également de sorte que le second terme ci-dessus ne sera pas petit. Le meilleur choix (pour une valeur fixée de n) est donc celui qui rend minimum l'expression

$$u(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi M_2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{M_2}} \gamma(\eta(\alpha)\sqrt{M_2})$$

avec

$$\gamma(r) = \int_r^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

et η étant fonction de α selon (VII.4.) En effet, l'expression $u(\alpha)$ est la somme de deux termes: le premier croît avec α et le second décroît avec α , de sorte qu'il doit y avoir une valeur optimale de α pour laquelle elle sera minimum.

Mais par ailleurs, bien que α soit petit par nature, η doit être grand (le développement limité de $\Phi_Z(t)$ doit être correct sur un intervalle assez large, ou, si on préfère, le bruit discret qu'on élimine ne doit comporter réellement que des hautes fréquences, sinon l'idée même d'une approximation de la loi discrète par une densité continue perd son sens). De sorte que le second terme $\frac{1}{\pi\sqrt{M_2}} \gamma(\eta\sqrt{M_2})$ peut tout simplement être négligé (dès que $\eta\sqrt{M_2}$ est supérieur à 5 unités⁽²⁾ ce terme n'est déjà plus que de l'ordre de 10^{-6}). Donc pour que l'erreur α soit petite tout en respectant la condition $\eta \geq 5/\sqrt{M_2}$, il faut avoir

$$1 \gg \alpha = \frac{|M_3|}{6\sqrt{n}} \eta^3 \geq \frac{125|M_3|}{6M_2\sqrt{M_2}\sqrt{n}} \geq \frac{20|M_3|}{M_2\sqrt{M_2}\sqrt{n}}$$

ce qui veut dire que

$$n \geq 400 |M_3|^2 / M_2^3 \alpha^2 \quad (VII.5.)$$

Cette inégalité exprime le seuil à partir duquel n peut être considéré comme assez grand pour que *après filtrage* la loi de $Z = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / \sqrt{n}$ ne diffère de la densité $f(x)$ que de α au plus. On voit que ce seuil est inversement proportionnel à α^2 , ce qui signifie que pour diminuer l'erreur α d'un facteur deux, il faut prendre n quatre fois plus grand. Ce seuil est aussi proportionnel à $|M_3|^2$, mais n'oublions pas que le calcul précédent

⁽²⁾ Ce facteur 5 est évidemment assez arbitraire: il garantit que le terme γ sera négligeable si on tient 10^{-6} pour négligeable; si on est plus exigeant on pourra prendre 10 au lieu de 5.

La loi normale

n'est valable que si $|M_3|$ est assez grand; sinon il faut utiliser l'estimation issue de (VII.4a.) qui donne

$$n \geq 25 |M_4 - 3 M_2^2| / M_2^2 \alpha \quad (\text{VII.5a.})$$

dans ce cas le seuil est inversement proportionnel à α et non plus à α^2 .

Si n est supérieur à ce seuil, alors la longueur de corrélation ε du filtrage est, comme nous l'avons vu, égale à $1/\eta$, donc inférieure à $\sqrt{M_2}/5$. La signification du paramètre ε est que le filtre donne un bon lissage si la distance entre les valeurs discrètes est inférieure à ε ; donc la signification du seuil concerne aussi la distance entre les valeurs discrètes de Z . Lorsqu'on fait la somme des variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, on ne réduit pas la distance entre les valeurs, mais on les étale de plus en plus; or Z est égal à cette somme, *divisée par* \sqrt{n} ; de sorte que les valeurs de Z sont de plus en plus serrées au fur et à mesure que n augmente: en fait, la distance entre les valeurs discrètes de Z diminue en $1/\sqrt{n}$. Il y a donc pour n un seuil à partir duquel les distances entre deux valeurs discrètes consécutives de Z deviendront inférieures à ε . Comme on peut le voir sur les figures 13 à 16, lorsque ε est trop petit le bruit discret n'est pas filtré: c'est ce qui se produit sur ces figures lorsque ε est plus petit que la distance entre les valeurs discrètes de la variable aléatoire. Lorsqu'on considère la somme de n variables aléatoires X_j stochastiquement indépendantes, ce seuil au delà duquel le filtrage devient correct est donné par les inégalités (VII.5.) ou (VII.5a.)

Je propose l'exercice très instructif que voici: calculer la relation correspondant à (VII.5a.) dans le cas où la loi des variables X_j est celle du jeu de pile ou face (section 1); c'est un cas où $M_3 = 0$. La fonction caractéristique $\Phi_X(t)$ est alors $\cos(t)$ et par conséquent $\Phi_Z(t) = [\cos(t/\sqrt{n})]^n$. [On doit trouver $n \geq 25/\alpha$, le facteur 25 étant bien sûr grossièrement approximatif, comme le dit la note page 173.]

On peut donc énoncer les choses ainsi: si on moyennise la loi discrète de Z sur des longueurs de corrélation d'ordre légèrement supérieur à $\sqrt{\text{Var}(X)}/n$, on obtient une distribution approximativement gaussienne. La densité de cette distribution continue est alors proche de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}(X)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2 \text{Var}(X)}\right\}$$

Cela revient à dire que si ε est la bonne longueur de corrélation, déterminée

par (VII.4.) ou (VII.4a.), alors à α près on a

$$\mathcal{P}\left\{a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{Z}{\sqrt{n}} < a + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \simeq \int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathbf{Var}(X)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\mathbf{Var}(X)}\right\} dz$$

ou plus généralement, pour tous a, b tels que $b - a \geq \varepsilon$:

$$\mathcal{P}\left\{a < \frac{Z}{\sqrt{n}} < b\right\} \simeq \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathbf{Var}(X)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\mathbf{Var}(X)}\right\} dz \quad (\text{VII.6.})$$

Pour conclure ce chapitre on peut encore faire la remarque suivante: formellement, nous avons établi la propriété que la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes *et de même loi* était approximativement gaussienne. En fait, il n'est pas nécessaire qu'elles aient la même loi (par exemple ce n'est pas le cas dans la figure 17). En effet, si les X_j ont la même loi, leur fonction caractéristique commune est $\Phi_X(t)$ et par conséquent celle de Z sera $\Phi_X(t/\sqrt{n})^n$. Si les X_j ont des lois différentes, leurs fonctions caractéristiques seront différentes, mais pour t petit (là où le développement limité est valable), elles ne diffèrent que par la valeur de $\mathbf{Var}(X_j)$. Si les X_j sont indépendantes (car cette hypothèse là reste essentielle), la fonction caractéristique de Z sera le produit

$$\prod_{j=1}^{j=n} \Phi_{X_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

avec des facteurs non égaux, mais pour t petit on aura toujours

$$\prod_{j=1}^{j=n} \left(1 - \mathbf{Var}(X_j) \frac{t^2}{2n}\right) \simeq \exp\left\{-A \frac{t^2}{2}\right\}$$

avec $A = \frac{1}{n} \sum \mathbf{Var}(X_j)$ (moyenne des variances).

Pour le prouver on prendra comme toujours le logarithme du produit $\prod \Phi_{X_j}$, puis les développements limités des logarithmes. Il faudra cependant que soient satisfaites les conditions pour que l'approximation soit valable: par exemple si $\mathbf{Var}(X_j)$ augmente proportionnellement à j , cela ne marche plus; on supposera donc que les variances des X_j restent bornées pendant que n tend vers l'infini.

La conclusion générale à tirer de ce chapitre est la suivante: lorsqu'un phénomène quelconque subit des fluctuations dues à un grand nombre de perturbations aléatoires, pourvu que ces perturbations agissent indépendamment les unes des autres, les fluctuations suivront une loi approximativement gaussienne. Le fait que, comme nous venons de le voir, le

La loi normale

caractère gaussien des fluctuations est universel, permet de postuler a priori que des phénomènes produits par des causes dont on ignore tout, telles que les erreurs de mesure, l'agitation thermique, l'effet d'un médicament, les notes obtenues aux examens, etc. présentent autour de leur position moyenne des fluctuations gaussiennes; pour pouvoir affirmer cela avec certitude il n'est pas nécessaire de savoir quoi que ce soit sur les causes de ces fluctuations, excepté qu'elles sont nombreuses, qu'elles s'ajoutent les unes aux autres, et qu'elles sont stochastiquement indépendantes les unes des autres (voir cependant une discussion plus approfondie sur l'universalité de la loi gaussienne à la section **2** du chapitre **IX**).

C'est pourquoi en statistique on fait presque toujours l'hypothèse que les fluctuations autour de la moyenne obéissent à cette loi gaussienne. Les tests statistiques que nous étudierons au chapitre **XI** partent de cette hypothèse. En effet, en statistique on traite des données brutes, et on ignore généralement tout de l'enchevêtrement des causes. Mais on peut malgré tout avoir la certitude que des paramètres sont intervenus indépendamment les uns des autres: par exemple, si des tireurs à l'arc visent le centre d'une cible, la trajectoire de la flèche est perturbée par le tremblement de leurs muscles, et par la résistance de l'air sur la flèche, qui à grande vitesse accentue fortement les imperceptibles dissymétries de l'empennage ou de la pointe. S'il est absolument impossible, non seulement de calculer ces fluctuations de façon déterministe, mais même de connaître les lois de probabilités des innombrables paramètres qui interviennent, il est cependant déraisonnable de penser que les valeurs aléatoires prises par ces paramètres au cours d'un tir particulier soient influencées par ce qui s'est produit au tir précédent. Sans qu'on puisse rien calculer, de simples principes généraux de causalité peuvent ainsi garantir l'indépendance stochastique des différentes causes de perturbation. En outre, même lorsque rien ne garantit l'indépendance (par exemple si on relève les fluctuations du taux de cholestérol sanguin on a affaire à un organisme vivant dans lequel tout est lié) l'expérience montre presque toujours, si on trace les histogrammes des fluctuations en fonction des écarts par rapport à la moyenne, qu'on obtient au moins qualitativement une répartition gaussienne. A tel point que lorsqu'on obtient une répartition nettement différente, on s'interroge sur les raisons d'une telle anomalie.

Si l'ampleur des fluctuations est *en-deça* de la précision avec laquelle le phénomène est perçu ou mesuré, alors le phénomène apparaît comme déterministe. C'est la raison pour laquelle le monde macroscopique est dominé par le déterminisme, alors que le monde des atomes et des particules est dominé par le hasard.

VIII. LES PROCESSUS EN CASCADE. (Une application des fonctions génératrices.)

Ce chapitre est plus technique que les autres et convient plutôt aux mathématiciens (et à condition qu'ils ne soient pas trop pressés). On pourra le considérer comme une suite de problèmes corrigés. C'est en quelque sorte un chapitre de travaux dirigés. Une lecture purement passive est déconseillée : le lecteur n'entendra vraiment profit que s'il se munit d'un crayon et d'un papier, et effectue lui-même les calculs présentés ici.

Ce chapitre peut être omis en première lecture, mais on conseille cependant les problèmes 1 et 2 du début, qui sont élémentaires, et beaucoup plus faciles que ce qui suit.

Problème 1. Deux joueurs \mathcal{A} et \mathcal{B} jouent au jeu de *pile ou face* de la manière suivante : \mathcal{A} donne 1 euro à \mathcal{B} chaque fois que *face* sort et \mathcal{B} donne 1 euro à \mathcal{A} chaque fois que *pile* sort. La pièce est lancée n fois de suite. Trouver la loi de probabilité du gain de \mathcal{A} .

Ce problème a déjà été traité sous forme déguisée au chapitre III (marches aléatoires), début du §2. Le gain peut prendre les valeurs $-n$, $-n+2$, $-n+4$, $-n+6$, \dots , $n-2$, n , et les probabilités correspondantes sont

$$\mathcal{P}(\text{gain} = -n + 2k) = 2^{-n} \binom{n}{k} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{(2k-n)^2}{2n}}$$

Nous allons le retrouver en utilisant les fonctions génératrices.

L'idée est simple : nous avons vu que la fonction génératrice de la somme de plusieurs variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions génératrices. Nous allons donc décomposer le gain en une somme de variables aléatoires indépendantes.

Il est évident par définition même que le gain global sur les n lancers est la somme algébrique des gains obtenus pour chacun des n lancers. Or pour chaque lancer ce gain est égal (en euros) à $+1$ ou -1 , selon que *face* ou *pile* est sorti. Le gain au j^{e} lancer est donc une variable aléatoire X_j dont la loi est

$$X_j = \begin{cases} +1 & (\frac{1}{2}) \\ -1 & (\frac{1}{2}) \end{cases}$$

Processus en cascade

Le gain global est alors la somme $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. L'indépendance stochastique des variables aléatoires X_j est le reflet de l'indépendance causale entre les lancers: dire que X_j est indépendante de X_k signifie que les probabilités de gagner ou perdre 1 euro au k^{e} lancer ne dépendent pas du résultat obtenu au j^{e} lancer.

Remarque. L'indépendance stochastique entre les X_j est déduite directement des circonstances physiques du problème; mais bien entendu, ces circonstances se reflètent aussi dans la structure de l'espace des épreuves Ω , qui, comme cela a été expliqué au chapitre **IV**, doit être un produit. Ω est ici l'ensemble des mots de n lettres qu'on peut écrire avec l'alphabet $\{P, F\}$, et s'identifie au produit cartésien $\{P, F\} \times \{P, F\} \times \dots \times \{P, F\}$ (n fois). En tant qu'*application* de Ω dans \mathbb{R} (ce qui est, rappelons-le, la définition mathématique d'une variable aléatoire), X_j est l'application qui, à une épreuve ω qui est un mot de n lettres, fait correspondre $+1$ si la j^{e} lettre de ω est F , et -1 si la j^{e} lettre de ω est P . Lorsque l'espace Ω est considéré comme le produit cartésien de n fois $\{P, F\}$, X_j ne dépend donc que de la j^{e} coordonnée, ce qui est exactement l'expression mathématique de l'indépendance stochastique.

La fonction génératrice commune des X_j est donc

$$G_X(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

et puisque les X_j sont indépendantes, leur somme S a pour fonction génératrice

$$G_S(z) = \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} z^{n-2k}$$

On constate dans le développement en puissances de z que les exposants sont $n - 2k$, qui sont les valeurs prises par S ; quant aux coefficients correspondants, ils coïncident bien avec le résultat déjà connu.

Nous voyons ici sur un exemple très simple comment fonctionne la *méthode des fonctions génératrices*: on commence par calculer la fonction génératrice, qui est un polynôme ou à la limite une fonction analytique de la variable complexe z . Puis un développement en puissances de z met en évidence les exposants de z qui sont les valeurs de la variable, ainsi que les coefficients qui sont les probabilités correspondantes.

Problème 2. Les deux joueurs \mathcal{A} et \mathcal{B} jouent maintenant au jeu de *pile ou face* d'une manière différente: comme d'habitude \mathcal{A} donne 1 euro à \mathcal{B} chaque fois que *face* sort et \mathcal{B} donne 1 euro à \mathcal{A} chaque fois que *pile* sort; mais au lieu de s'arrêter après un nombre n de lancers convenu à l'avance, les joueurs lancent en outre un dé en même temps que leur pièce, et décident d'arrêter le jeu dès que le dé donne six.

Trouver la loi de probabilité du gain.

Lorsque nous avons résolu le problème précédent (loi de probabilité du gain pour un nombre fixé n de lancers), nous devions trouver la loi de probabilité d'une somme $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ de variables aléatoires indépendantes. Cette fois nous avons encore affaire à une somme de variables aléatoires indépendantes, mais le nombre de termes de la somme est lui-même aléatoire.

On peut donc reformuler le problème sous la forme abstraite que voici : soient $X_1, X_2, X_3 \dots$ des variables aléatoires indépendantes, *toutes de même loi*, et Y une variable aléatoire prenant les valeurs $1, 2, 3 \dots$, et *indépendante* des $X_1, X_2, X_3 \dots$. Trouver la loi de la variable

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_Y$$

Solution. D'après la formule des probabilités conditionnelles (IV.4.) on peut décomposer $\mathcal{P}(S = k)$ ainsi :

$$\mathcal{P}(S = k) = \sum_n \mathcal{P}(S = k \mid Y = n) \mathcal{P}(Y = n) \quad (\text{VIII.1.})$$

Or l'événement $A = \{X_1 + X_2 + \dots + X_Y = k \text{ et } Y = n\}$ est égal à l'événement $\{X_1 + X_2 + \dots + X_n = k \text{ et } Y = n\}$. En effet toute épreuve ω appartenant à A est une épreuve pour laquelle $Y(\omega) = n$, donc $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_{Y(\omega)}(\omega) = S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$. Ces deux événements étant égaux, leurs probabilités sont égales. En outre, Y étant stochastiquement indépendante des X_j , on peut dire aussi que

$$\mathcal{P}(X_1 + \dots + X_n = k \text{ et } Y = n) = \mathcal{P}(X_1 + \dots + X_n = k) \times \mathcal{P}(Y = n)$$

Mais **on ne peut pas** dire que

$$\mathcal{P}(X_1 + \dots + X_Y = k \text{ et } Y = n) = \mathcal{P}(X_1 + \dots + X_Y = k) \times \mathcal{P}(Y = n)$$

car dans le premier cas les variables aléatoires $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et Y sont indépendantes, tandis que dans le second, les variables aléatoires $X_1 + X_2 + \dots + X_Y$ et Y ne sont pas indépendantes.

Remarque. Pour bien comprendre cela, il faut se représenter (comme toujours en cas d'indépendance stochastique; voir §V.3.) l'espace Ω comme un tableau ou une matrice formé de lignes et de colonnes, de sorte que $X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$ ne dépend que de la ligne où se trouve ω et $Y(\omega)$ que de la colonne où se trouve ω . Les événements $B = \{X_1 + X_2 + \dots + X_n = k\}$ et $C = \{Y = n\}$ sont respectivement des ensembles de lignes complètes et des ensembles de colonnes complètes; leur intersection est donc un rectangle (une sous-matrice) du tableau, et le cardinal de ce rectangle est bien le produit du nombre

Processus en cascade

de lignes par le nombre de colonnes. Mais l'événement $E = \{X_1 + X_2 + \dots + X_Y = k\}$ n'est pas une sous-matrice car $\{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_{Y(\omega)}(\omega) = k\}$ dépend à la fois de la ligne et de la colonne où se trouve l'élément ω , de sorte que l'événement E n'est pas formé de lignes complètes; son intersection avec C n'est donc pas l'intersection d'un ensemble de lignes complètes avec un ensemble de colonnes complètes, mais est pourtant un rectangle, car les morceaux de lignes qui manquent sont tous à l'extérieur de l'ensemble C .

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S = k \mid Y = n) &= \frac{\mathcal{P}(S = k \text{ et } Y = n)}{\mathcal{P}(Y = n)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k \text{ et } Y = n)}{\mathcal{P}(Y = n)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) \times \mathcal{P}(Y = n)}{\mathcal{P}(Y = n)} \\ &= \mathcal{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.})$$

Ainsi la probabilité conditionnelle $\mathcal{P}(S = k \mid Y = n)$ est égale à la probabilité $\mathcal{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k)$. En combinant (VIII.1) et (VIII.2), il vient

$$\mathcal{P}(S = k) = \sum_n \mathcal{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) \times \mathcal{P}(Y = n) \quad (\text{VIII.3.})$$

Appelons comme dans le problème précédent $G_X(z)$ la fonction génératrice commune des X_j et $G_Y(z)$ celle de Y . Par définition :

$$G_S(z) = \sum_k \mathcal{P}(S = k) z^k$$

En remplaçant $\mathcal{P}(S = k)$ par l'expression (VIII.3) :

$$G_S(z) = \sum_k \sum_n \mathcal{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) \times \mathcal{P}(Y = n) z^k$$

Puis en inversant l'ordre de sommation entre k et n :

$$G_S(z) = \sum_n \left[\sum_k \mathcal{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) z^k \right] \times \mathcal{P}(Y = n)$$

Mais l'expression entre crochets n'est autre que $G_X(z)^n$, de sorte que finalement

$$G_S(z) = \sum_n [G_X(z)]^n \mathcal{P}(Y = n) = G_Y(G_X(z))$$

ou encore

$$G_S = G_Y \circ G_X \quad (\text{VIII.4.})$$

Pour appliquer cette relation à notre problème, il nous faut encore connaître la fonction G_Y , c'est-à-dire la loi de Y ; mais c'est immédiat, puisqu'il s'agit d'un simple lancer de dé: l'événement $\{Y = n\}$ est identique à l'événement "le dé donne 6 la n^e fois, et 1, 2, 3, 4, ou 5 les $n - 1$ fois précédentes. Pour calculer la probabilité de cet événement, l'espace Ω_n correspondant à n lancers successifs du dé suffit: il est formé des mots de n lettres écrits avec l'alphabet $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donc $\#\Omega = 6^n$. Les éléments de $\{Y = n\}$ sont, parmi ces mots, ceux dont la dernière lettre est 6 et dont les $n - 1$ premières sont prises dans l'alphabet $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, donc $\#\{Y = n\} = 5^{n-1}$. Ainsi

$$\mathcal{P}(Y = n) = \frac{5^{n-1}}{6^n}$$

et

$$G_Y(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{5^{n-1}}{6^n} z^n$$

Si on calcule cette somme de $n = 1$ à $n = N$, on obtient

$$\sum_{n \geq 1}^{n=N} \frac{5^{n-1}}{6^n} z^n = \frac{z}{6 - 5z} \cdot \left[1 - \left(\frac{5z}{6} \right)^N \right]$$

Pour pouvoir faire tendre N vers l'infini, il faudrait avoir construit un espace Ω lui-même infini. Mais il est bien clair que si n est grand, la probabilité pour que le dé ne donne jamais 6 avant la n^e fois est infinitésimale: par exemple pour $n = 1000$ cette probabilité serait $5^{999}/6^{1000} \simeq 1.318 \cdot 10^{-80}$. Pour qu'il y ait un sens à distinguer cela de zéro, il faudrait que l'équiprobabilité des six faces du dé soit vérifiée à 10^{-80} près. Comme il ne peut en être ainsi, il est absurde de prétendre pousser la sommation aussi loin. On va donc considérer que la probabilité pour que Y soit supérieur à 1000 est nulle, et que

$$G_Y(z) \simeq \frac{z}{6 - 5z}$$

Par ailleurs $G_X(z)$, la fonction génératrice des X_j , est égale à $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, donc d'après (VIII.4):

$$G_S(z) \simeq \frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{6 - \frac{5}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{z^2 + 1}{-5z^2 + 12z - 5} \quad (\text{VIII.5.})$$

Processus en cascade

Si à partir de ce résultat on veut retrouver les probabilités $\mathcal{P}(S = k)$, il faut développer cette expression en série entière. Les valeurs de S sont nécessairement entières, mais peuvent être aussi bien positives que négatives; il faut donc rechercher un développement de Laurent (voir cours de mathématique). Pour cela on commence par décomposer l'expression obtenue en éléments simples. Les racines du dénominateur $-5z^2 + 12z - 5$ sont

$$z_1 = \frac{6 - \sqrt{11}}{5} \quad ; \quad z_2 = \frac{6 + \sqrt{11}}{5} \quad ;$$

On remarquera que les deux sont réelles positives, et qu'en outre $z_1 < 1$ et $z_2 > 1$.

$$\begin{aligned} \frac{z^2 + 1}{-5z^2 + 12z - 5} &= -\frac{1}{5} + \frac{\frac{12}{5}z}{-5z^2 + 12z - 5} \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{A}{1 - \frac{z_1}{z}} \frac{z_1}{z} + \frac{B}{1 - \frac{z}{z_2}} \end{aligned}$$

On obtient sans difficulté les nombres A et B :

$$A = B = \frac{6}{5\sqrt{11}}$$

Le développement de Laurent de la fonction $(z^2 + 1)/(-5z^2 + 12z - 5)$ résulte alors des séries géométriques de

$$\frac{1}{1 - \frac{z_1}{z}} \frac{z_1}{z} = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{z_1}{z}\right)^k$$

et

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{z_2}} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z}{z_2}\right)^k$$

c'est-à-dire

$$G_S(z) = \frac{1}{5} \left(\frac{6}{\sqrt{11}} - 1 \right) + \sum_{k \geq 1} \frac{6}{5\sqrt{11}} \left(\frac{6 - \sqrt{11}}{5} \right)^k \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right)$$

On en déduit que

$$\mathcal{P}(S = 0) = \frac{1}{5} \left(\frac{6}{\sqrt{11}} - 1 \right)$$

et pour $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\mathcal{P}(S = \pm k) = \frac{6}{5\sqrt{11}} \left(\frac{6 - \sqrt{11}}{5} \right)^k$$

Le calcul numérique donne les valeurs suivantes :

k	0	1	2	3
$\mathcal{P}(S = \pm k)$	0.1618	0.1942	0.1042	0.0559
k	4	5	6	7
$\mathcal{P}(S = \pm k)$	0.0300	0.01161	0.0086	0.0046

Plus généralement, si au lieu d'un dé on avait employé un procédé quelconque donnant q résultats possibles au lieu de 6, de sorte que la loi de Y eût été $\mathcal{P}(Y = n) = \frac{1}{q}(1 - \frac{1}{q})^{n-1}$ au lieu de $\mathcal{P}(Y = n) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}$, alors on aurait obtenu pour la loi de S :

— si $k \neq 0$:

$$\mathcal{P}(S = \pm k) = \frac{q}{(q-1)\sqrt{2q-1}} \left(\frac{q - \sqrt{2q-1}}{q-1} \right)^k$$

— et si $k = 0$:

$$\mathcal{P}(S = 0) = \frac{1}{(q-1)} \left(\frac{q}{\sqrt{2q-1}} - 1 \right)$$

On constate que la répartition des probabilités entre les différentes valeurs de la variable S est très différente de ce qu'on obtenait pour la somme $\Sigma = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ d'un nombre *fixé* de variables aléatoires indépendantes: pour n grand, Σ avait une répartition en e^{-x^2} , ce qui n'est plus du tout le cas pour S . Bien entendu, cela se comprend aisément: la loi en e^{-x^2} provient de ce que Σ est la somme d'un *grand* nombre de X_j ; par contre S peut aléatoirement être la somme d'un grand nombre ou d'un petit nombre de X_j . Si q est petit (par exemple $q = 6$ comme dans le cas du dé), il est de toute façon peu probable que Y puisse prendre de grandes valeurs; mais même si q est très grand, il y a une probabilité non négligeable pour que la somme S soit la somme d'un nombre trop petit de X_j , en tous cas trop petit pour donner une loi de la forme e^{-x^2} .

Processus en cascade

Problème 3 : réaction en chaîne. Dans la fission nucléaire, un neutron casse un noyau d' U^{235} en libérant deux ou trois nouveaux neutrons, qui à leur tour reproduiront chacun l'exploit du premier.

La loi de probabilité du nombre de neutrons issu d'une fission étant donnée, trouver la probabilité pour que la réaction ne s'éteigne pas.

Dans un tel processus interviennent aussi les produits de fission, qui sont les débris hautement radioactifs des noyaux d' U^{235} ; mais leur existence, bien que menaçant l'avenir de l'humanité, ne joue qu'un rôle négligeable dans le maintien ou l'extinction de la réaction en chaîne. D'autre part, on peut appliquer aux différents neutrons une statistique tout à fait classique, car les événements dont ils sont issus (la fission d'un noyau) sont dépourvus de cohérence collective, de sorte qu'il n'y a pas interférence des amplitudes quantiques, mais superposition incohérente.

Dans un tel processus chaque neutron (particule-mère) donne après une fission un nombre *aléatoire* de nouveaux neutrons (particules-filles). Bien que ce soit purement théorique, on admettra que tout le processus a été initié par un seul premier neutron : cela revient à ne considérer que la descendance d'un seul neutron.

Remarque pour les physiciens : Pour chaque neutron de la réaction en chaîne, le nombre de générations depuis le tout premier neutron est parfaitement déterminé : en effet, d'après la relation d'incertitude phase – nombre $\Delta\varphi \times \Delta N \sim \hbar$, le nombre N de particules serait indéterminé si par exemple les particules étaient en phase, comme les photons d'un laser ; or les neutrons de fission sont en général incohérents, c'est-à-dire que l'incertitude sur la phase est infinie, donc l'incertitude sur le nombre est nulle (il s'agit de l'incertitude de Heisenberg, non de l'incertitude subjective provenant de la difficulté pratique de mesurer ce nombre). C'est pour cette raison qu'on peut appliquer une statistique classique. Il y a donc un sens à parler de l'ensemble des neutrons de la n^e génération.

Par conséquent on peut introduire les variables aléatoires

$$Z_n = \text{nombre de neutrons de la } n^e \text{ génération}$$

Par ailleurs, il semble absurde que la fission d'un noyau puisse être influencée par les résultats des autres fissions⁽¹⁾ ; cela implique que la loi de probabilité du nombre de neutrons issus de chaque fission est toujours la même, à savoir

⁽¹⁾ Cela "semble absurde", mais la Mécanique quantique nous a montré que de telles absurdités peuvent exister et ne sont donc pas absurdes. C'est pourquoi il faut considérer le postulat d'indépendance que nous faisons ici comme une simple hypothèse susceptible d'être réfutée par l'expérience, ou même dans certains cas par la théorie elle-même. La question est de savoir si les différentes fissions nucléaires d'une même réaction en chaîne sont *séparables*, au sens de la séparabilité quantique.

la loi de Z_1 , et que ce nombre est stochastiquement indépendant pour chaque fission.

Considérons alors l'ensemble des neutrons de fission de la n^e génération, et numérotions les par la pensée de $j = 1$ à $j = Z_n$. Le j^e de ces neutrons donne un nombre aléatoire $X_j^{(n)}$ de particules-filles, et d'après les hypothèses ci-dessus les variables aléatoires $X_j^{(n)}$ sont stochastiquement indépendantes entre elles et ont toutes la même loi que Z_1 .

On en déduit que le nombre de neutrons de la $(n + 1)^e$ génération est

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{j=Z_n} X_j^{(n)}$$

Autrement dit, le nombre de neutrons d'une génération est la somme d'un nombre lui-même aléatoire de variables aléatoires indépendantes et de même loi, c'est-à-dire que nous sommes ramenés au problème $N^o 2$. En appliquant simplement ce que nous avons trouvé alors, on voit que, si on appelle $G_n(z)$ la fonction génératrice de Z_n :

$$G_{n+1}(z) = G_n(G_1(z)) \quad ;$$

cela montre par récurrence que G_n est simplement la n^e itérée de G_1 :

$$G_n = G_1 \circ G_1 \circ G_1 \circ \cdots \circ G_1 \quad (n \text{ fois}) \quad (VIII.6.)$$

Étude d'un cas particulier

Il est parfois possible de calculer explicitement $G_n(z)$. Nous allons traiter un tel cas en détail, puis nous ferons une étude qualitative pour le cas général en nous inspirant de ce cas particulier.

Supposons que la loi de Z_1 soit la suivante :

$$\mathcal{P}(Z_1 = k) = \beta \alpha^k$$

où α et $\beta = 1 - \alpha$ sont donnés (cette loi, dite *loi géométrique*, est celle de Y dans le problème $N^o 2$ lorsque $\alpha = \frac{5}{6}$ et $\beta = \frac{1}{6}$). Cette loi est peu réaliste en tant que modèle de réaction en chaîne de fission nucléaire, mais cela importe peu pour le moment. Cette loi peu réaliste permet de calculer *explicitement* la fonction G_n , et nous verrons le cas général ensuite.

Il est toujours sous-entendu que les probabilités $\mathcal{P}(Z_1 = k) = \beta \alpha^k$ sont par nature approximatives et n'ont guère de signification pour des grandes valeurs de k ; donc la fonction génératrice est aussi approximative. D'un

Processus en cascade

point de vue pratique il est en général bien rare que l'on ait à considérer des probabilités $\mathcal{P}(Z_1 = k)$ au-delà de $k = 4$, car elle sont alors plus petites que l'incertitude sur leurs valeurs. Mais dans le cas présent où nous supposons une loi géométrique $\beta\alpha^k$, si on effectue formellement la somme de la série $\sum_k \mathcal{P}(Z_1 = k) z^k$ jusqu'à l'infini, on obtient une fonction simple (somme d'une série géométrique); si par contre, sous le prétexte que $\beta\alpha^k$ devient négligeable au-delà de, disons, $k = 10$, on n'effectuait la somme de la série que jusqu'à $k = 10$, on obtiendrait un polynôme de degré 10 beaucoup moins maniable que la fonction simple (homographique), et qui ne serait a priori ni plus exact, ni moins exact que la fonction simple. C'est pourquoi il est avantageux de sommer jusqu'à l'infini, non parce que la somme infinie est plus exacte, mais parce qu'elle est plus commode. La fonction est alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta\alpha^k z^k = \frac{\beta}{1 - \alpha z} = G_1(z)$$

Cette fonction homographique a en outre l'avantage d'être facile à itérer : la composition de deux ou plusieurs fonctions homographiques est également une fonction homographique (c'est la raison pour laquelle nous avons choisi la loi géométrique).

Un calcul sans surprise donne pour les premières itérées les résultats suivants :

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \beta \frac{1 - \alpha z}{(1 - \alpha\beta) - \alpha z} \\ G_3(z) &= \beta \frac{(1 - \alpha\beta) - \alpha z}{(1 - 2\alpha\beta) - (1 - \alpha\beta)\alpha z} \\ G_4(z) &= \beta \frac{(1 - 2\alpha\beta) - (1 - \alpha\beta)\alpha z}{(1 - 3\alpha\beta + \alpha^2\beta^2) - (1 - 2\alpha\beta)\alpha z} \end{aligned}$$

Sur ces expressions, on observe des régularités. Par exemple, le numérateur de chacune est égal au dénominateur de la précédente. En observant encore mieux, on voit aussi que, à l'intérieur des numérateurs ou des dénominateurs, le premier terme est toujours en avance d'un rang sur le coefficient de αz . On devine donc une récurrence sous la forme

$$G_n(z) = \beta \frac{a_{n+1} - \alpha a_n z}{a_{n+2} - \alpha a_{n+1} z}$$

où a_n est une certaine suite numérique. En identifiant les coefficients dans la relation de récurrence $G_{n+1} = G_n \circ G_1$, on constatera que cette suite est elle-même définie par la relation de récurrence

$$a_{n+1} = a_n - \alpha\beta a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = 0 ; \quad a_2 = 1 \quad (n = 0 \text{ et } 1)$$

Mais on peut encore simplifier davantage : dans une fonction homographique $(a + bz) / (c + dz)$, les quatre coefficients a, b, c, d ne sont pas univoques ; on peut simplifier l'expression ci-dessus de $G_n(z)$ en divisant le numérateur et le dénominateur par a_{n+1} , ce qui donne

$$G_n(z) = \beta \frac{1 - \alpha \frac{a_n}{a_{n+1}} z}{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \alpha z}$$

Si alors on introduit la nouvelle suite numérique $b_n = a_n/a_{n+1}$ ($n \geq 1$), cela s'écrit

$$G_n(z) = \beta \frac{1 - \alpha b_n z}{\frac{1}{b_{n+1}} - \alpha z} = \beta b_{n+1} \frac{1 - \alpha b_n z}{1 - \alpha b_{n+1} z} \quad (\text{VIII.7.})$$

et la nouvelle suite numérique b_n est caractérisée par la récurrence

$$b_{n+1} = \frac{1}{1 - \alpha \beta b_n} \quad (b_1 = 0) \quad (\text{VIII.8.})$$

qu'on déduit de la relation de récurrence des a_n en divisant ses deux membres par a_n .

Une petite étude rapide de la suite b_n sera utile. On peut montrer qu'elle est croissante, que si $\alpha > \frac{1}{2}$ elle tend vers $1/\alpha$, et si $\alpha < \frac{1}{2}$ elle tend vers $1/\beta$. En effet, on vérifie par récurrence que l'on a toujours

$$1 < b_n < \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad 1 < b_n < \frac{1}{\beta}$$

Rappelons que $\beta = 1 - \alpha$. Par ailleurs on peut écrire

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{1 - \alpha \beta b_n} - b_n = \frac{1 - b_n + \alpha \beta b_n^2}{1 - \alpha \beta b_n} \\ &= \frac{(1 - \alpha b_n)(1 - \beta b_n)}{1 - \alpha \beta b_n} = b_{n+1}(1 - \alpha b_n)(1 - \beta b_n) \end{aligned}$$

où on voit que le second membre est, d'après ce qui précède, toujours positif. Cette dernière égalité montre aussi que la limite ne peut être que $\frac{1}{\alpha}$ ou $\frac{1}{\beta}$; du fait que la suite est croissante et démarre à $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$, la limite est nécessairement le plus petit de ces deux nombres.

Processus en cascade

Pour obtenir la loi de Z_n il faut maintenant développer la fonction génératrice $G_n(z)$ en puissances de z :

$$\begin{aligned}
 G_n(z) &= \beta b_{n+1} \frac{1 - \alpha b_n z}{1 - \alpha b_{n+1} z} \\
 &= \beta b_{n+1} (1 - \alpha b_n z) \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha b_{n+1} z)^k \\
 &= \beta b_{n+1} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha b_{n+1} z)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha b_n (\alpha b_{n+1})^k z^{k+1} \right\} \\
 &= \beta b_{n+1} + \beta [b_{n+1} - b_n] \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha b_{n+1} z)^k
 \end{aligned}$$

On en déduit la loi de probabilité de Z_n :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } k = 0: \quad \mathcal{P}(Z_n = 0) &= \beta b_{n+1} \\
 \text{pour } k \geq 1: \quad \mathcal{P}(Z_n = k) &= \beta [b_{n+1} - b_n] (\alpha b_{n+1})^k \\
 &= \beta b_{n+1} (1 - \alpha b_n) (1 - \beta b_n) (\alpha b_{n+1})^k
 \end{aligned}$$

Les valeurs de $\mathcal{P}(Z_n = k)$ pour *chaque* k sont peu parlantes et on voit mieux ce qui se passe avec $\mathcal{P}(Z_n \geq k)$; or ceci s'obtient aisément :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(Z_n \geq k) &= \sum_{\ell \geq k}^{\infty} \mathcal{P}(Z_n = \ell) \\
 &= \beta b_{n+1} (1 - \alpha b_n) (1 - \beta b_n) \frac{(\alpha b_{n+1})^k}{1 - \alpha b_{n+1}} \\
 &= (1 - \beta b_n) (\alpha b_{n+1})^k
 \end{aligned}$$

On voit que cette valeur décroît exponentiellement avec k . Lorsque n est grand, cette décroissance est très lente si $\alpha > \frac{1}{2}$, car alors $\alpha b_{n+1} \simeq 1$; elle est par contre rapide si α est nettement inférieur à $\frac{1}{2}$, car alors $\alpha b_{n+1} \simeq \frac{\alpha}{\beta}$, ce qui est nettement inférieur à 1. Dans ce second cas, cependant, on voit que $\mathcal{P}(Z_n = 0) = \beta b_{n+1} \simeq 1$, ce qui signifie que la probabilité pour que la réaction en chaîne se soit éteinte est pratiquement égale à 1 (la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini est 1). Dans le premier cas, où $\alpha > \frac{1}{2}$, on voit que la probabilité pour que la réaction en chaîne soit éteinte à la n^{e} génération tend vers $\frac{\beta}{\alpha}$ (qui est strictement inférieur à 1) lorsque n tend vers l'infini, mais les probabilités pour qu'il y ait 1, 2, 3, ..., k neutrons décroissent très lentement avec k (elles sont pratiquement équiprobables tant que $k \ll \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^n$).

Sur cet exemple le calcul détaillé nous a permis d'obtenir explicitement,

sous forme analytique, la loi de Z_n . Les propriétés intéressantes sont toutefois surtout les suivantes :

— quand n tend vers l'infini, la limite de $\mathcal{P}(Z_n = 0)$ est $\frac{\alpha}{\beta}$ si $\alpha > \frac{1}{2}$ et 1 si $\alpha \leq \frac{1}{2}$; cela signifie que si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ la réaction finira *certainement* par s'éteindre, et que si $\alpha > \frac{1}{2}$ il y a toujours une probabilité non nulle pour qu'elle finisse par s'éteindre.

— dans le cas où la probabilité d'extinction ne tend pas vers 1, peu importe le détail de la loi, mais on constate que celle-ci est exponentielle (géométrique) et très étalée.

En général, lorsque $G_1(z)$ est quelconque, il est impossible d'effectuer des calculs analytiques explicites. Mais nous allons voir que les renseignements *intéressants* peuvent être déduits quand même : ce sera le sujet de la section suivante ("Étude du cas général"). Nous y établirons que *quelle que soit la loi de Z_1* , il n'y a que deux possibilités : si $\mathbf{E}(Z_1) \leq 1$ la probabilité pour que $Z_n = 0$ tend vers 1 et si $\mathbf{E}(Z_1) > 1$ il y a une probabilité non nulle que la réaction se poursuive éternellement. En outre, s'il est impossible de calculer explicitement la loi exacte et complète de Z_n , on peut du moins calculer explicitement $\mathbf{E}(Z_n)$ et $\mathbf{Var}(Z_n)$. Nous verrons qu'on peut même calculer algorithmiquement sa densité. Autrement dit, quoique le calcul détaillé soit impossible, tout ce qu'on pouvait déduire d'intéressant à partir du calcul détaillé peut aussi être obtenu par une autre voie.

La fonction génératrice $G(z)$ d'une loi de probabilité n'est pas une fonction arbitraire; lorsqu'on la développe selon les puissances de z , les coefficients sont des probabilités, donc ils ne sont jamais négatifs, et en outre leur somme est égale à 1. Cela a pour conséquence que si $0 < x \leq 1$, $G(x)$ et ses dérivées successives au point $z = x$ sont toutes positives. Cela se voit très facilement. Soit $G^{(j)}(x)$ la j^e dérivée de $G(z)$ au point $z = x$; on a

$$G^{(j)}(x) = \sum_{k \geq j} k(k-1)(k-2) \cdots (k-j+1) p_k x^{k-j}$$

dans cette somme tous les termes sont positifs donc la somme est positive; en outre dans le cas où pour simplifier on souhaite sommer jusqu'à l'infini il n'y a pas de problème de convergence puisque nous avons supposé $x \leq 1$. Or une fonction $G(x)$ dont toutes les dérivées sont positives est nécessairement croissante et convexe; donc une droite ne peut pas couper son graphe en plus de deux points. L'équation $G(x) = x$ a au plus deux racines. Mais $x = 1$ est une racine évidente. On peut comprendre aisément que si $G'(1) > 1$ il existe une deuxième racine x_0 telle que $0 < x_0 < 1$. Par contre si $G'(1) < 1$, il ne peut pas exister entre 0 et 1 d'autre racine que 1. La convexité de $G(x)$

Processus en cascade

a en outre la conséquence que si $0 < x < 1$, la suite des itérées $G^n(x)$ tend vers la racine x_0 si $G'(x) > 1$ et vers la racine 1 si $G'(x) \leq 1$. Voir la figure 18.

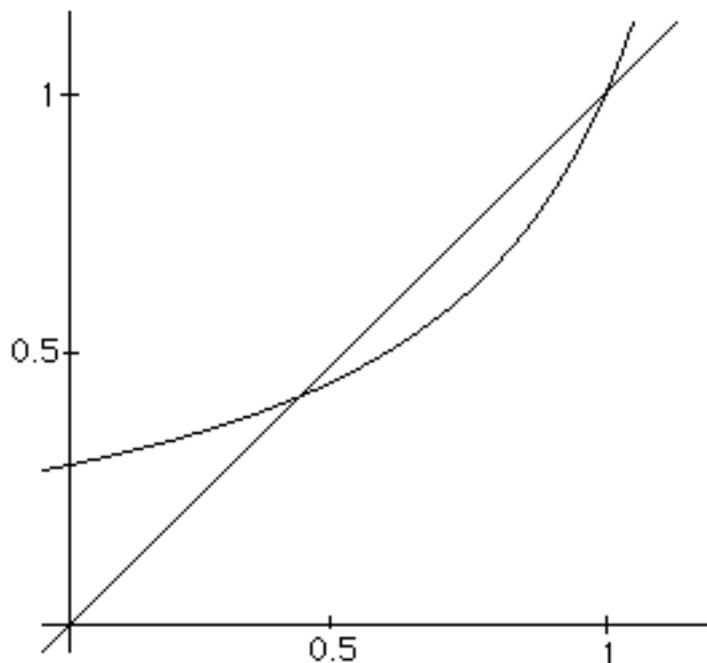


figure 18.

Dans l'exemple que nous avons traité en détail, ces phénomènes se produisaient. La fonction $G(z)$ était $\beta/(1 - \alpha z)$ et sa dérivée était donc $G'(z) = \alpha\beta/(1 - \alpha z)^2$, d'où $G'(1) = \alpha/\beta$. La condition qui était nécessaire pour que la probabilité d'extinction ne tende pas vers 1 était que $\alpha > \frac{1}{2}$, ou, ce qui est équivalent, que $\alpha > \beta$, c'est-à-dire $G'(1) > 1$. Dans ce cas, le calcul nous avait montré que la suite b_n tendait vers $\frac{1}{\alpha}$, et par conséquent $G_n(z) = \beta b_{n+1} (1 - b_n \alpha z) / (1 - b_{n+1} \alpha z)$ (cf. VIII.7) devait avoir pour limite β/α lorsque n tend vers l'infini; or la racine x_0 de l'équation $G(x) = x$ est dans ce cas précisément égale à cette valeur.

Il est possible de trouver, à partir de la récurrence (VIII.8), une expression analytique explicite de la suite b_n en fonction de n . Pour cela, introduisons $x_n = 1 - \alpha b_n$; puisque b_n tend vers $1/\alpha$, il est clair que x_n tend vers 0. En outre, puisque b_n tend vers $1/\alpha$ *en croissant*, les x_n sont toujours positifs. On déduit immédiatement la récurrence des x_n de celle des b_n :

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n}{\alpha + \beta x_n}$$

On voit que lorsque x_n est petit (donc pour n assez grand), le terme βx_n au dénominateur est négligeable devant α , de sorte que $x_{n+1} \simeq \frac{\beta}{\alpha} x_n$. Cela montre que la décroissance de la suite x_n est de type exponentiel, de raison $\frac{\beta}{\alpha}$; c'est-à-dire qu'on s'attend à ce que pour n grand, $x_n \sim (\frac{\beta}{\alpha})^n$. Posons alors

$$y_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n x_n$$

La récurrence entre les y_n est maintenant

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n}{\alpha + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \alpha y_n} = \frac{1}{\frac{1}{y_n} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}$$

ou encore, en considérant la suite des inverses $u_n = \frac{1}{y_n}$:

$$u_{n+1} = u_n + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}$$

Pour amorcer la récurrence, il faut connaître u_1 , ce qui s'obtient immédiatement : $b_1 = 0$, donc $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, et $u_1 = \frac{\beta}{\alpha}$. Par conséquent u_n peut s'exprimer directement en fonction de n :

$$u_n = \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}$$

En revenant en arrière, on obtient alors pour x_n et b_n :

$$x_n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} \frac{1 - \frac{\beta}{\alpha}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \quad b_n = \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

Revenons à l'expression (VIII.7) de $G_n(z)$ qui avait été obtenue plus haut à l'aide des b_n .

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \beta \frac{1 - \alpha b_n z}{\frac{1}{b_{n+1}} - \alpha z} \\ &= \beta \frac{1 - \alpha b_n z}{1 - \alpha \beta b_n - \alpha z} \quad (\text{VIII.9.}) \\ &= 1 + \frac{(\beta - \alpha - \beta x_n)w}{\alpha w + \beta x_n} \end{aligned}$$

où l'on a introduit $w = 1 - z$. Lorsque x_n tend vers zéro (c'est-à-dire lorsque n tend vers l'infini), la limite de cette dernière expression n'est pas une

bonne fonction analytique de w ; en effet, si $w = 0$, cela tend vers 1, mais dès que $w \neq 0$, cela tend vers $\frac{\beta}{\alpha}$. Bien entendu, tant que n n'est pas infini, il y a continuité: lorsque w s'écarte de zéro (c'est-à-dire lorsque z s'écarte de 1), l'expression ci-dessus passe continuellement de la valeur 1 à la valeur $\frac{\beta}{\alpha}$. Mais plus n est grand, plus ce passage est rapide. Il se produit le phénomène suivant: pour $w = 0$, $G(1-w) = 1$, et lorsque $|w| \gg (\frac{\beta}{\alpha})^n$, $G(1-w) \simeq \frac{\beta}{\alpha}$. Le saut brusque de 1 à $\frac{\beta}{\alpha}$ se produit sur une plage de valeurs pour $|w|$ qui est de l'ordre de $(\frac{\beta}{\alpha})^n$, ce qui, lorsque n est grand, est une très courte distance.

Le phénomène qui se produit là est analogue à celui du chapitre VII. Nous avons vu à cette occasion que si X_1, X_2, \dots, X_n étaient des variables aléatoires stochastiquement indépendantes, alors la loi de $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ avait une fonction caractéristique $\Phi_n(t)$ proche de e^{-at^2} ; mais il a fallu pour cela diviser la somme $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ par \sqrt{n} ; la fonction caractéristique de la somme *non divisée* par \sqrt{n} est e^{-ant^2} et non e^{-at^2} . Lorsque n tend vers l'infini, il arrive donc également que la fonction caractéristique de la somme non divisée tende vers 1 lorsque $t = 0$, et vers zéro lorsque $t \neq 0$: c'est le même type de discontinuité. Lorsque n n'est pas infini, mais grand, le passage de 1 à 0 est continu, mais rapide, comme le montre la fonction e^{-ant^2} : le passage se fait sur une étroite plage de valeurs, de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. On faisait donc apparaître la forme gaussienne e^{-at^2} de ce passage de 1 à 0 en effectuant un changement d'échelle: on "agrandissait" dans un rapport \sqrt{n} l'intervalle autour de $t = 0$ où ce changement se produit.

Le phénomène que nous étudions maintenant étant analogue, il est judicieux d'effectuer également un changement d'échelle, cette fois de rapport $(\frac{\alpha}{\beta})^n$. Ainsi, pour agrandir le voisinage de $w = 0$ dans ce rapport, nous poserons $\zeta = (\frac{\alpha}{\beta})^n w$. En fonction de cette nouvelle variable, l'expression (VIII.9) de $G_n(z)$ devient

$$G_n(z) = 1 + \frac{(\beta - \alpha - \beta x_n)(\frac{\beta}{\alpha})^n \zeta}{\alpha(\frac{\beta}{\alpha})^n \zeta + \beta x_n}$$

Or le rapport $(\frac{\beta}{\alpha})^n$ se factorise aussi bien au numérateur qu'au dénominateur, de sorte qu'après simplification il reste:

$$G_n(z) = 1 + \frac{(\beta - \alpha - \beta x_n) \zeta}{\alpha \zeta + \beta \frac{1 - \frac{\beta}{\alpha}}{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n+1}}}$$

Cette expression est entièrement explicite: $G_n(z)$ y est exprimé analytiquement en fonction de α , ζ , et n , sans recourir à aucun intermédiaire qui ne

serait connu que par une relation de récurrence. En y faisant tendre n vers l'infini, tout en laissant α et ζ fixés, on voit que cela tend vers une limite, qui est égale à $1 + Q(\zeta)$, où $Q(\zeta)$ est la fonction :

$$Q(\zeta) = \frac{(\alpha - \beta) \zeta}{\beta - \alpha \zeta} \quad (\text{VIII.10.})$$

Mais il faut bien comprendre qu'il s'agit là de la limite *lorsque ζ reste fixé*. Car $z = 1 - (\frac{\beta}{\alpha})^n \zeta$, de sorte que z varie avec n et n'est pas fixé: si ζ est fixé, z tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, et n'est donc pas lui-même fixé. Inversement, si on fait tendre n vers l'infini *en maintenant z , et non ζ fixé*, la limite sera toute différente: ce sera, comme nous l'avons vu, 1 si $z = 1$ et $\frac{\beta}{\alpha}$ si $z \neq 1$. En termes de valeurs approchées, cela signifie simplement que pour n grand, $G(z)$ est une fonction égale à $\frac{\beta}{\alpha}$ partout excepté dans un petit voisinage (de diamètre environ $[\frac{\beta}{\alpha}]^n$) autour de $z = 1$, tandis qu'à l'intérieur de ce voisinage, *si on agrandit celui-ci* dans le rapport $(\frac{\beta}{\alpha})^n$, la fonction $G(z)$ est approximativement égale à $1 + Q(\zeta)$. Ce que nous avons donc effectué par le passage de la variable z à la variable ζ est *un changement d'échelle*. Pour n grand, la fonction caractéristique de Z_n est $\Phi_n(t) \simeq 1 + Q([\frac{\beta}{\alpha}]^{-n} (1 - e^{it}))$, qui est presque partout proche de β/α (la probabilité pour que $Z_n = 0$), et ne diffère sensiblement de β/α que dans un intervalle minuscule, dont la largeur est de l'ordre de $[\frac{\beta}{\alpha}]^n$, autour de $t = 0$. Mais toute l'information sur la densité de probabilité des valeurs de Z_n autres que zéro est précisément concentrée dans les variations de $\Phi_n(t)$ à l'intérieur de ce petit intervalle, et le changement d'échelle permet de mieux les voir.

Étude du cas général.

Tout ce que nous venons de voir sur l'exemple, a une valeur générale; sauf, évidemment, qu'en général on ne peut pas effectuer analytiquement tous les calculs, et qu'on doit alors se contenter de calculs numériques (mais nous allons voir qu'on peut disposer pour cela d'algorithmes simples et efficaces).

Pour commencer, nous allons établir que la fonction $Q(\zeta)$ existe en général, et non seulement dans le cas particulier de l'exemple; nous verrons également un algorithme simple pour la calculer. Tout cela résulte, comme nous allons voir, du fait qu'une fonction génératrice n'est pas une fonction analytique quelconque, mais possède des propriétés très particulières, notamment le fait — signalé plus haut — que pour x réel et compris entre 0 et 1, toutes les dérivées de $G(z)$ en $z = x$ sont positives.

La première conséquence de cette propriété est (comme nous l'avons déjà vu) l'existence d'une solution $x = r$ unique de l'équation $G(x) = x$

Processus en cascade

pour $0 < x < 1$ lorsque $G'(1) > 1$. Il faut noter que $G'(1)$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z_1 : la condition $G'(1) > 1$ signifie donc que chaque particule-mère engendre *en moyenne* plus qu'une particule-fille (la moyenne n'est évidemment pas forcément un nombre entier).

La raison de l'existence de cette solution r est que la fonction $G(x)$ est croissante et convexe sur l'intervalle $[0, 1]$. Un raisonnement élémentaire, qui saute aux yeux en voyant la figure 18, montre qu'il doit en être ainsi si $G'(1) > 1$. On peut signaler les cas dégénérés : si $G(0) = 0$, r devient simplement 0 ; si $G(z) = z$, il y a une infinité de solutions, mais ce cas est exclu puisque nous supposons $G'(1) > 1$.

Le raisonnement simple qui se déduit de la figure 18 est valable pour la fonction $G(x)$ de la variable réelle x ; son évidence géométrique ne permet pas de s'assurer qu'il n'existerait pas de solution complexe de l'équation $G(z) = z$. Mais cela peut être démontré autrement, toujours en utilisant les propriétés particulières des fonctions génératrices. En effet, la série $\sum p_k z^k$ qui définit $G(z)$ converge pour $|z| < 1$, donc on peut écrire pour n'importe quel nombre complexe z de module < 1 :

$$G(z) - r = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z^k - r^k) = (z - r) \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left[\sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} r^j \right]$$

on a simplement utilisé l'identité $z^k - r^k = (z - r) \sum z^{k-1-j} r^j$. Passant aux modules, cela donne l'inégalité

$$\begin{aligned} |G(z) - r| &\leq |z - r| \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left[\sum_{j=0}^{k-1} |z|^{k-1-j} r^j \right] \\ &= |z - r| \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{|z|^k - r^k}{|z| - r} \right] \\ &= |z - r| \frac{G(|z|) - G(r)}{|z| - r} \end{aligned}$$

Or si $|z| < 1$, $(G(|z|) - G(r))/(|z| - r) = \rho$ est également < 1 à cause de la convexité de $G(x)$ ($|z|$ et r sont réels).

On obtient alors ceci : si $|z| < 1$, $|G(z) - r| \leq \rho |z - r|$ avec $\rho < 1$. Il est donc impossible que $G(z) = z$, sauf si $z = r$ [sinon on aurait $|z - r| \leq \rho |z - r|$]. Donc $z = r$ est la seule racine de l'équation $G(z) = z$ à l'intérieur du disque $|z| \leq 1$. Cela signifie que s'il existe d'autres racines, celles-ci sont soit sur le cercle $|z| = 1$, soit à l'extérieur de ce cercle.

La fonction génératrice G_n de Z_n étant la n^e itérée de G , on peut aussi déduire de cette inégalité que pour $|z| < 1$

$$|G_n(z) - r| \leq \rho^n |z - r|$$

qui montre que si $|z| < 1$, $G_n(z)$ tend vers r quand n tend vers l'infini, d'autant plus rapidement que ρ est plus petit. Il en va de même si $|z| = 1$ et $|G(z)| < 1$, car alors on peut écrire

$$|G_n(z) - r| \leq \rho^{n-1} |G(z) - r|$$

Encore plus généralement : il suffit que l'une quelconque des itérées $G_j(z)$ soit de module inférieur à 1. Si $|z| \leq 1$, le seul cas où $G_n(z)$ ne tend pas vers r est celui où $|z| = 1$ et où pour *toutes* les itérées G_j , $|G_j(z)| = 1$.

Dans l'exemple particulier traité précédemment, le nombre $z = 1$ était le seul, parmi les nombres de module 1, pour lequel $G(z)$ est lui aussi de module 1; donc pour tous les z tels que $|z| \leq 1$, excepté $z = 1$, $G_n(z)$ tendait vers $r = \frac{\beta}{\alpha}$, de sorte que la limite de $G_n(z)$ pour n tendant vers l'infini était une fonction discontinue. Mais en effectuant une homothétie de centre $z = 1$ et de rapport a^n , c'est-à-dire un changement d'échelle, avec $a = G'(1) = \mathbf{E}(Z_1)$ (dans le cas particulier a était égal à α/β), on avait fait apparaître la fonction limite $Q(\zeta)$, qui est non seulement continue, mais analytique. Si on veut construire une telle fonction limite dans le cas général où $G(z)$ est une fonction génératrice quelconque, il faut, pour que l'homothétie de centre $z = 1$ puisse être introduite, que l'on développe les fonctions G_n en série entière au voisinage de $z = 1$ et non au voisinage de $z = 0$; c'est d'ailleurs ce que nous avons fait dans le cas particulier pour mettre en évidence la fonction $Q(\zeta)$.

Posons donc $w = z - 1$ et $F(w) = G(1 + w) - 1$. Il est clair que $F(0) = 0$ et que la n^e itérée de F est $F_n(w) = G_n(1 + w) - 1$: en effet, si on suppose que c'est vrai pour n , on aura

$$\begin{aligned} F_{n+1}(w) &= F(F_n(w)) = G(1 + F_n(w)) - 1 \\ &= G(G_n(1 + w)) - 1 = G_{n+1}(1 + w) - 1 \end{aligned}$$

La fonction $Q(\zeta)$ doit alors être la limite des fonctions $Q_n(\zeta)$ définies par :

$$Q_n(\zeta) = F_n(a^{-n}\zeta)$$

Le problème est de montrer que cette limite existe (c'est-à-dire que la suite $Q_n(\zeta)$ n'est pas divergente), qu'elle est une fonction continue et analytique de la variable complexe ζ , et éventuellement de pouvoir calculer sa série

Processus en cascade

entière. Si ce travail est effectué, alors on pourra dire que pour n grand, $G_n(z)$ est approximativement égale à $1 + Q(a^n w)$; ou encore, que la fonction caractéristique de Z_n est donnée approximativement par

$$\Phi_n(t) \simeq 1 + Q(a^n(e^{it} - 1))$$

Si au lieu de considérer la fonction caractéristique de Z_n , on considère plutôt celle de Z_n/a^n , qui n'est autre que $\Phi_n(t/a^n)$, on obtient alors l'expression particulièrement simple :

$$\Phi_n(t/a^n) \simeq 1 + Q(it)$$

car lorsque n tend vers l'infini, $a^n(e^{i(t/a^n)} - 1)$ tend vers it .

Cette approximation de la fonction caractéristique est d'autant plus correcte que n est plus grand et que ζ , ou t , est plus petit; en particulier, elle n'est plus valable si ζ , ou t , est très grand. Comme nous l'avons déjà constaté au chapitre **VII**, cela signifie que l'approximation ci-dessus est un filtre passe-bas qui élimine le *bruit discret* de la loi de Z_n mais qui conserve toute l'information sur la *densité* de cette loi. L'étude détaillée du cas particulier avait montré que la loi de Z_n était faite d'une probabilité appréciable pour que $Z_n = 0$, et d'un nuage très étendu de valeurs non nulles, ayant chacune une probabilité infinitésimale; or l'information utile est constituée de :

- la probabilité de $Z_n = 0$;
- la densité de probabilité des autres valeurs.

Le *détail* de la loi discrète, à savoir les probabilités exactes des valeurs non nulles de Z_n , n'est pas une information utile. Par conséquent, la fonction $Q(\zeta)$ contient exactement l'information utile et est débarrassée de l'information inutile. L'approximation ci-dessus est donc meilleure que la fonction caractéristique exacte $\Phi_n(t/a^n)$. On ne devrait pas dire que $1 + Q(it)$ est une approximation de $\Phi_n(t/a^n)$, mais que $\Phi_n(t/a^n)$ est une complication de $1 + Q(it)$.

Pour étudier la fonction $Q(\zeta)$ et montrer qu'elle est analytique, il serait commode d'avoir une relation de récurrence sur les $Q_n(\zeta)$. Or, cela est facile à obtenir, car on a la récurrence sur les $F_n(w)$:

$$F_{n+1}(w) = F(F_n(w))$$

en prenant $\zeta = a^n w$ cela donne

$$F_{n+1}(a^{-n}\zeta) = F(F_n(a^{-n}\zeta))$$

qui est équivalent à

$$Q_{n+1}(a\zeta) = F(Q_n(\zeta))$$

Cette relation est précieuse : c'est une relation de récurrence qui permet de calculer effectivement la suite des $Q_n(\zeta)$, à partir de $Q_0(\zeta) = \zeta$. Si on fait tendre n vers l'infini dans les deux membres de la relation, on obtient

$$Q(a\zeta) = F(Q(\zeta)) \tag{VIII.11.}$$

puisque si les deux membres sont égaux pour tout n , leurs limites sont égales aussi (notez bien que si la limite de $F(Q_n(\zeta))$ est $F(Q(\zeta))$, c'est parce que la fonction $F(w)$ est continue). Toutefois cette déduction est incorrecte s'il n'y a pas de limite, ou si la fonction $F(w)$ a des discontinuités. Or la fonction $G(z)$ est certes analytique au moins dans le disque $|z| < 1$, mais peut avoir des pôles ou des singularités logarithmiques ou essentielles en dehors de ce disque; la continuité de $F(w)$ n'est assurée que dans le domaine où elle est analytique : il faut donc que ζ soit tel que *tous* les $Q_n(\zeta)$ soient dans ce domaine d'analyticité. Ces remarques montrent déjà que le problème de l'existence d'une limite doit être traité sérieusement. Nous nous occuperons de cela un peu plus loin, voyons déjà ce que le résultat permet de faire.

Pour obtenir la série entière de $Q(\zeta)$, il suffit de la substituer à w dans la série connue de $F(w)$, puis d'identifier les coefficients. Soit donc

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

la série connue; ses coefficients a_n se déduisent des coefficients p_n de $G(z)$ par la relation

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= a = \mathbf{E}(Z_1) \\ a_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p_k \quad \text{si } n \geq 2 \end{aligned}$$

On voit qu'ils sont tous positifs. Soit d'autre part la série inconnue :

$$Q(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \zeta^j \tag{VIII.12.}$$

En substituant la série (VIII.12) dans l'égalité (VIII.11) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k a^k \zeta^k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^n$$

Processus en cascade

On ne peut développer les puissances n -ièmes des séries complètes lorsque n est trop grand, mais on peut développer aux ordres les plus bas ; ainsi, si on ne retient que les termes de degré au plus cinq, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^2 &= c_1^2 \zeta^2 + 2c_1 c_2 \zeta^3 + (c_2^2 + 2c_1 c_3) \zeta^4 + (2c_1 c_4 + 2c_2 c_3) \zeta^5 + \dots \\ \left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^3 &= c_1^3 \zeta^3 + 3c_1^2 c_2 \zeta^4 + (3c_1^2 c_3 + 3c_1 c_2^2) \zeta^5 + \dots \\ \left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^4 &= c_1^4 \zeta^4 + 4c_1^3 c_2 \zeta^5 + \dots \\ \left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^5 &= c_1^5 \zeta^5 + \dots \end{aligned}$$

En identifiant ensuite les coefficients des deux séries, celle de $Q(a\zeta)$ et celle de $F(Q(\zeta))$, on obtient :

$$\begin{aligned} ac_1 &= a_1 c_1 \\ a^2 c_2 &= a_1 c_2 + a_2 c_1^2 \\ a^3 c_3 &= a_1 c_3 + 2a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3 \\ a^4 c_4 &= a_1 c_4 + a_2 (c_2^2 + 2c_1 c_3) + 3a_3 c_1^2 c_2 + a_4 c_1^4 \\ a^5 c_5 &= a_1 c_5 + a_2 (2c_1 c_4 + 2c_2 c_3) + a_3 (3c_1^2 c_3 + 3c_1 c_2^2) \\ &\quad + a_4 (c_1^3 c_2 + 3c_1^2 c_2) + a_5 c_1^5 \end{aligned}$$

La première équation est indéterminée, on prendra donc $c_1 = 1$. La deuxième donne $c_2 = a_2/(a^2 - a)$. On voit qu'il s'agit d'un système de cinq équations linéaires à cinq inconnues, et ce système est triangulaire donc de résolution aisée :

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= a_2/(a^2 - a) \\ c_3 &= [2a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3]/(a^3 - a) \\ c_4 &= [a_2 (c_2^2 + 2c_1 c_3) + 3a_3 c_1^2 c_2 + a_4 c_1^4]/(a^4 - a) \\ c_5 &= [a_2 (2c_1 c_4 + 2c_2 c_3) + a_3 (3c_1^2 c_3 + 3c_1 c_2^2) \\ &\quad + a_4 (c_1^3 c_2 + 3c_1^2 c_2) + a_5 c_1^5]/(a^5 - a) \end{aligned} \tag{VIII.13.}$$

c'est-à-dire que chaque c_j se calcule aisément à partir des coefficients $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{j-1}$ précédemment calculés.

On peut ainsi obtenir un développement limité de $Q(\zeta)$ à n'importe quel ordre, et par conséquent aussi pour la fonction caractéristique approchée

$1 + Q(it)$. Cela permet déjà de calculer $1 + Q(it)$ pour des valeurs assez petites de t .

On voit que tout cela mène à des algorithmes pour un calcul effectif de la fonction caractéristique approchée. Comme au chapitre **VII**, on pourra alors déduire (par des opérations de filtrage et de transformations de Fourier) des informations sur la densité de la variable aléatoire Z_n pour n grand.

Toutefois ces possibilités de calcul effectif présupposent que la suite $Q_n(\zeta)$ converge vers une limite. Nous allons maintenant nous occuper de vérifier que c'est bien le cas, en précisant le domaine auquel doit appartenir ζ pour qu'il en soit ainsi. La méthode est classique : il revient au même de dire que la suite $Q_n(\zeta)$ a une limite, ou que la série $\sum [Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)]$ est convergente. Et pour montrer que la série est convergente, nous la majorerons par une série géométrique.

Il s'agit donc d'étudier la différence $Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)$. Pour cela, il faut d'abord en savoir plus sur $F_n(w)$.

Un développement limité de $F(w)$ à l'ordre 2 est de la forme $F(w) \simeq aw + a_2w^2$; si on itère cela en ne retenant que les termes en w et w^2 , on trouve :

$$\begin{aligned} F(w) &\simeq aw + a_2w^2 \\ F_2(w) &\simeq a^2w + a_2(a + a^2)w^2 \\ F_3(w) &\simeq a^3w + a_2(a^2 + a^3 + a^4)w^2 \\ F_4(w) &\simeq a^4w + a_2(a^3 + a^4 + a^5 + a^6)w^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

donc on devine la récurrence

$$\begin{aligned} F_n(w) &\simeq a^n w + a_2(a^{n-1} + a^n + a^{n+1} + \dots + a^{2n-2})w^2 \\ &= a^n w + a_2 a^{n-1} \frac{a^n - 1}{a - 1} w^2 \end{aligned}$$

qui se confirme aisément. Puisque $Q_n(\zeta) = F_n(\zeta/a^n)$, on en déduit que le développement à l'ordre 2 de la fonction $Q_n(\zeta)$ est

$$Q_n(\zeta) \simeq \zeta + \frac{a_2}{a - 1} \cdot \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a^{n+1}} \right] \zeta^2$$

et par conséquent

$$Q_n(\zeta) - Q_{n-1}(\zeta) \simeq \frac{a_2}{a - 1} \cdot \left[\frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^{n+1}} \right] \zeta^2$$

Processus en cascade

Donc il semble raisonnable de conjecturer que l'on doit avoir une inégalité du type

$$|Q_n(\zeta) - Q_{n-1}(\zeta)| \leq K(|\zeta|) \left[\frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^{n+1}} \right] \quad (VIII.14.)$$

où $K(x)$ est une certaine fonction positive de x , équivalente à $x^2 a_2 / (a - 1)$ lorsque x tend vers zéro, mais indépendante de n . Si on arrivait à montrer cette conjecture, on en déduirait immédiatement que la suite $Q_n(\zeta)$ converge pour tout ζ .

Or nous allons voir que tout dépend de la courbe $y = G(x)$ telle qu'elle est représentée sur la figure 18. Nous avons déjà utilisé plus haut la propriété que la fonction génératrice est non seulement un polynôme ou une fonction analytique, mais que les coefficients de son développement de Taylor sont tous positifs. Cela avait pour conséquence que pour z complexe on pouvait toujours écrire $|G(z)| \leq G(|z|)$. Pour x réel (donc en ce qui concerne les propriétés géométriques visibles sur la figure), la courbe est convexe, c'est-à-dire qu'elle est toujours *au-dessus* de sa tangente. Par exemple au point $x = 1$, la tangente à la courbe est la droite d'équation $y - 1 = a(x - 1)$. La convexité entraîne que $G(1 + t) - 1 - at \geq 0$ pour tout t réel. En outre, la courbe s'écarte plus ou moins lentement de sa tangente selon que la courbure de la courbe est plus ou moins prononcée.

Le cas particulier que nous avons traité précédemment en détail avait le privilège que la fonction génératrice y était une fonction homographique; les fonctions homographiques sont particulièrement faciles à itérer: en itérant un nombre quelconque de fois une fonction homographique, on a toujours une fonction homographique; alors qu'en itérant un polynôme, même aussi simple que $x^2 + x$, on obtient des polynômes de plus en plus en plus complexes, car le degré double à chaque itération.

Pour montrer la convergence de la suite des fonctions $Q_n(\zeta)$, nous allons montrer que la *série* de terme général $Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)$ est convergente (du moins pour ζ assez petit), en la majorant par une série géométrique. Si la suite des fonctions $Q_n(\zeta)$ converge dans un disque $|\zeta| < \rho$, aussi petit soit-il, le principe du prolongement analytique fera le reste. En effet, il nous faut simplement légitimer les calculs effectués plus haut en vue d'obtenir le début de la série entière de $Q(\zeta)$, et pour cela un disque, même petit, suffit. Mais pour majorer $Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)$, il nous faut des encadrements *itérables*. Nous avons déjà la minoration $F(t) \geq at$ (pour t réel), due à la convexité, qui par itération donne $F_n(t) \geq a^n t$, si on appelle $F_n = F \circ F \circ F \cdots \circ F$ la n^{e} itérée de F . Pour avoir une majoration il est indiqué d'utiliser une fonction homographique plutôt qu'un polynôme: on peut choisir un coefficient α tel

que

$$F(t) \leq \frac{at}{1 - \alpha t}$$

de telle sorte que par itération on obtienne des inégalités de la forme

$$F_n(t) \leq \frac{\beta_n t}{1 - \alpha_n t}$$

En *effectuant* les itérations on constate que β_n doit être égal à a^n , et pour les α_n on trouve des expressions compliquées, mais qui peuvent être majorées par $\alpha a^n / (a - 1)$, de sorte que tout peut être résumé par

$$F_n(t) \leq \frac{a^n t}{1 - \frac{\alpha a^n t}{a - 1}} \quad (VIII.15.)$$

L'encadrement de $F_n(t)$ ainsi obtenu (voir figure 19) permettra de montrer que la suite $Q_n(\zeta) = F_n(\zeta/a^n)$ converge, ce qui légitimera les calculs heuristiques que nous avons effectués plus haut pour obtenir des développements limités et autres algorithmes pour le calcul de $Q(\zeta)$

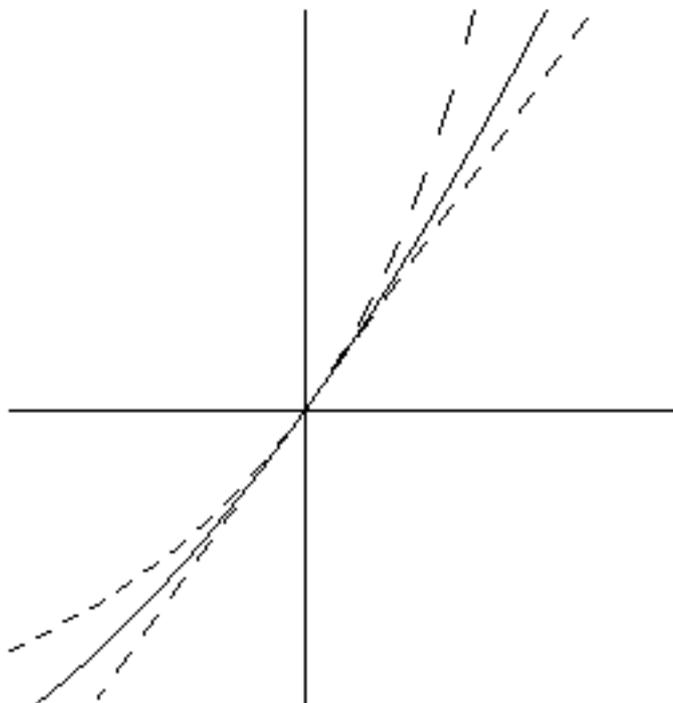


figure 19.

Processus en cascade

Il est bien clair que la fonction $F(w) = G(1 + w) - 1$ de la variable complexe w a, tout comme $G(z)$ elle-même, tous ses coefficients de Taylor positifs; de même la fonction $F(w) - aw$. De sorte que

$$\begin{aligned} |F(w)| &\leq F(|w|) \\ |F(w) - aw| &\leq F(|w|) - a|w| \\ |F(w') - F(w)| &\leq |w' - w| F'(t_0) \quad \text{si } |w'| \leq t_0 \text{ et } |w| \leq t_0 \end{aligned} \tag{VIII.16.}$$

La troisième de ces inégalités devient aussi compréhensible que les deux premières dès lors qu'on applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto F(w + t(w' - w))$ et qu'on tient compte du fait que les coefficients de Taylor de la fonction dérivée $F'(w)$ sont tous positifs.

En ce qui concerne les itérées, on aura aussi les inégalités

$$\begin{aligned} |F_n(w)| &\leq F_n(|w|) \\ \left| F_{n+1}\left(\frac{w}{a^{n+1}}\right) - F_n\left(\frac{w}{a^n}\right) \right| &\leq \left| F_n\left(\frac{w}{a^{n+1}}\right) - F_{n-1}\left(\frac{w}{a^n}\right) \right| \times F'(t_0) \end{aligned}$$

On obtient en effet la seconde de ces inégalités en remplaçant dans la troisième des inégalités (VIII.16) w' par $F_n(w/a^{n+1})$ et w par $F_{n-1}(w/a^n)$; il suffit que t_0 soit plus grand que les modules de ces deux nombres.

On peut alors répéter le processus et faire une récurrence descendante, qui donnera

$$\left| F_{n+1}\left(\frac{w}{a^{n+1}}\right) - F_n\left(\frac{w}{a^n}\right) \right| \leq \left| F\left(\frac{w}{a^{n+1}}\right) - \frac{w}{a^n} \right| \times F'(t_0)^n$$

Cela est valide pourvu que les modules des nombres complexes $F_{j+1}(w/a^j)$ soient tous, pour j variant de 0 à $n - 1$, inférieurs à t_0 : c'est en effet la condition pour que l'inégalité puisse être utilisée pour les indices compris entre 1 et n .

Or nous avons vu (VIII.15) que

$$F_j(t) \leq \frac{a^j t}{1 - \frac{\alpha a^j t}{a - 1}}$$

par conséquent, pour que $|F_{j+1}(w/a^j)|$ soit inférieur à t_0 pour tous les j entre 0 et $n - 1$, il suffit de prendre

$$t_0 = \frac{|w|}{a - \frac{\alpha |w|}{a - 1}}$$

En effet, pour $0 \leq j \leq n - 1$ on a $n - j \geq 1$, donc

$$\frac{|w|}{a - \frac{\alpha |w|}{a - 1}} \geq \frac{|w|}{a^{n-j} - \frac{\alpha |w|}{a - 1}} \geq F_{j+1}\left(\frac{w}{a^n}\right)$$

Cela revient à dire que, si t_0 est fixé par ailleurs (et nous verrons plus loin qu'il faudra le choisir), l'inégalité ci-dessus sera vérifiée pour tous les w tels que

$$|w| < \frac{a t_0}{1 + \frac{\alpha t_0}{a - 1}} = \rho$$

Nous avons ainsi établi l'inégalité

$$|Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)| \leq \left| F\left(\frac{\zeta}{a^{n+1}}\right) - \frac{\zeta}{a^n} \right| \times F'(t_0)^n \quad (VIII.17.)$$

Mais par ailleurs, puisque la fonction $F(w) - aw$ possède la propriété que tous ses coefficients de Taylor sont positifs, on a aussi

$$\left| F\left(\frac{\zeta}{a^{n+1}}\right) - \frac{\zeta}{a^n} \right| \leq F\left(\frac{|\zeta|}{a^{n+1}}\right) - \frac{|\zeta|}{a^n} \leq \frac{a^{-n} |\zeta|}{1 - \frac{\alpha a^{-n} |\zeta|}{a - 1}} - a^{-n} |\zeta| \quad (VIII.18.)$$

D'autre part pour tout t on a l'identité

$$\frac{t}{1 - \frac{\alpha t}{a - 1}} - t = \frac{\alpha t^2}{a - 1 - \alpha t}$$

donc en prenant $t = a^{-n} |\zeta|$, on peut déduire de (VIII.17) et (VIII.18) que pour tout ζ tel que $|\zeta| < \rho$ et pour tout entier n :

$$|Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)| \leq \frac{\alpha |\zeta|^2 a^{-2n} F'(t_0)^n}{a - 1 - \alpha |\zeta| a^{-n}}$$

Puisque $a > 1$ il est clair que, quelle que soit la valeur de ρ , le dénominateur de l'avant-dernière expression ci-dessus deviendra supérieur à $(a - 1)/2$ à partir d'un certain rang n_0 (dès que a^{-n} sera devenu inférieur à $(a - 1)/2\alpha\rho$). Donc pour $n \geq n_0$ on aura

$$|Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)| \leq \frac{2\alpha\rho^2}{a - 1} \times \left[\frac{F'(t_0)}{a^2} \right]^n \quad (VIII.19.)$$

Il suffit donc de prendre t_0 tel que $F'(t_0) < a^2$ pour que la suite Q_n converge à l'intérieur du disque $|\zeta| < \rho$. La limite $Q = \lim Q_n$ sera donc au moins

Processus en cascade

définie et analytique dans ce disque ; mais bien entendu, il se peut qu'elle se prolonge analytiquement au-delà. En tous cas, au moins à l'intérieur de ce disque, elle sera la somme d'une série entière convergente. Cela légitime les calculs que nous avons faits plus haut, pour obtenir les premiers coefficients de cette série entière.

Tout au long de ces chaînes logiques, nous avons utilisé, pour les fonctions $G(z)$, $G'(z)$, $F(w)$, $F'(w)$, etc., la propriété typique des fonctions *absolument monotones*, à savoir que, leurs coefficients de Taylor étant tous positifs, on a $|G(z)| \leq G(|z|)$, $|G'(z)| \leq G'(|z|)$, $|F(w)| \leq F(|z|)$, $|F'(w)| \leq F'(|z|)$, etc.

Ainsi, nous venons d'établir que la fonction $Q(\zeta)$ était analytique au moins dans le disque $|\zeta| < \rho$ avec

$$\rho = \frac{a t_0}{1 + \frac{\alpha t_0}{a - 1}}$$

où t_0 est tel que $F'(t_0) < a^2$. On peut même prendre t_0 tel que $F'(t_0) = a^2$; cela ne changerait rien, puisque si $F'(t_0) = a^2$, alors pour tout nombre $t_1 < t_0$, on aura $|F'(t_1)| < a^2$, et ρ est une fonction strictement croissante de t_0 . Mais on voit que ce disque de convergence est limité : par exemple la présence d'un point singulier de la fonction $G(z)$ à proximité du disque $|z| < 1$ aura pour effet de rendre ce disque très petit.

Or, la fonction caractéristique asymptotique $\Phi(t)$ que nous cherchons à déterminer (qui est, rappelons-le, la limite des fonctions caractéristiques $\Phi_n(a^{-n}t)$ des variables aléatoires Z_n/a^n) est égale à $1 + Q(it)$; on a

$$\Phi_n(a^{-n}t) = G_n(e^{ia^{-n}t})$$

et pour tout t réel, $e^{ia^{-n}t}$ est de module 1, donc $G'(e^{ia^{-n}t})$ est inférieur ou égal à $G'(1) = a$ en module, ce qui est évidemment plus intéressant que de pouvoir dire seulement que $|G'|$ est inférieur à a^2 . Cela a, comme nous allons le voir maintenant, une conséquence pratique : les fonctions caractéristiques $\Phi_n(a^{-n}t)$, du fait qu'elles ne prennent en compte que les valeurs complexes de module 1 pour la variable z dont dépend $G(z)$, convergent (lorsque n tend vers l'infini) pour tout t réel, et non pas seulement dans un disque. Ou encore : la série de Taylor de la fonction $Q(\zeta)$ ne converge, du moins en général, que dans un disque de rayon limité, mais elle se prolonge analytiquement jusqu'à l'infini dans un voisinage de l'axe imaginaire $\zeta = it$; en effet la relation entre t et ζ est $\zeta = a^n (e^{ia^{-n}t} - 1)$. Une troisième façon de dire cela : la fonction $Q(\zeta)$ peut avoir des points singuliers qui limitent la

taille de son disque de convergence, mais ces points sont toujours en dehors de l'axe $\zeta = it$, de sorte que la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(a^{-n}t) = 1 + Q(it)$$

est vraie pour tout t réel. Il ne reste plus qu'à le démontrer.

Pour calculer les coefficients de Taylor de la fonction $Q(\zeta)$, il avait été beaucoup plus commode de partir de la fonction $F(w) = G(1+w) - 1$, car celle-ci (du fait que la série de F n'a pas de terme constant) permettait d'obtenir pour les coefficients successifs un système triangulaire permettant une récurrence.

Par contre, pour mettre en évidence que Q est analytique dans un domaine allongé contenant l'axe des ζ imaginaires, il est préférable d'employer la fonction $G(z)$. Nous allons donc montrer, tout comme nous l'avons fait pour la suite de fonctions Q_n , que la série des $|\Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t)|$ converge *pour tout t réel*, en la majorant à nouveau par une série géométrique.

Partons donc de l'inégalité générale

$$|G(x) - G(y)| \leq |x - y| G'(r)$$

qui a lieu pour n'importe quels nombres complexes x et y dont le module est inférieur ou égal à r (inutile de la redémontrer). Donc

$$\begin{aligned} |\Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t)| &= \left| G_{n+1}(e^{ia^{-(n+1)}t}) - G_n(e^{ia^{-n}t}) \right| \\ &= \left| G\left(G_n(e^{ia^{-(n+1)}t})\right) - G\left(G_{n-1}(e^{ia^{-n}t})\right) \right| \\ &\leq \left| G_n(e^{ia^{-(n+1)}t}) - G_{n-1}(e^{ia^{-n}t}) \right| \times G'(1) \end{aligned}$$

car les nombres complexes $x = G_n(e^{ia^{-(n+1)}t})$ et $y = G_{n-1}(e^{ia^{-n}t})$ sont tous deux de module ≤ 1 . On peut répéter le procédé (par récurrence descendante), car les nombres $G_{n-j}(e^{ia^{-n}t})$ sont tous de module ≤ 1 . On obtient ainsi

$$|\Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t)| \leq \left| G(e^{ia^{-(n+1)}t}) - e^{ia^{-n}t} \right| \times a^n$$

Tout comme nous l'avons fait avec la fonction $F(w)$, il s'agit maintenant de majorer l'expression $|G(e^{i(\theta/a)}) - e^{i\theta}|$ (on prendra ensuite $\theta = a^{-n}t$). Cela

Processus en cascade

est aisé, si on utilise le développement limité de l'exponentielle déjà employé au chapitre **VII**: $e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + R(\alpha)$, avec $|R(\alpha)| \leq \alpha^2/2$.

$$\begin{aligned} \left| G\left(e^{i(\theta/a)}\right) - e^{i\theta} \right| &= \left| \sum_{k \geq 0} p_k \left[1 + ik \frac{\theta}{a} + R\left(k \frac{\theta}{a}\right) \right] - 1 - i\theta - R(\theta) \right| \\ &= \left| \sum_{k \geq 0} p_k + i \frac{\theta}{a} \sum_{k \geq 0} p_k k + \sum_{k \geq 0} p_k R\left(k \frac{\theta}{a}\right) - 1 - i\theta - R(\theta) \right| \\ &= \left| \sum_{k \geq 0} p_k R\left(k \frac{\theta}{a}\right) - R(\theta) \right| \\ &\leq \frac{\theta^2}{2} \left[\sum_{k \geq 0} p_k \frac{k^2}{a^2} + 1 \right] \end{aligned}$$

Pour la troisième équation ci-dessus, on a utilisé le fait que $a = \sum k p_k$; dans la quatrième ligne, on voit s'introduire le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire Z_1 , à savoir $M_2 = \sum p_k k^2$. En fin de compte :

$$\left| \Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t) \right| \leq \frac{t^2}{2 a^{2n}} \times \left(\frac{M_2}{a^2} + 1 \right) \times a^n = \frac{t^2}{2 a^n} \times \left(\frac{M_2}{a^2} + 1 \right)$$

Ceci montre (puisque $a > 1$) que *pour tout* t la série $\Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t)$ est majorée par une série géométrique de raison $1/a$. Du point de vue mathématique, cette conclusion n'est valable que si la série $\sum p_k k^2$ converge; mais nous avons déjà fait remarquer plus d'une fois que dans les problèmes pratiques les p_k sont toujours nuls à partir d'un certain rang (et surtout dans le cas des neutrons de fission).

Ainsi, pour les valeurs *complexes* de t , la fonction limite $\Phi(t) = 1 + Q(it)$ n'est la somme d'une série entière que dans un disque, mais pour les valeurs *réelles* de t , $\Phi(t)$ est définie sur tout l'intervalle $] -\infty \quad +\infty [$ comme la limite de la suite des fonctions $\Phi_n(a^{-n}t)$.

La question est alors de savoir comment on peut calculer effectivement cette fonction limite $\Phi(t) = 1 + Q(it)$. Nous avons déjà vu comment calculer récursivement les coefficients de Taylor de la fonction $Q(\zeta)$: cet algorithme est efficace pour calculer $Q(\zeta)$, donc en particulier $Q(it)$, pour les petites valeurs de t , mais la petitesse du disque de convergence ne permet pas de le calculer pour les grandes valeurs de t . Pour ces dernières, on utilisera alors l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Q (ou par la fonction Φ) :

$$\begin{aligned} Q(a\zeta) &= F(Q(\zeta)) \\ \Phi(at) &= G(\Phi(t)) \end{aligned} \tag{VIII.20.}$$

En effet, si Q ou Φ est connue au voisinage de zéro, on peut en déduire les valeurs dans un voisinage a fois plus grand en utilisant ces équations fonctionnelles; puis en répétant le processus, dans un voisinage a^2 , puis a^3 , a^4 , ... a^n fois plus grand. Si on procède ainsi avec un nombre complexe ζ quelconque, le procédé finira par diverger lorsqu'on atteindra les bords du domaine d'analyticité; mais ce que nous venons de voir nous garantit que pour t réel on pourra poursuivre aussi loin qu'on voudra⁽²⁾.

On peut par exemple suivre le plan que voici. On calcule d'abord les valeurs de $\Phi(t)$ entre $t = 10^{-5}$ et $t = 10^{-5} \times a$ en utilisant la série entière. Par exemple, on calcule les valeurs en dix points $t_0 = 10^{-5}$, $t_1 = 10^{-5} \times [1 + 0.1(a-1)]$, $t_2 = 10^{-5} \times [1 + 0.2(a-1)]$, $t_3 = 10^{-5} \times [1 + 0.3(a-1)]$, ... $t_{10} = 10^{-5} \times a$. Ou bien $t_0 = 10^{-5}$, $t_1 = 10^{-5} \times a^{0.1}$, $t_2 = 10^{-5} \times a^{0.2}$, $t_3 = 10^{-5} \times a^{0.3}$, ... $t_{10} = 10^{-5} \times a$. Ensuite, on calcule les valeurs en $t_{11} = a t_1$, $t_{12} = a t_2$, $t_{13} = a t_3$, ... $t_{21} = a^2 t_1$, $t_{22} = a^2 t_2$, $t_{23} = a^2 t_3$, ... Si le choix de 10^{-5} ne convient pas, soit que les intervalles agrandis sont trop grossiers, soit que le disque de convergence est trop petit, on prendra 10^{-6} ou 10^{-7} .

On trouvera en fin de chapitre un programme écrit en langage PASCAL, qui calcule la fonction $\Phi(t)$ par ce procédé, pour toute donnée de la loi initiale de Z_1 . Les calculs effectués à l'aide de ce programme sont montrés sur les figures 21, 22, et 23.

Enfin, lorsque la fonction caractéristique asymptotique Φ est connue (par exemple par le calcul numérique), on peut reconstituer la densité limite en effectuant une transformation de Fourier inverse. Il faut cependant prendre en compte deux choses.

a) La probabilité (non nulle lorsque $a = G'(1) > 1$) de l'extinction ultime, qui est égale à x_0 , l'unique racine < 1 de l'équation $G(x) = x$. La loi de probabilité de Z_n pour n grand est en effet composée de deux parties: d'une part la valeur zéro qui a une probabilité x_0 non infinitésimale, et d'autre part un nombre énorme de valeurs entières distribuées entre 0 et N^n (N étant la plus grande des valeurs prises par Z_1), ayant chacune une probabilité infinitésimale, mais totalisant la probabilité restante $1 - x_0$. C'est bien sûr la deuxième partie qui est adéquatement décrite par la densité, tandis que la première partie reste discrète. Ainsi x_0 est la probabilité de zéro, et la transformée de Fourier inverse de $\Phi(t) - x_0$ donnera le reste de la loi. Convenons d'appeler *loi résiduelle* la partie de la loi concernant les valeurs autres que $Z_n = 0$.

b) La transformée de Fourier inverse de $\Phi_n(a^{-n}t) - x_0$ donnera la loi résiduelle discrète exacte. La densité de cette loi résiduelle exacte s'obtiendra en effectuant un lissage de cette loi discrète; mais comme on a vu au chapitre

⁽²⁾ Ce que nous venons de voir présupposait que $M_2 = \sum p_k k^2$ ne soit pas infini; cela revient à supposer que la fonction $G(x)$ est dérivable à l'ordre deux en $x = 1$.

VII, le simple fait de calculer, non pas l'intégrale

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(t) - x_0] e^{-ixt} dt$$

complète, sur tout l'intervalle de $-\infty$ à $+\infty$, mais seulement sur un intervalle fini $-A, +A$, équivaut à un lissage de la loi par le filtre passe-bas $\rho(x) = \sin(Ax)/(\pi x)$, dont la longueur de corrélation est $\varepsilon \sim 1/A$. Or l'écartement entre les valeurs dont on cherche la densité est a^{-n} (il est constant puisque les valeurs de Z_n sont entières). Comme la fonction $\Phi(t)$ a été construite avec le changement d'échelle $\Phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(a^{-n}t)$, il suffit donc de prendre $a^n \gg A \gg 1$ pour avoir le lissage correct.

On peut donc dire que la loi asymptotique de Z_n est entièrement déterminée par la connaissance de x_0 (probabilité que $Z_n = 0$) et de la densité f , de sorte que pour $0 < a < b$, n grand, et $b - a \gg a^{-n}$:

$$\mathcal{P}(Z_n = 0) \simeq x_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}\left(a < \frac{Z_n}{a^n} < b\right) \simeq \int_a^b f(x) dx$$

La transformée de Fourier de la loi discrète exacte est la fonction caractéristique complète de Z_n , donnée sur tout l'intervalle $-\infty < t < +\infty$:

$$\Phi(t/a^n) = x_0 + \sum_1^{k_m a x} p_k e^{itk/a^n} \simeq \Phi(t) \quad (VIII.21.)$$

Par conséquent, la loi résiduelle discrète exacte de $a^{-n}Z_n$ (pour n grand) est la transformée de Fourier inverse de $\Phi(t) - x_0$, tandis que la densité f sera donnée, en prenant A tel que $a^n \gg A \gg 1$, par l'intégrale

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{+A} [\Phi(t) - x_0] e^{-ixt} dt \quad (VIII.22.)$$

Remarque. Il est sans doute utile ici de rappeler ceci : l'intégrale VIII.22 est forcément convergente puisque ses bornes sont finies ; si on prenait des bornes infinies, elle serait divergente, ce qui est logique puisque la loi est discrète ; il faut considérer la transformée de Fourier inverse de $\Phi(t) - x_0$ au sens des distributions par exemple ; mais le lecteur de ce livre peut ignorer complètement cette subtilité, puisque seule nous intéresse la densité de la loi discrète, et que celle-ci est donnée par l'intégrale convergente VIII.22.

La formule VIII.22 fournit donc un procédé numérique — on peut utiliser n'importe quel algorithme de transformation de Fourier — pour déterminer f à partir de la fonction caractéristique asymptotique Φ , supposée obtenue par les procédés indiqués précédemment. Bien entendu la probabilité x_0 s'obtiendra en cherchant la racine de l'équation $G(x_0) = x_0$ par itérations (méthode de Newton).

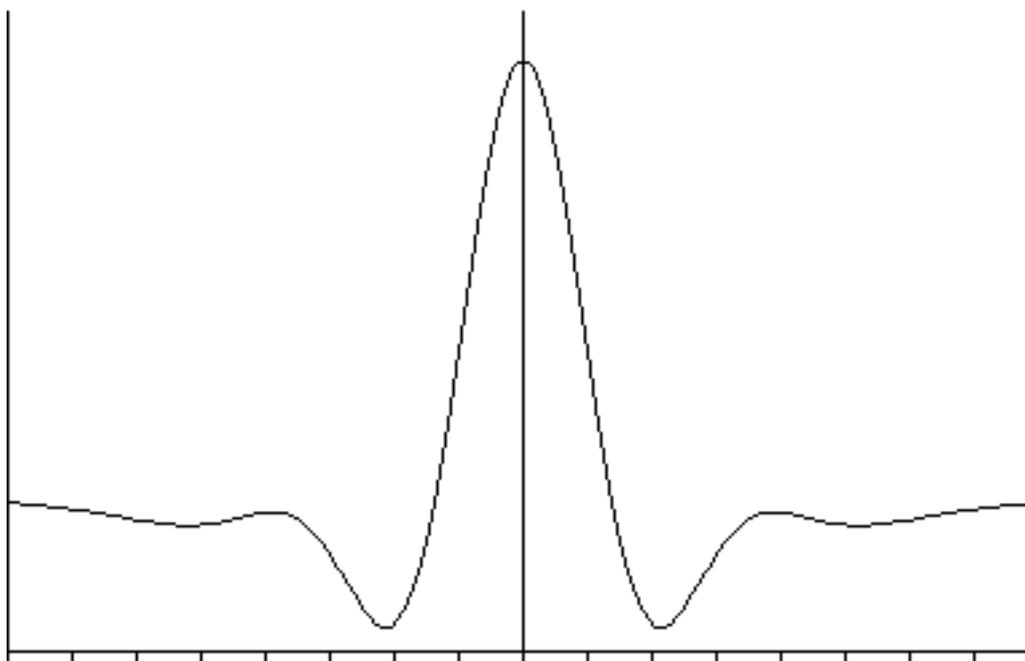


figure 20.

Ce graphique représente la partie réelle de la fonction caractéristique asymptotique $\Phi(t)$ de la loi $p_0 = \frac{1}{9}$; $p_1 = \frac{2}{9}$; $p_2 = 0$; $p_3 = \frac{2}{3}$, dont la moyenne est $a = 2.22$. Il s'agit donc de la limite, lorsque n tend vers l'infini, des fonctions $\Phi_n(t) = G_n(e^{ia^{-n}t})$, avec $G(z) = (1 + 2z + 6z^3)/9$. Ce graphique a été obtenu avec 9 itérations, c'est donc le graphique de $G_9(e^{ia^{-9}t})$ (on n'obtient pas un meilleur graphique en itérant davantage, car le gain en précision devient alors inférieur à la définition de l'imprimante).

Cette fonction contient toute l'information utile sur la distribution de probabilité de la variable aléatoire Z_n pour n grand, c'est-à-dire qu'elle décrit la situation statistique limite de la fission après un certain temps de relaxation. Elle n'est pas la fonction caractéristique d'une loi de probabilité discrète, mais d'une loi asymptotique: la loi limite de Z_n/a^n lorsque n tend vers l'infini. Nous avons vu que cette loi limite comporte une partie discrète (la probabilité que $Z_n = 0$, égale à x_0 , la racine de l'équation $G(x) = x$) et une densité continue qui décrit la distribution en probabilité des valeurs non nulles. On constate que le graphique est formé d'une partie centrale avec un maximum accentué (toutes les fonctions caractéristiques sont maximum en $t = 0$ et ce maximum vaut toujours 1), et d'une partie plate sur les bords, qui correspond au fait que la limite de la fonction caractéristique asymptotique pour t grand est toujours égale à x_0 .

Processus en cascade

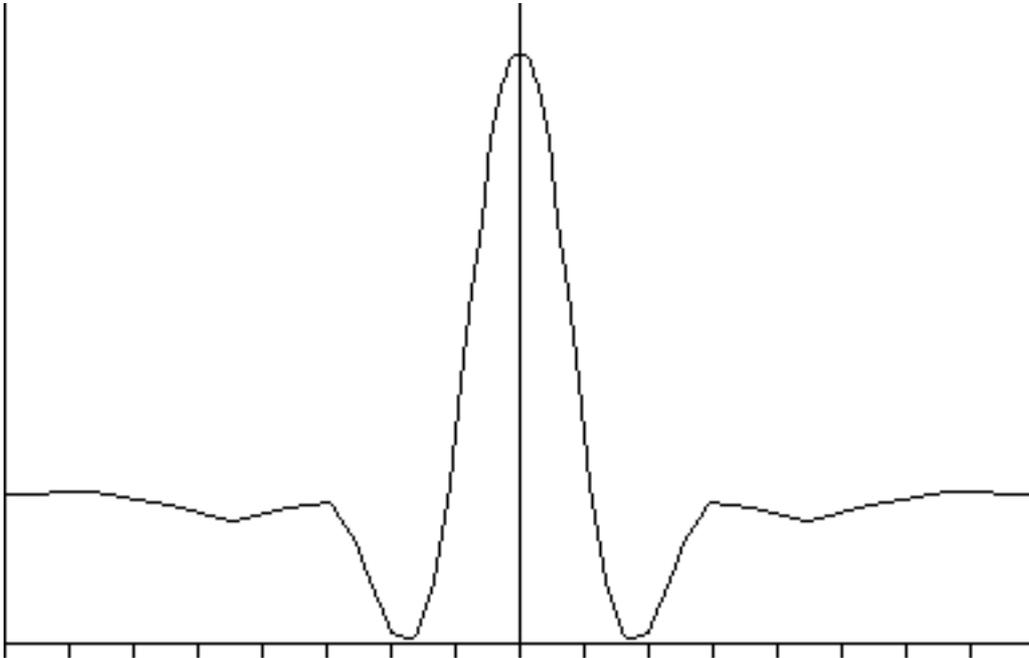


figure 21.

Ce graphique presque identique au précédent a été obtenu avec un algorithme très différent : on a cette fois utilisé les procédés étudiés dans le texte. On a commencé par déterminer les coefficients de la série de Taylor de $Q(\zeta)$; puis on a calculé $Q(it)$ en quatre points très proches de zéro à l'aide de cette série ; enfin, pour les valeurs éloignées de zéro, on a utilisé l'équation fonctionnelle $\Phi(at) = G(\Phi(t))$. On remarque que loin de zéro, la courbe devient une ligne brisée : cela est dû au manque de finesse de la discrétisation, et montre qu'en pratique quatre points initiaux sont insuffisants. C'est pourquoi les deux courbes de la page suivante sont meilleures (elles font appel à huit et seize points initiaux). Mais cet algorithme est bien plus rapide que l'itération directe de la fonction G .

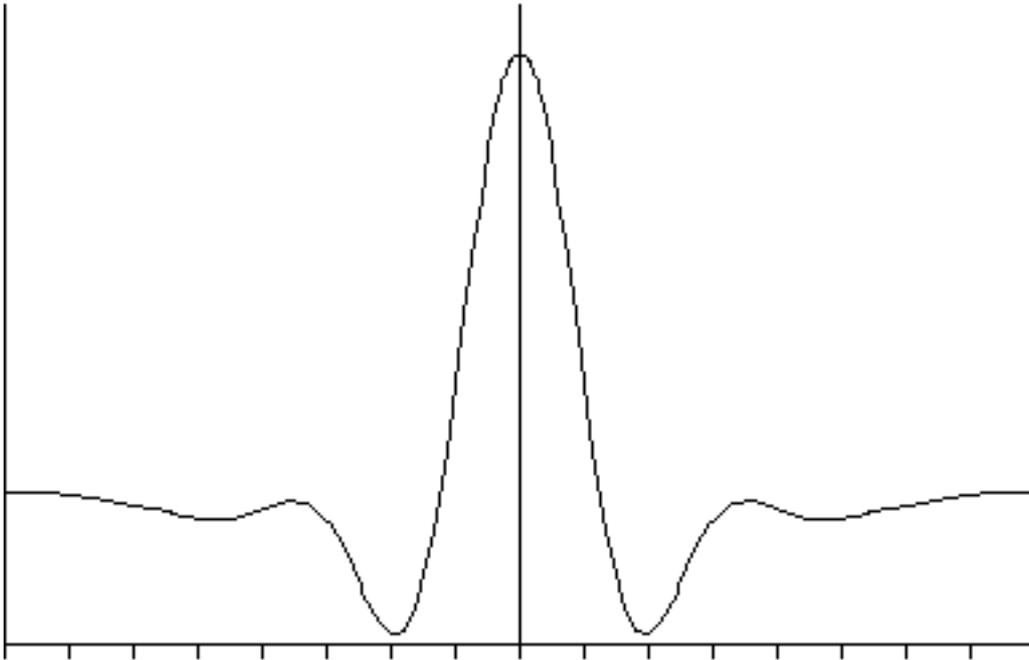


figure 22.

On a amélioré la courbe précédente en prenant 8 points initiaux au lieu de quatre.

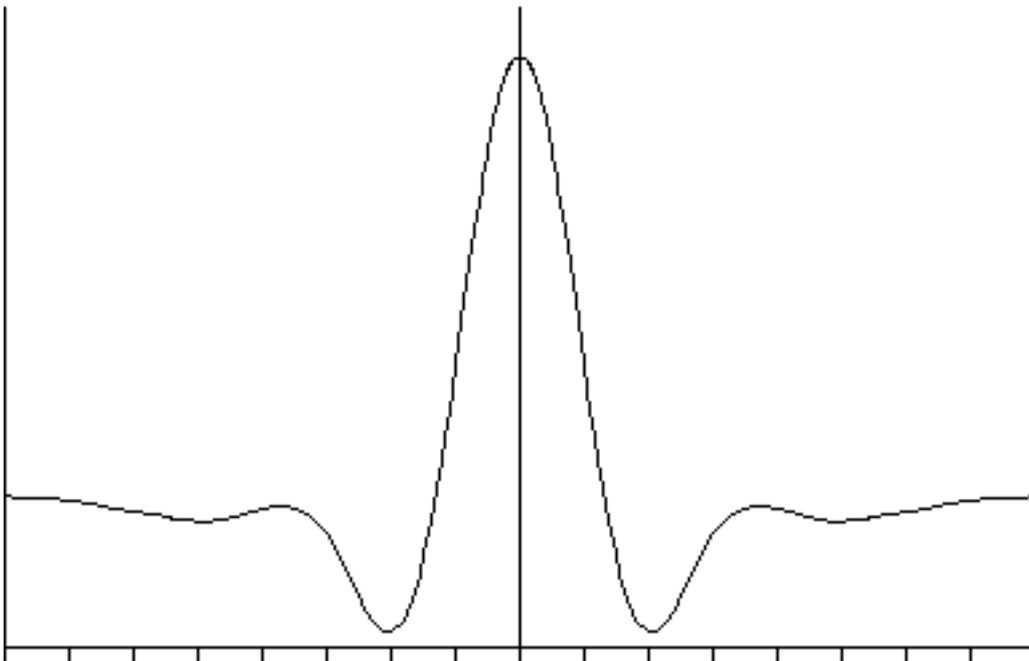


figure 23.

Encore mieux avec 16 points initiaux. Le résultat est maintenant aussi bon qu'avec l'itération, et le calcul bien plus rapide.

Processus en cascade

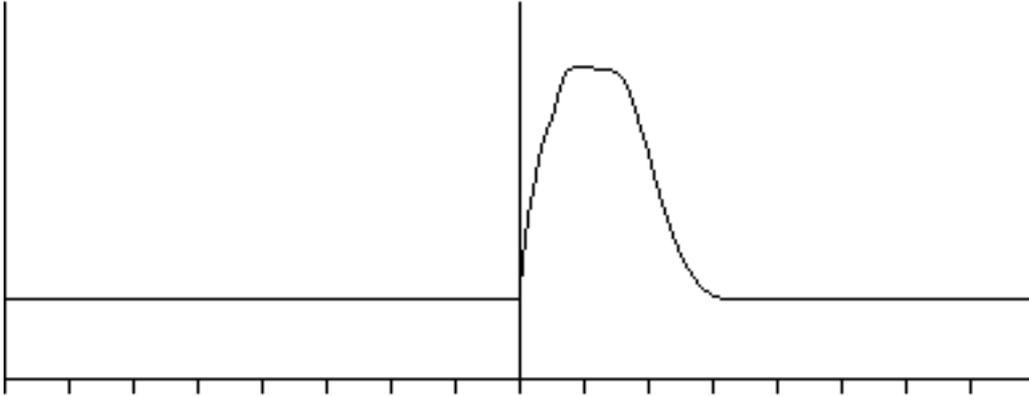


figure 24.

Et voici maintenant la *densité* de la loi limite. Cette densité décrit la distribution en probabilité des valeurs non nulles de $a^{-n}Z_n$ (pour n grand). Si on voulait représenter sur ce même graphique la probabilité discrète que $Z_n = 0$, il faudrait dessiner un pic extrêmement haut et étroit concentré sur l'axe vertical situé au milieu du graphique (cet axe marque l'abscisse zéro).

Le graphique a été obtenu par la *transformée de Fourier inverse*. La fonction caractéristique d'une loi de probabilité est en effet sa transformée de Fourier, on retrouve donc la loi de probabilité à partir de la fonction caractéristique en effectuant l'opération inverse. Mais la densité représentée ci-dessus n'est qu'une partie de la loi, celle qui concerne les valeurs non nulles. Si $f(x)$ est la densité représentée ci-dessus (de sorte que $\mathcal{P}(Z_n = k) = f(k/a^n)$) la fonction caractéristique asymptotique est

$$\Phi(t) = x_0 + \sum_{k \geq 1} f(a^{-n}k) e^{ika^{-n}t}$$

puisque $\mathcal{P}(Z_n = 0) = x_0$, où x_0 est la racine de $G(x_0) = x_0$. Lorsque n est grand la somme devient une intégrale avec $dx = a^{-n}$ et $x = a^{-n}k$:

$$\Phi(t) = x_0 + \int_{x>0} f(x) e^{ixt}$$

ce qui montre que $f(x)$ n'est pas la transformée de Fourier inverse de $\Phi(t)$, mais de $\Phi(t) - x_0$. Un lissage par convolution est effectué automatiquement par le simple fait d'avoir omis les grandes valeurs de t : on s'est bien gardé de calculer l'intégrale de Fourier ci-dessus sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, on s'est limité à la fenêtre graphique de la figure. Comme on l'a vu à la section **3** du chapitre **VII**, cela équivaut à une convolution par un filtre du type $\sin(kx)/x$. C'est pourquoi aucun bruit discret n'apparaît sur la figure ci-dessus. En outre il serait trop fin pour la résolution de l'imprimante.

Les méthodes exposées dans ce chapitre permettent de déterminer la fonction caractéristique asymptotique de $a^{-n}Z_n$; pour obtenir la densité, il suffit ensuite d'effectuer numériquement cette transformée de Fourier inverse.

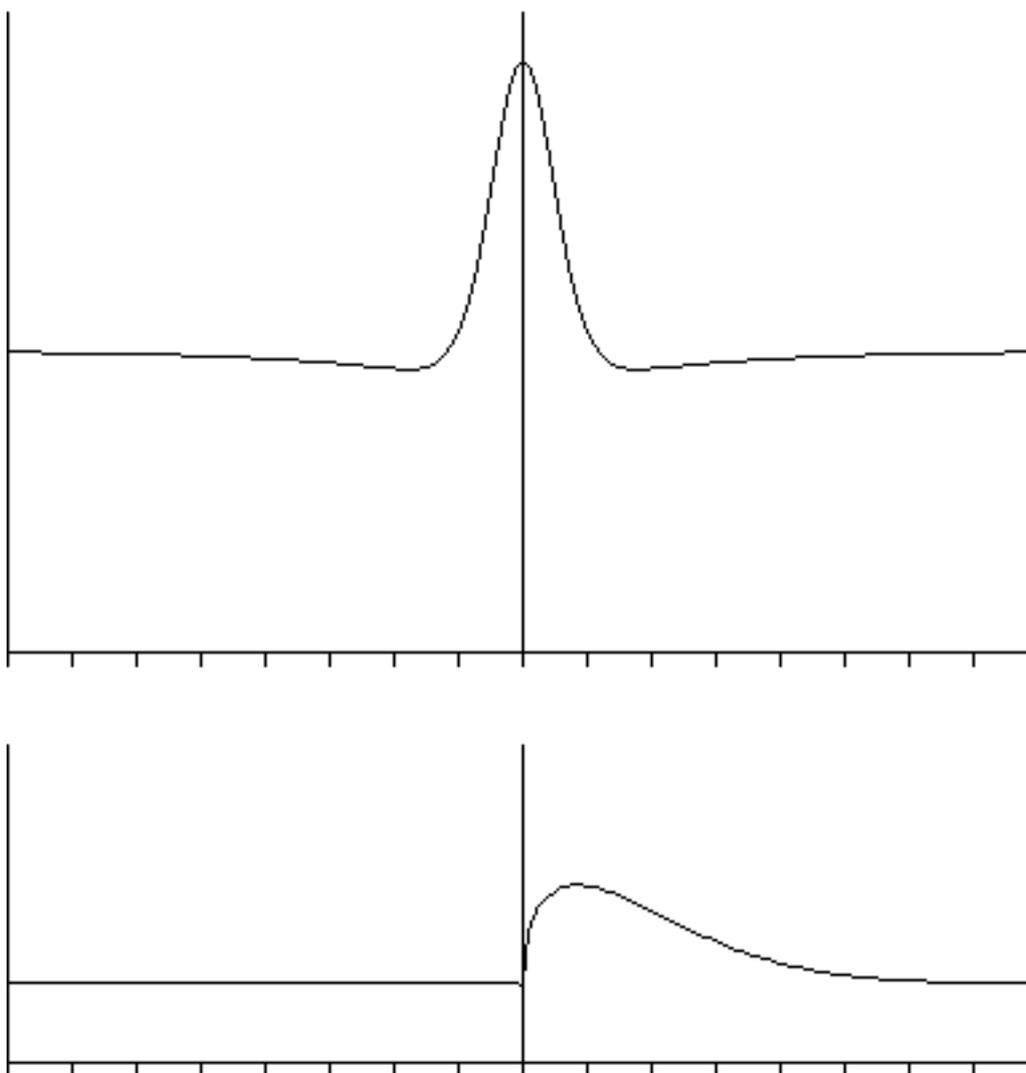


figure 25.

Voici (ci-dessus et pages suivantes) quelques autres exemples de fonctions caractéristiques asymptotiques (graphique du haut) et leurs densités (graphique du bas) pour différentes loi de probabilité initiales: ici, $G(z) = (3 + 2z + z^2 + 4z^3)/10$; la moyenne de Z_1 est donc $a = 1.4$. Pour x_0 , la probabilité que $Z_n = 0$, le calcul donne 0.444 922 417.

On constate que la densité est nulle pour les abscisses négatives, ce qui est normal puisque Z_n ne prend que des valeurs positives. Le maximum de la densité correspond en général à la valeur moyenne de Z_n , soit $k = a^n$. Bien entendu, a^n tend vers l'infini avec n , on choisit donc toujours pour les abscisses une échelle où a^n représente l'unité.

Processus en cascade

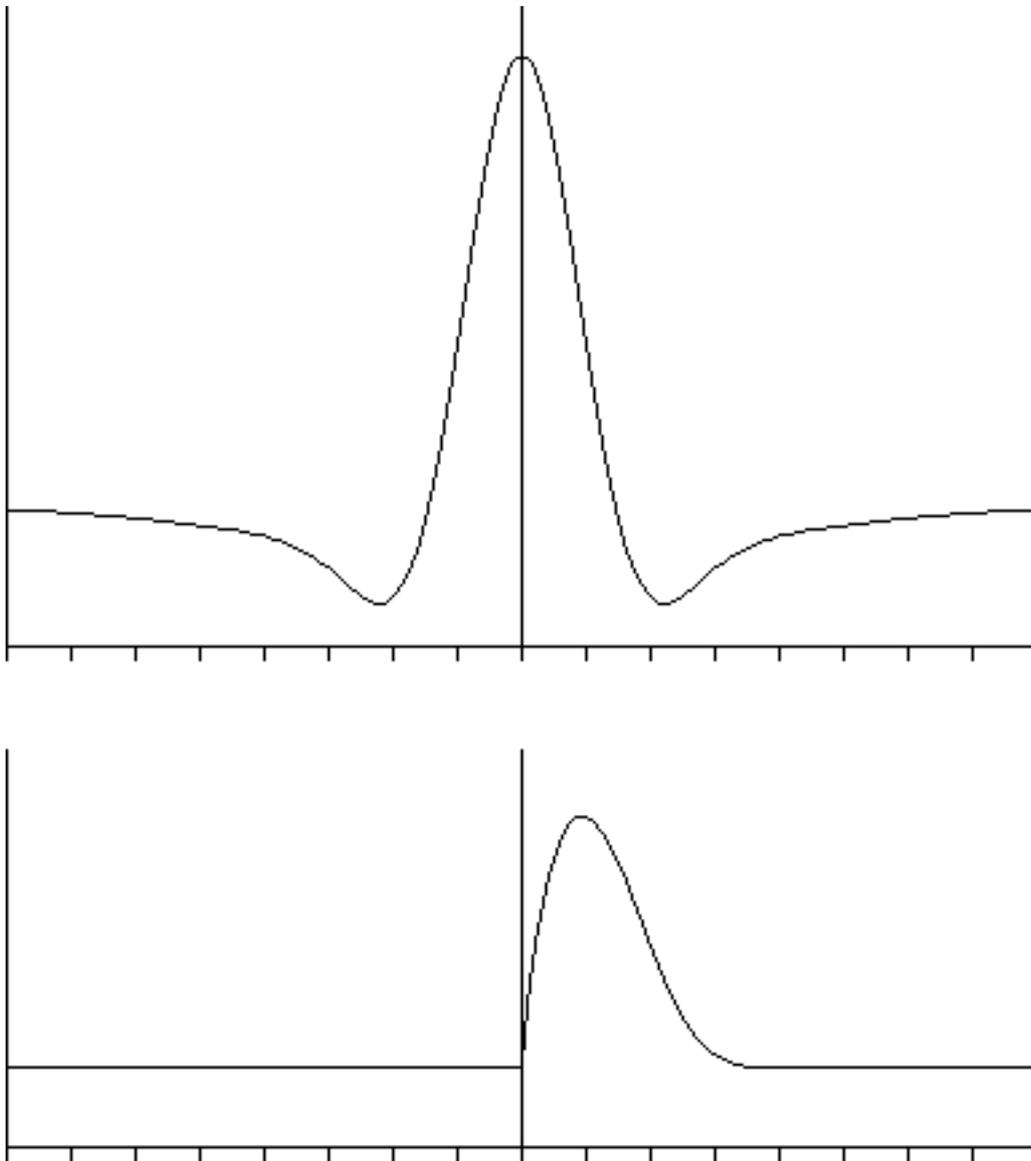


figure 26.

$$G(z) = (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3)/10$$

$$a = 2.00$$

$$x_0 = 0.133\ 726\ 403$$

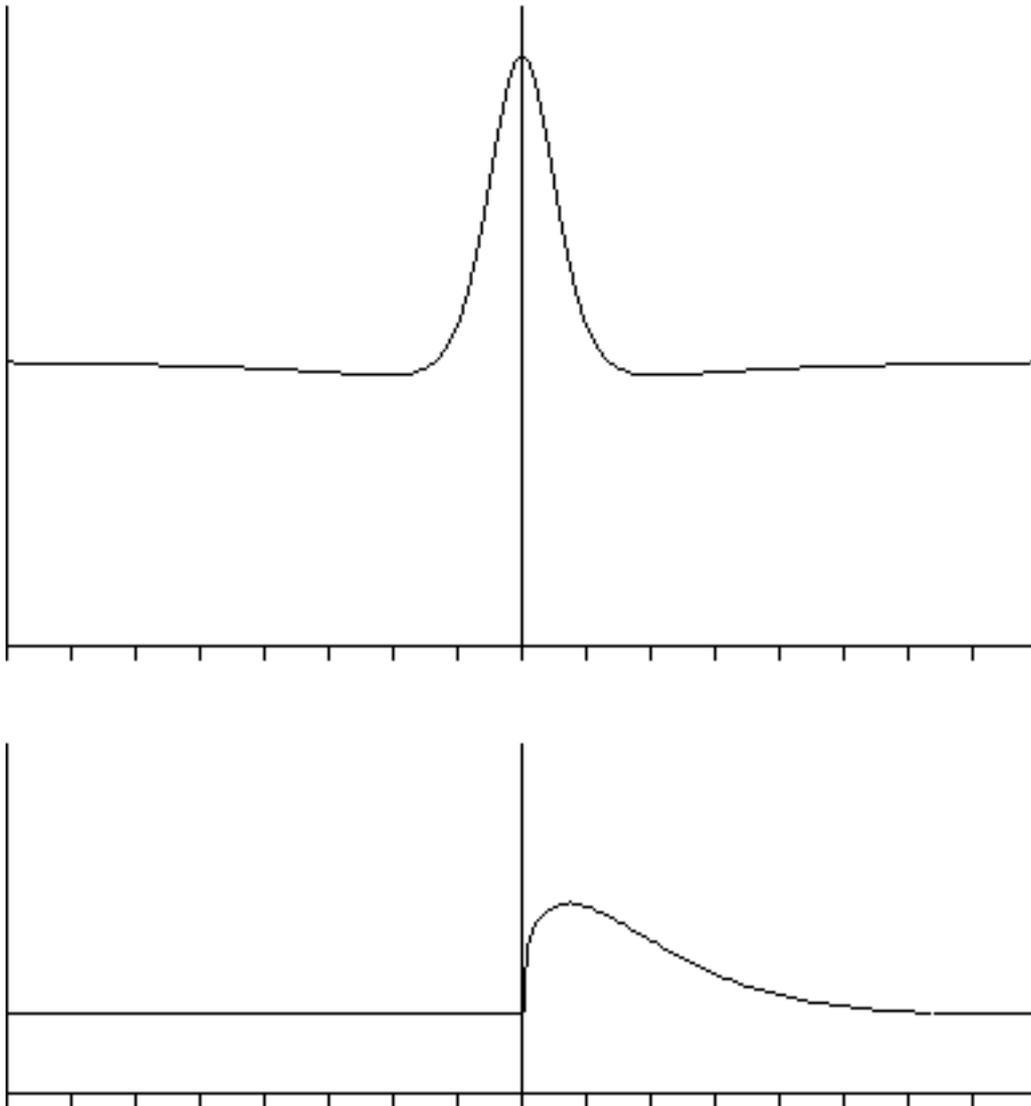


figure 27.

$$G(z) = (1 + z + z^2 + z^3)/4$$

$$a = 1.50$$

$$x_0 = 0.418888986$$

Processus en cascade

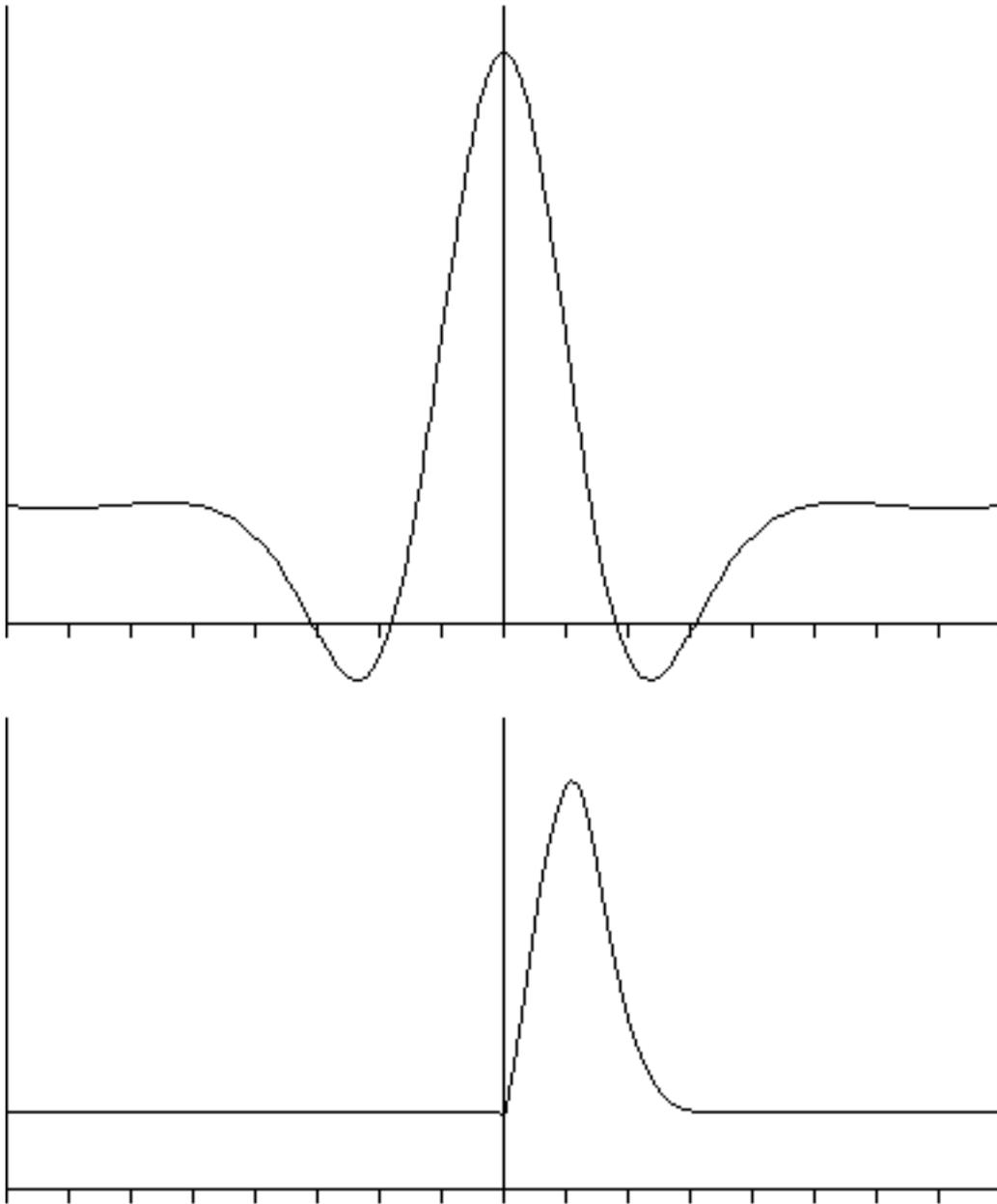


figure 28.

$$G(z) = (1 + z + 7z^2 + 3z^3)/12$$

$$a = 2.00$$

$$x_0 = 0.098\ 950\ 997$$

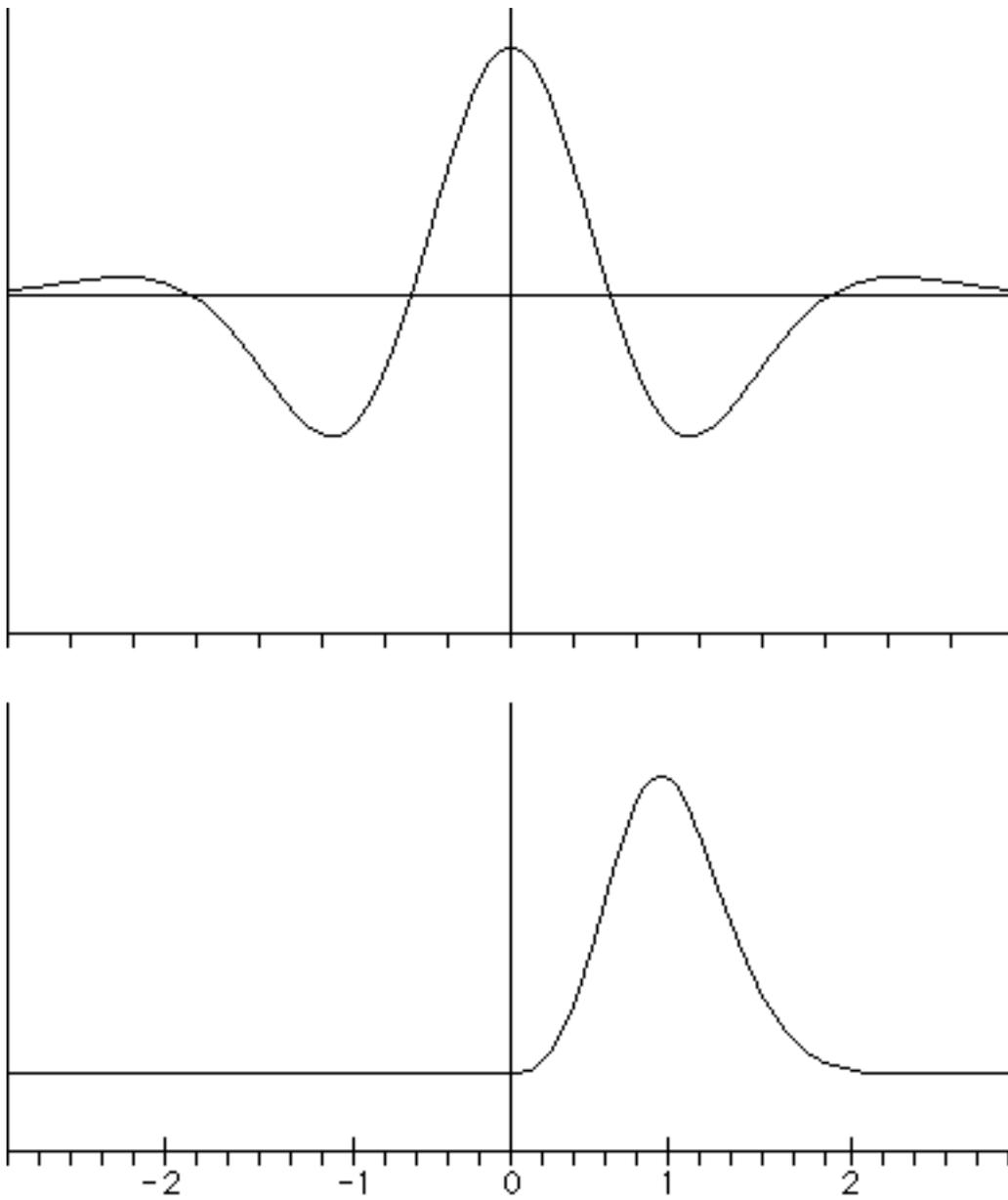


figure 29.

Loi de Poisson de moyenne 9 :

$$G(z) = e^{9(z-1)}$$

$$a = 9.00$$

$$x_0 = 0.000\ 123\ 547$$

Processus en cascade

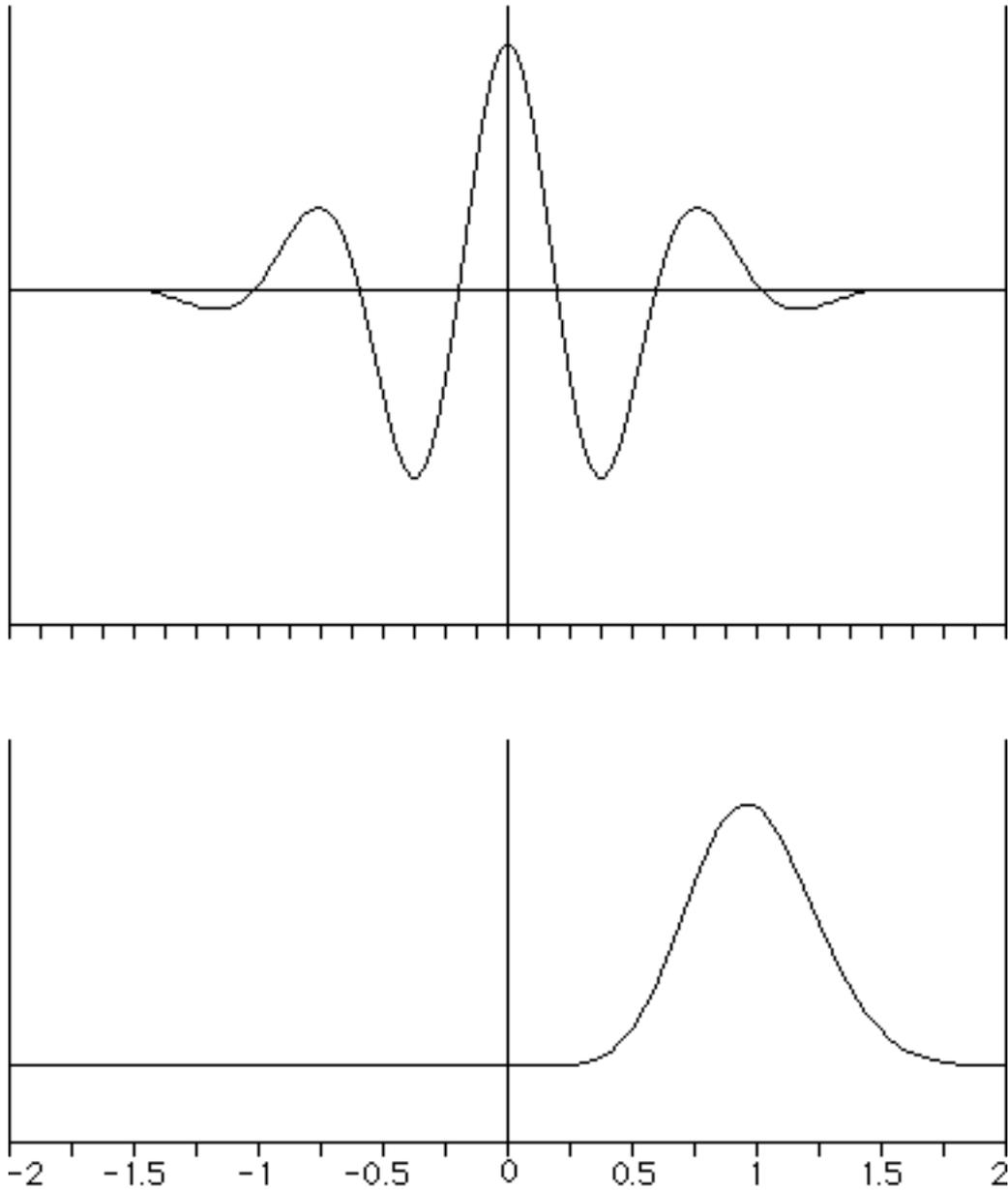


figure 30.

Loi de Poisson de moyenne 19 :

$$G(z) = e^{19(z-1)}$$

$$a = 19.00$$

$$x_0 = 5.6 \cdot 10^{-9}$$

Dans le graphique du haut, les abscisses sont rétrécies d'un facteur $\frac{1}{2}$ par rapport à celui de la page précédente.

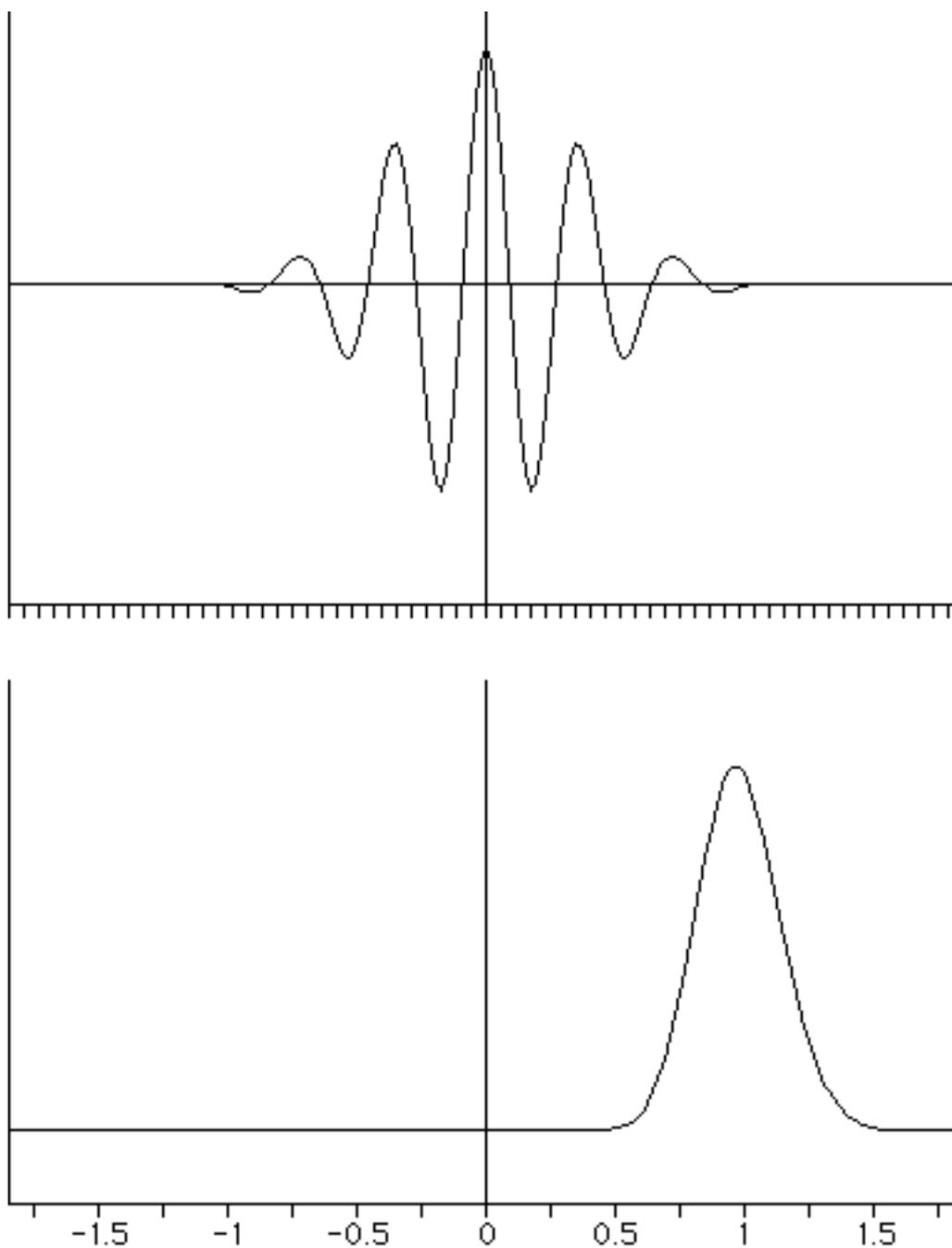


figure 31.

Loi de Poisson de moyenne 39 :

$$G(z) = e^{39(z-1)}$$

$$a = 39.00$$

$$x_0 = 1.2 \cdot 10^{-17}$$

Dans le graphique du haut, les abscisses sont rétrécies d'un facteur $\frac{1}{2}$ par rapport à celui de la page précédente (donc d'un facteur $\frac{1}{4}$ par rapport à celui de la figure 29).

Processus en cascade

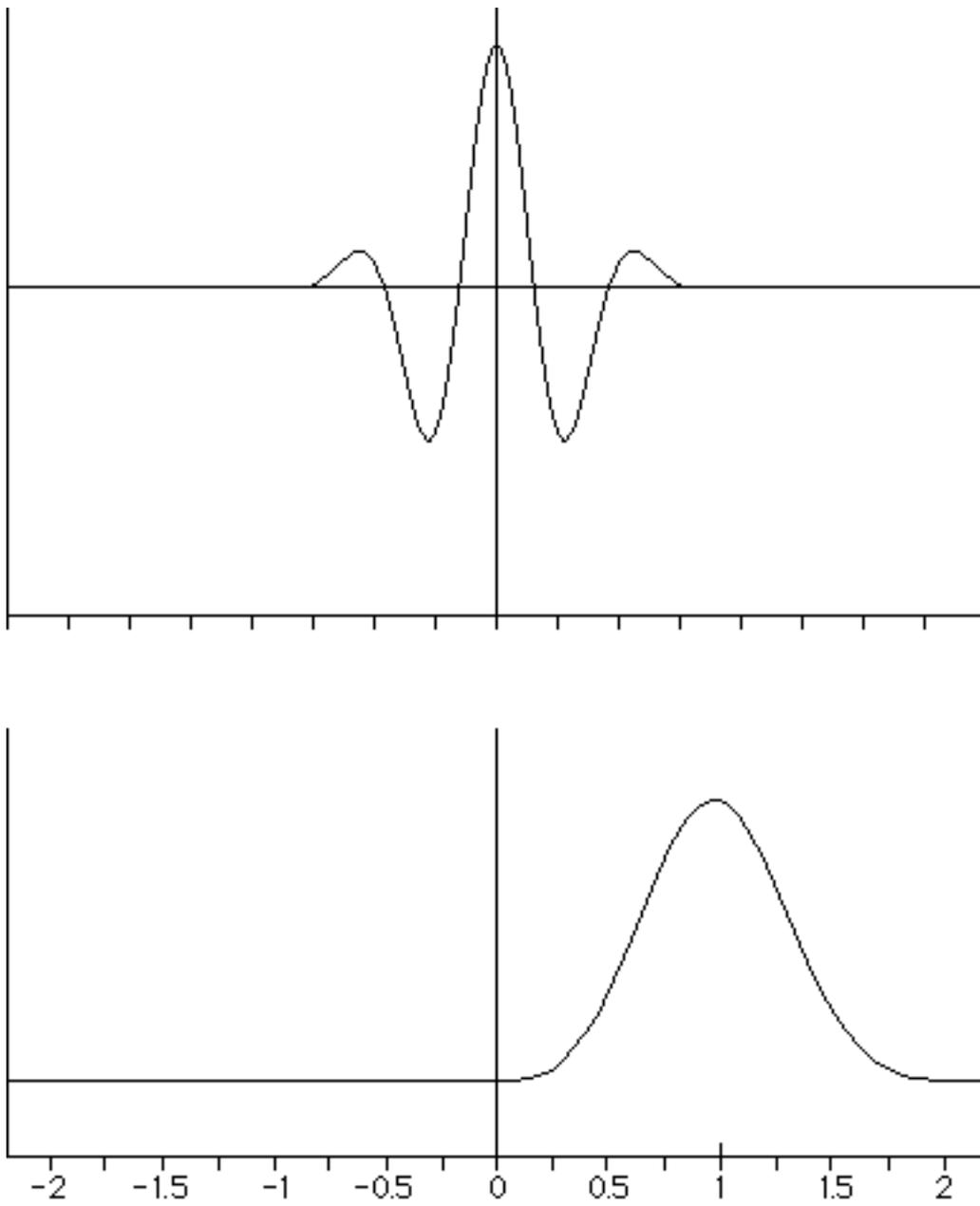


figure 32.

Loi de Bernoulli de moyenne 5 et de degré 9:

$$G(z) = \left(1 + \frac{5}{9}(z - 1)\right)^9$$

$$a = 5.00$$

$$x_0 = 0.000\ 301\ 865$$

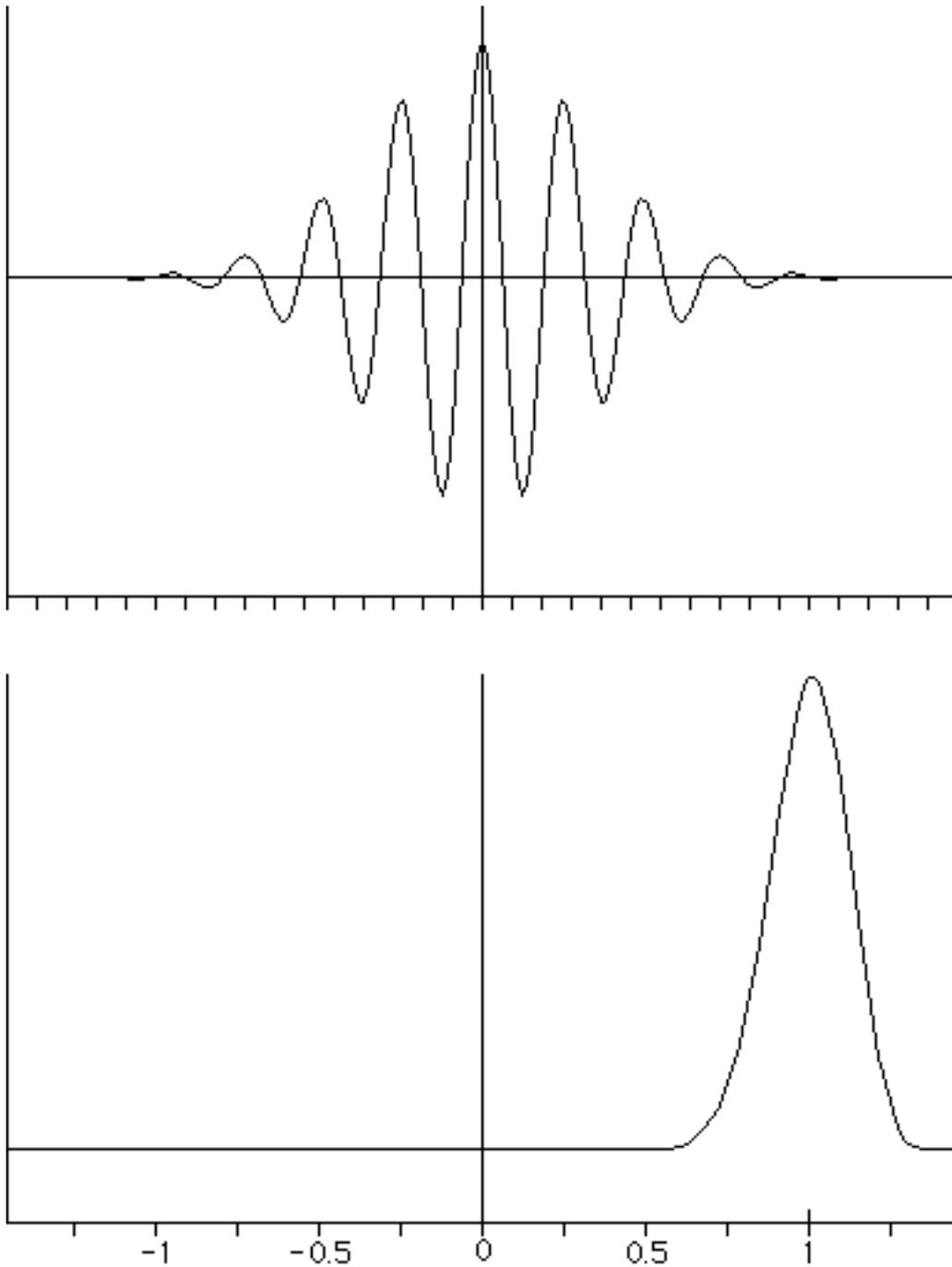


figure 33.

Loi de Bernoulli de moyenne 15 et de degré 19:

$$G(z) = \left(1 + \frac{15}{19}(z - 1)\right)^{19}$$

$$a = 15.00$$

$$x_0 = 2.9 \cdot 10^{-14}$$

Dans le graphique du haut, les abscisses sont rétrécies d'un facteur $\frac{1}{2}$ par rapport à celui de la page précédente.

Processus en cascade

Voici un programme qui calcule la *fonction caractéristique asymptotique* $\Phi(t)$ de la variable aléatoire $a^{-n} Z_n$, en utilisant la méthode développée dans ce chapitre: on calcule d'abord les coefficients q_1, q_2, q_3, \dots de la fonction $Q(\zeta)$, ce qui permet de calculer $\Phi(t) = 1 + Q(it)$ pour de petites valeurs de t ; puis on utilise l'équation fonctionnelle $\Phi(at) = G(\Phi(t))$ pour calculer $\Phi(t)$ pour des valeurs de plus en plus grandes de t . C'est le programme qui a engendré la figure 23.

```
program gener ;
const disc = 16;    ** nombre de points initiaux **

var
a, b, c, d, N, j0, jj, L: integer ;
p, q, x, y, s, t, retemp, imtemp, norm, init, initcour: real ;
q1, q2, q3, q4, a1, a2, a3, apow, t0, x0, y0, lna: real ;
tabj: array [0..disc] of integer ;
tabt, tabx, taby: array [0..disc] of real ;

function rep (u, v: real): real;    ** partie réelle de G **
var
s, t: real ;
begin
t := d * u ;
s := 3 * t + c ;
t := t + c ;
t := t * u + b ;
rep := (a + u * t - s * v * v) / N ;
end ;

function imp (u, v: real): real;    ** partie imaginaire de G **
var
t: real ;
begin
t := d * u ;
t := 3 * t + 2 * c ;
imp := v * (b + u * t - d * v * v) / N ;
end ;

begin
a := 1;    ** a, b, c, d sont les coefficients de G **
b := 2;
c := 0;    ** G(z) = a + b z + c z2 + d z3 **
d := 6;
N := 9;
```

J. Harthong: probabilités et statistique

```
a1 := (b + 2 * c + 3 * d) / N;    ** a1, a2, a3: coefficients de F **
a2 := (c + 3 * d) / N;          ** F(w) = a1 w + a2 w^2 + a3 w^3 **
a3 := d / N;
L := 96;    ** demi-largeur (en pixels) du graphique **
norm := 24;    ** unité (en pixels) sur les abscisses **
init := 0.05;    ** abscisse du point initial **
p := (b + 2 * c + 3 * d) / N;    ** moyenne de la loi **
q := 1;

q1 := 1;    ** calcul itératif des coefficients de Taylor q1, **
apow := a1;    ** q2, q3, q4 de la fonction Q(ζ) **
q2 := a2 / (a1 * (a1 - 1));
apow := apow * a1;
q3 := (2 * a2 * q2 + a3) / (a1 * (apow - 1));
apow := apow * a1;
q4 := (a2 * (q2 * q2 + 2 * q3) + 3 * a3 * q2) / (a1 * (apow - 1));

writeln;    ** affichage **
writeln (N: 1, ': ', a: 1, ',', b: 1, ',', c: 1, ',', d: 1);
writeln;
writeln ('a = ', a1: 4: 2);
writeln;
writeln ('disc = ', disc: 1);

MoveTo (220 + 2 * L, 250);    ** traçage des axes de coordonnées **
LineTo (220 + 2 * L, 10);
MoveTo (220 - 2 * L, 250); LineTo (220 - 2 * L, 10);
MoveTo (220, 255); LineTo (220, 10);
MoveTo (220 - 2 * L, 250); LineTo (220 + 2 * L, 250);

MoveTo (28, 255);    ** traçage des graduations en abscisse **
LineTo (28, 250);
MoveTo (52, 255); LineTo (52, 250);
MoveTo (76, 255); LineTo (76, 250);
MoveTo (100, 255); LineTo (100, 250);
MoveTo (124, 255); LineTo (124, 250);
MoveTo (148, 255); LineTo (148, 250);
MoveTo (172, 255); LineTo (172, 250);
MoveTo (196, 255); LineTo (196, 250);
MoveTo (244, 255); LineTo (244, 250);
MoveTo (268, 255); LineTo (268, 250);
MoveTo (292, 255); LineTo (292, 250);
MoveTo (316, 255); LineTo (316, 250);
MoveTo (340, 255); LineTo (340, 250);
MoveTo (364, 255); LineTo (364, 250);
MoveTo (388, 255); LineTo (388, 250);
```

Processus en cascade

```
MoveTo (412, 255); LineTo (412, 250);
MoveTo (220, 220 - 2 * L);    ** point de départ **
lna:= ln(a1);
t0:= init;
for jj:= 0 to disc do
begin    ** calcul des points initiaux dans tabt **
tabt [jj]:= t0;
j0:= round(norm * t0);
tabj [jj]:= j0;
t0:= t0 * exp(lna / disc);
s:= tabt [jj] * tabt [jj];
tabx [jj]:= 1 + s * (q4 * s - q2);
taby [jj]:= t0 * (q1 - q3 * s);
LineTo (220 + tabj [jj], 220 - round(2 * L * tabx [jj]));
end;

initcour:= init;
while j0 ≤ 2 * L do
begin    **itération à partir de l'équation fonctionnelle **
initcour:= initcour * a1;
t0:= initcour;
for jj:= 0 to disc do
begin
tabt [jj]:= t0;
j0:= round(norm * t0);
tabj [jj]:= j0;
t0:= t0 * exp(lna / disc);
retemp:= rep(tabx [jj], taby [jj]);
imtemp:= imp(tabx [jj], taby [jj]);
tabx [jj]:= retemp;
taby [jj]:= imtemp;
LineTo (220 + tabj [jj], 220 - round(2 * L * tabx [jj]));
end;
end;

MoveTo (220, 220 - 2 * L);

t0:= init;
for jj:= 0 to disc do
begin    ** répétition pour la partie gauche du graphique **
tabt [jj]:= t0;
j0:= round(norm * t0);
tabj [jj]:= j0;
```

```
t0 := t0 * exp(lna / disc);
s := tabt[jj] * tabt[jj];
tabx[jj] := 1 + s * (q4 * s - q2);
taby[jj] := t0 * (q1 - q3 * s);
LineTo (220 - tabj[jj], 220 - round(2 * L * tabx[jj]));
end;

initcour := init;

while j0 ≤ 2 * L do
  begin
    initcour := initcour * a1;
    t0 := initcour;
    for jj := 0 to disc do
      begin
        tabt[jj] := t0;
        j0 := round(norm * t0);
        tabj[jj] := j0;
        t0 := t0 * exp(lna / disc);
        retemp := rep(tabx[jj], taby[jj]);
        imtemp := imp(tabx[jj], taby[jj]);
        tabx[jj] := retemp;
        taby[jj] := imtemp;
        LineTo (220 - tabj[jj], 220 - round(2 * L * tabx[jj]));
      end;
    end;
  end.
```

IX. LOIS DE PROBABILITÉ ASYMPTOTIQUES.

Nous avons rencontré aux chapitres **VII** et **VIII** des situations où apparaissent des lois de probabilité complexes, qu'il est non seulement très difficile, voire impossible d'exprimer analytiquement, mais qu'il est en outre *inutile* ou même nuisible de connaître exactement.

Au chapitre **VII** il s'agissait de la loi d'une somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes. Une telle loi peut bien sûr s'exprimer de manière mathématiquement exacte dans certains cas exceptionnels où les régularités sont très fortes (par exemple la loi binômiale), mais en général elle est dans son détail prodigieusement complexe, chaotique, et irréductible à une formule analytique simple (voir figure 17 par exemple). Cependant en distinguant dans la loi exacte un signal (la densité) et du bruit (le "bruit discret"), on peut mettre en évidence une régularité à grande échelle (la forme gaussienne de la densité).

Au chapitre **VIII** nous avons étudié la loi d'un *processus en cascade* (du type réaction de fission nucléaire en chaîne) après un grand nombre de générations. Là aussi, on obtient une densité limite, caractérisée explicitement par sa transformée de Fourier ou fonction caractéristique. Nous avons vu que, si la loi exacte et détaillée est en général prodigieusement complexe et irréductible à une formule analytique, on peut cependant calculer à l'aide d'algorithmes simples toute l'information *utile*, qui consiste en

- a) la probabilité de l'extinction ultime ;
- b) la densité de probabilité du nombre de particules-filles de la n^{e} génération.

Ces deux situations ont en commun que les lois exactes sont complexes, que les valeurs possibles de la variable considérée sont très nombreuses et qu'il importe peu de connaître la probabilité individuelle de chaque valeur possible ; ce qui est utile est de pouvoir calculer, pour n'importe quel intervalle grand par rapport aux distances séparant les valeurs individuelles, la probabilité pour que ces valeurs se situent dans cet intervalle. Cette information est fournie par la densité limite.

On appelle *lois de probabilités asymptotiques* ces lois limites, qui sont souvent, mais pas toujours, des densités continues. Parfois elles comportent à la fois une partie discrète et une partie continue : par exemple dans le cas du processus en cascade étudié au chapitre **VIII**, la loi asymptotique était

composée d'une partie discrète (la probabilité que $Z_n = 0$) et d'une partie continue (pour les valeurs autres que zéro).

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier quelques lois de probabilité asymptotiques, qu'on rencontre souvent et qu'il faut connaître.

La loi normale est un cas typique. Un autre type classique de loi limite, entièrement discrète, est la loi de Poisson. Les lois limite qu'on rencontre dans la pratique se ramènent souvent à ces deux cas. Par exemple les lois asymptotiques du χ^2 ou de Student (voir chapitre **XI**) ne sont que des *déguisements* (par changement de variable) de la loi asymptotique normale. Dans la section **1** nous verrons un cas particulier de la loi de Student, la *loi de Cauchy*. Dans la section **2** nous étudierons la *loi de Poisson*, qui est une loi limite très fréquente, entièrement discrète: elle régit généralement les événements caractérisés par comptage, tels que le nombre de véhicules qui se présentent chaque minute à un péage d'autoroute.

Il y a une différence de nature importante entre d'une part les lois asymptotiques telles que la loi normale et la loi de Poisson, et d'autre part les lois limite de processus en cascade. En effet, les premières ont un caractère universel: ainsi la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes aura toujours une densité gaussienne, quelle que soit la loi particulière des variables individuelles. De même le nombre de véhicules qui se présentent par minute à un péage sera toujours une loi de Poisson, quelle que soit la loi de probabilité particulière qui régit l'heure ou le lieu de départ de chaque véhicule. Par contre les secondes — comme le montre la diversité des figures à la fin du chapitre **VIII** — sont très variées et dépendent de la loi génératrice Z_1 . Mais les premières sont des sommes de variables indépendantes (ce qui a pour effet de brouiller l'information contenue dans les lois particulières), tandis que les secondes ne sont pas des sommes de termes indépendants, et amplifient au contraire certaines caractéristiques de la loi originelle.

IX.1. Loi de Cauchy.

Soient X et Y deux variables aléatoires de lois approximativement gaussiennes. Par exemple X et Y peuvent être binômiales ou être la somme d'un grand nombre de termes indépendants, mais on supposera que la probabilité pour que $Y = 0$ est nulle.

Si X et Y sont stochastiquement indépendantes, quelle est la loi approximative (la densité) de $Z = X/|Y|$?

Le problème est de trouver la densité de la loi de Z sans passer par les lois exactes, à partir de la seule connaissance des densités de X et de Y .

Lois de probabilité asymptotiques

Ces densités sont caractérisées par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a < X < b) &\simeq \int_a^b \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} dx \\ \mathcal{P}(a < Y < b) &\simeq \int_a^b \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta y^2} dy\end{aligned}\tag{IX.1.}$$

Supposons un instant qu'on connaisse les lois discrètes exactes de X et de Y : $\mathcal{P}(X = x_j) = p_j$ et $\mathcal{P}(Y = y_k) = q_k$. Alors

$$\mathcal{P}(a < Z < b) = \sum_{j,k \in E} p_j q_k\tag{IX.2.}$$

où E est l'ensemble des couples d'indices j, k tels que $a|y_k| < x_j < b|y_k|$. Bien entendu, que les termes de la somme ci-dessus soient les produits $p_j q_k$ est dû à l'indépendance stochastique des variables X et Y : sinon on aurait une loi conjointe $r_{j,k}$ non factorisable.

Quoique étant à deux dimensions, cette loi conjointe peut être lissée par convolution : après lissage, la loi discrète $\{x_j, p_j\}$ donnera une densité $\sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha x^2}$ et la loi $\{y_k, q_k\}$ une densité $\sqrt{\beta/\pi} e^{-\beta y^2}$, de sorte que la loi conjointe $\{x_j, y_k, p_j q_k\}$ donnera une densité $(\sqrt{\alpha\beta}/\pi) e^{-\alpha x^2 - \beta y^2}$. Par ailleurs, l'événement $a < X/|Y| < b$ correspond, dans le plan des coordonnées x, y , au domaine $a|y| < x < b|y|$, donc l'approximation des lois discrètes par des densités donnera

$$\mathcal{P}(a < Z < b) \simeq \iint_{a|y| < x < b|y|} \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\pi} e^{-\alpha x^2 - \beta y^2} dx dy\tag{IX.3.}$$

Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale double.

Pour cela il suffit d'effectuer de bons changements de variable; la figure 34 montre quel est le domaine d'intégration $a|y| < x < b|y|$ (secteur hachuré, délimité par les droites $x = a|y|$ et $x = b|y|$). La figure montre le cas où a et b sont positifs. Introduisons les angles u et v tels que $\tan u = a$ et $\tan v = b$. En coordonnées polaires r, θ telles que $x = r \sin \theta$ et $y = r \cos \theta$ le secteur hachuré correspond à $0 \leq r < \infty$, $u < \theta < v$. Par conséquent, dans ces coordonnées polaires l'intégrale précédente devient :

$$2 \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\pi} \int_0^\infty \int_u^v e^{-[\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta] r^2} r dr d\theta$$

Le facteur 2 devant provient de ce que dans IX.3 on intègre aussi sur le secteur $-ay < x < -by$ correspondant à $y < 0$ alors que ci-dessus (voir

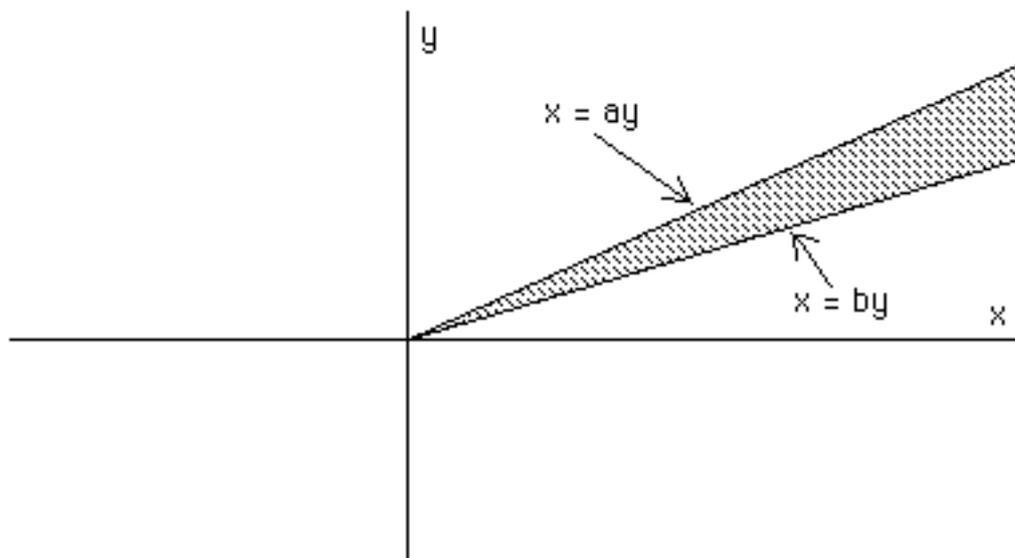


figure 34

figure 34) on n'a retenu que le cas $y > 0$. L'intégration par rapport à la variable r est immédiate, et on obtient

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\pi} \int_u^v \frac{1}{\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta} d\theta$$

On effectue alors un second changement de variable: $t = \tan \theta$; l'intégrale devient maintenant

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\pi} \int_a^b \frac{1}{\alpha t^2 + \beta} dt$$

On peut donc écrire en conclusion :

$$\mathcal{P}(a < Z < b) \simeq \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\pi} \int_a^b \frac{1}{\alpha t^2 + \beta} dt \quad (IX.4.)$$

ce qui signifie simplement que la variable Z a pour densité la fonction

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\pi} \frac{1}{\alpha t^2 + \beta}$$

On pourra remarquer que

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha t^2 + \beta} dt = 1$$

comme il se doit.

Cette densité (ou loi asymptotique) est appelée *densité de Cauchy*.

Lois de probabilité asymptotiques

La densité de Cauchy décroît lentement à l'infini (en t^{-2}). Cela entraîne que la moyenne ou espérance mathématique est donnée par une intégrale divergente, $\int [t/(\alpha t^2 + \beta^2)] dt$; à plus forte raison encore la variance. Mais bien sûr la loi discrète exacte de Z , n'ayant qu'un nombre fini de valeurs possibles, a bien une moyenne, qui est d'ailleurs pratiquement nulle, et une variance (très grande).

Les variables X et Y avaient chacune une loi de probabilité gaussienne (de variances $1/2\alpha$ et $1/2\beta$ respectivement). Pour donner une illustration concrète à cela, imaginons que deux personnes \mathcal{A} et \mathcal{B} jouent chacune à pile ou face avec des partenaires respectifs \mathcal{A}' et \mathcal{B}' , en payant 1 euro au partenaire chaque fois que pile sort, et en recevant 1 euro du partenaire chaque fois que face sort. Sur un grand nombre N de lancers, il est très peu probable que les gains ou les pertes de \mathcal{A} soient supérieures à trois ou quatre fois \sqrt{N} (voir chapitre **VII**) : c'est la loi gaussienne. Mais supposons que le joueur \mathcal{A} , au lieu de compter son gain en euros, le rapporte au gain en valeur absolue de \mathcal{B} , qu'il dise par exemple : "j'ai gagné le double de \mathcal{B} " ($Z = 2$), ou bien "j'ai gagné 3.7 fois ce que \mathcal{B} a perdu" ($Z = 3.7$), ou encore "j'ai perdu 1.75 fois plus que \mathcal{B} " ($Z = -1.75$), etc. Afin qu'il n'y ait pas de division par zéro, on supposera N impair, car on sait (voir chapitre **III**) que dans ce cas les gains sont toujours un nombre impair d'euros et ne peuvent donc pas être nuls. Alors ce gain relatif est distribué selon la densité de Cauchy. Or la densité de Cauchy, au contraire de la densité gaussienne, ne décroît pas très rapidement lorsque t tend vers l'infini. Les rapports $X/|Y|$ élevés ont certes des probabilités plus faibles que les rapports proches de 1, mais pas infinitésimales. Cela n'est pas paradoxal : $X/|Y|$ est élevé si X est grand (ce qui est très peu probable), mais aussi si Y est petit (ce qui par contre est probable).

La variable aléatoire Z , c'est-à-dire le rapport des gains de \mathcal{A} à ceux (en valeur absolue) de \mathcal{B} est bien sûr une variable aléatoire discrète, qui ne prend jamais qu'un nombre fini de valeurs; ces valeurs sont des fractions et sont d'autant plus nombreuses et serrées que N (le nombre de lancers) est plus grand. Pour N grand ces valeurs sont alors bien trop nombreuses et proches les unes des autres pour que la connaissance mathématiquement exacte de la probabilité de chacune soit utile; en outre son expression exacte est compliquée. C'est pourquoi la densité de Z est à nouveau la seule information intéressante.

IX.2. Pourquoi la densité gaussienne est-elle si répandue ?

Le calcul par lequel nous avons obtenu la densité de Cauchy n'était qu'une affaire de changements de variables. Il laisse donc le sentiment que n'importe quelle fonction positive et dont l'intégrale vaut 1 peut être la

densité d'une variable aléatoire gaussienne, après avoir effectué sur celle-ci une transformation non linéaire adéquate. Nous retrouvons ici encore le phénomène qui était à l'origine du paradoxe des cordes prises au hasard sur un cercle: si une certaine variable aléatoire a une densité uniforme, son carré ou sa racine carrée n'auront pas une densité uniforme. Ici, au lieu de densités uniformes, nous considérons ce qu'il advient des densités gaussiennes après une transformation non linéaire. N'importe quoi (pourvu que ce soit positif et d'intégrale 1) pourrait après une transformation non linéaire adéquate se ramener à une densité gaussienne. D'un point de vue purement mathématique, cela est vrai; donnons-nous en effet une densité arbitraire $f(x)$. Tout ce que nous lui imposons est que

$$f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int f(x) dx = 1$$

Prenons alors une variable aléatoire X de densité gaussienne $\sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha x^2}$ et posons $Y = h(X)$, h étant une transformation non linéaire que nous supposons inversible (disons croissante pour fixer les idées), avec la fonction inverse $h^{-1} = g: X = g(Y)$. On peut alors écrire:

$$\mathcal{P}(a < Y < b) = \mathcal{P}(a < h(X) < b) \simeq \int_{a < h(x) < b} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} dx$$

En effectuant le changement de variable $x = g(y)$ dans cette intégrale on obtient

$$\mathcal{P}(a < Y < b) \simeq \int_a^b \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g(y)^2} g'(y) dy \quad (IX.5.)$$

Cette égalité met bien en évidence que la densité de $Y = h(X)$ est la fonction $\sqrt{\alpha/\pi} \exp\{-\alpha g(y)^2\} g'(y)$, donc pour que cette densité soit la densité prescrite $f(y)$ il suffit d'avoir

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g(y)^2} g'(y) = f(y) \quad (IX.6.)$$

ce qu'on peut interpréter comme une équation différentielle dont la fonction inconnue est g . Elle est facile à résoudre en introduisant la fonction

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} dt$$

car alors l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\frac{d}{dy} \mathcal{N}(g(y)) = f(y)$$

Lois de probabilité asymptotiques

En introduisant la primitive $F(y)$ de $f(y)$ (celle qui s'annule pour $y = -\infty$) l'équation se résoud par quadrature :

$$g(y) = \mathcal{N}^{-1}(F(y)) \quad (IX.7.)$$

La fonction \mathcal{N} est en effet croissante, donc a un inverse \mathcal{N}^{-1} .

En conclusion, si Y est une variable aléatoire densité arbitraire $f(y)$, il suffit de choisir $g(y)$ selon IX.7 pour que la variable $X = g(Y)$ soit de densité gaussienne. Cela est un résultat purement mathématique, qui ne signifie évidemment pas que n'importe quelle densité se rencontre dans des problèmes concrets. L'expérience montre que les densités gaussiennes sont fréquentes dans la nature, alors que la plupart des autres qu'on pourrait imaginer mathématiquement ne se rencontrent pas. Or, s'il suffit d'observer le carré, la racine carrée, ou le logarithme, pour que la densité cesse d'être gaussienne, on peut se demander pourquoi on rencontre si souvent la densité gaussienne. Cette question mérite une discussion quelque peu approfondie. Lorsqu'on rencontre des distributions de probabilités "dans la nature", c'est sous la forme d'une distribution statistique ; en effet, on peut faire beaucoup d'expériences déterministes, par exemple si on mesure dans un conducteur donné le rapport de l'intensité à la tension entre les bornes, on trouvera toujours pratiquement la même valeur. Dans un tel cas on ne dit pas que le résultat est aléatoire. Par contre si on ne retient pas la valeur mesurée de l'intensité, mais seulement le petit écart, de l'ordre des erreurs de mesure, par rapport à cette valeur, on constate une grande variabilité et on dit que cet écart est aléatoire. De même, si on enregistre le nombre de naissances qui ont lieu chaque jour dans une maternité, on observera une certaine variabilité : certains jours il y aura eu cinq naissances, d'autres jours dix ; toutefois les jours sans aucune naissance, ou les jours avec vingt naissances, seront rarissimes. Dans ce cas, on dira que le nombre de naissances est aléatoire, mais bien sûr tous les nombres ne sont pas équiprobables et certains sont plus fréquents que d'autres. On peut donc représenter le nombre de naissances par jour par une *variable aléatoire*. Si au lieu de prendre dix valeurs possibles, la variable aléatoire en prend un nombre très grand, par exemple le nombre de naissances par semaine et non par jour, on en représentera la répartition par une densité. On observera alors que le nombre de naissances par semaine, qui varie d'une semaine à l'autre, suit une densité gaussienne, avec un écart-type qu'on pourra mesurer en faisant une étude statistique sur dix ans (bien sûr il faudra la corriger par rapport aux évolutions saisonnières). Il semblerait farfelu de vouloir plutôt étudier la répartition statistique des carrés ou des logarithmes de ces nombres, qui auraient alors une densité de répartition autre, mais on constate que c'est justement avec la variable qui semble la plus naturelle qu'on observe la

densité gaussienne.

D'autre part, si le nombre qu'on mesure est petit (par exemple si dans la maternité on compte le nombre de naissances *par jour* et non par an), on ne peut obtenir une densité gaussienne pour la simple raison que les valeurs possibles ne sont pas assez nombreuses : une densité n'apparaît que si les valeurs de la variable aléatoire sont nombreuses. Mais on observera presque toujours dans de tels cas une loi de Poisson (voir section suivante). Que ces deux lois, la loi normale pour les variables qui prennent beaucoup de valeurs, et la loi de Poisson pour les variables qui prennent des valeurs entières et petites, soient aussi répandues dans la nature, doit pouvoir se comprendre.

Les conclusions du chapitre **VII** conduisent à penser que la distribution gaussienne autour d'une valeur moyenne est due à l'addition d'un grand nombre d'effets indépendants les uns des autres (et nous verrons plus loin que c'est le cas aussi pour la loi de Poisson). Par ailleurs, le constat purement mathématique que nous avons fait ci-dessus nous conduit à penser que de telles grandeurs à fluctuations gaussiennes devraient être la somme d'un grand nombre d'effets indépendants, et non le carré ou le logarithme d'une telle somme.

Lorsqu'on définit une grandeur physique, on ne la choisit pas arbitrairement. L'intensité d'un courant électrique pourrait, d'un point de vue purement métrologique, être tout aussi bien mesurée par sa racine carrée ou son carré : au lieu de la définir comme proportionnelle à la tension ($I = U/R$), on la définirait comme proportionnelle à la puissance ($I^2 = P/R$). Mais en agissant de la sorte à tort et à travers, on changerait complètement la nature des lois physiques et on perdrait les invariances spatio-temporelles (voir au chapitre **I** les remarques — empruntées à H. Poincaré — à propos du principe de relativité de Galilée et la mesure du temps). Les grandeurs physiques ne sont pas définies à la légère et sont choisies de manière à refléter les invariances fondamentales, sans lesquelles la physique perdrait son sens ; plus exactement : elles sont choisies de manière à avoir les lois les plus simples possibles, et les invariances fondamentales sont l'expression de ce choix. Lorsque des variations aléatoires *indépendantes* s'ajoutent, elles expriment implicitement ces invariances : soit il s'agit d'une accumulation au cours du temps, soit d'une addition de déplacements dans l'espace. En toute dernière instance, une grandeur se ramène toujours à cela puisque, quel que soit l'instrument de mesure, on lira toujours la valeur mesurée sur une graduation, un écran, etc. L'indépendance stochastique de ces variables qui s'ajoutent spatialement les unes aux autres est une expression de la causalité et de la séparabilité dans le temps et l'espace : que dans n'importe quel phénomène complexe on observe des fluctuations gaussiennes (erreurs

Lois de probabilité asymptotiques

de mesures, dispersion aléatoire, etc.) reflète d'une part que de nombreux effets s'ajoutent spatialement, et d'autre part que ces nombreux effets sont séparables dans le temps ou dans l'espace, de sorte qu'ils ne s'influencent pas mutuellement (comme les boules qui tombent dans les boîtes sans s'influencer).

Nous avons cependant étudié des situations quantiques où cette séparabilité n'existe pas (par exemple **II. 6** *la loi de Planck*) et pourtant on y rencontre aussi des fluctuations gaussiennes; l'analyse mathématique détaillée (voir **II.6.**) faisait apparaître ces fluctuations gaussiennes comme une propriété des factorielles. Or les factorielles interviennent par l'intermédiaire des formules de dénombrement (coefficients binômiaux, etc.), qui s'appliquent dès lors qu'une *équiprobabilité* a été postulée. Mais l'équiprobabilité présuppose toujours une invariance, comme cela a été largement discuté au chapitre **I**. Dans les statistiques quantiques, il n'y a pas de séparabilité, mais des invariances de nature différente (et aujourd'hui encore mystérieuses). Dans tous ces cas, aussi bien lorsque des causes très nombreuses et causalement séparées (au sens de la Mécanique classique) s'ajoutent parce que leur effet est spatial, que lorsqu'on analyse les statistiques quantiques où une invariance d'origine autre que spatiale conduit à des factorielles, on rencontrera la forme gaussienne. On pourrait dire que la forme gaussienne des fluctuations statistiques est le symptôme d'une invariance sous-jacente.

Il n'est donc pas surprenant que les fluctuations aléatoires qu'on observe dans la nature soient si souvent gaussiennes.

La discussion serait bien sûr plus concrète sur un exemple; en voici un. Pour mesurer la quantité d'information qu'on peut stocker sur une mémoire on utilise une unité qui est l'octet (ou le bit); dans un octet on peut ranger 256 signes différents, alors pourquoi ne dit-on pas que la quantité d'information est 256? Sur 1 *Mo* on peut ranger environ $4.26 \cdot 10^{2525222}$ textes différents, mais on préfère mesurer la quantité d'information par le logarithme en base 2 de ce nombre; c'est certes plus commode, mais est-ce seulement une question de commodité?

En analysant les choses de plus près, on peut remarquer que la mémoire mesurée en octets est proportionnelle au volume que la mémoire physique occupe dans l'espace (à sa longueur si la mémoire est stockée sur une ligne, à la superficie si elle est stockée sur un disque, à un volume si la mémoire est stockée en trois dimensions). Ainsi la quantité d'information mesurée en octets se ramène à de l'espace, alors que la quantité mesurée par le nombre de textes possibles ne s'y ramène pas linéairement. Si on remplit une mémoire progressivement en y vidant une centaine de fois un buffer, l'espace disponible ne sera pas rempli complètement, il restera toujours des

trous dûs au fait que l'adressage des buffers successifs ne coïncide pas avec un pavage géométriquement parfait de l'espace disponible. Ces trous auront donc un volume assez petit, mais qu'on peut avec raison considérer comme aléatoire; il n'est peut-être pas absolument évident que les trous successifs soient stochastiquement indépendants, mais si le remplissage de l'espace-disque est suffisamment chaotique, c'est une hypothèse qui se tient, parce qu'on peut admettre — en vertu justement du principe d'invariance — qu'il n'y a pas de région privilégiée de l'espace (voir à ce sujet **IV. 6** *l'effacement de la causalité*).

Après avoir vidé quelques centaines de fois le buffer, le volume total de ces trous sera une variable aléatoire de densité gaussienne (somme des volumes des trous accumulés), dont l'écart-type représente alors une incertitude sur la mémoire disponible. Si on avait compté en nombre de textes possibles, on n'observerait pas une fluctuation gaussienne, puisque la relation entre les deux grandeurs est logarithmique et non linéaire. Mais le niveau où se produit une *addition* de variables indépendantes est celui du remplissage de l'espace, et non celui du nombre de textes possibles, qui serait multiplicatif. Ainsi, la grandeur qui a été choisie pour mesurer l'information est celle qui reflète le remplissage spatial et par conséquent aussi celle qui présentera des fluctuations gaussiennes.

On pourra faire le même constat pour l'intensité électrique (nombre d'électrons passant *par seconde* à travers une *section* de conducteur), etc.

C'est la véritable raison de l'universalité de la densité gaussienne. Il s'y ajoute encore une raison secondaire, mais très importante : même lorsqu'une grandeur ne se ramène pas linéairement à des déplacements dans l'espace, ou plus généralement à des formules de dénombrement contenant des factorielles, les fluctuations peuvent rester gaussiennes tout simplement parce qu'elles sont petites. En effet, soit x une grandeur subissant des fluctuations gaussiennes ε : on mesure donc x , mais avec un bruit ε qui s'ajoute à x . Si on considère maintenant la grandeur $y = f(x)$ qui dépend non linéairement de x , celle-ci fluctuera selon $f(x + \varepsilon)$. Si ε est grand, la non linéarité de f déformera les fluctuations, de telle sorte que celles-ci ne seront plus gaussiennes, comme l'étude précédente l'a montré. Mais si ε est petit et f différentiable, on aura $f(x + \varepsilon) \simeq f(x) + f'(x)\varepsilon$, donc la fluctuation sera néanmoins transformée linéairement. En fin de compte, il est même plutôt difficile de trouver des grandeurs qui échappent à toutes ces bonnes raisons.

Malgré tout, nous avons pu constater que les processus en cascade engendraient une bien plus grande variété de densités asymptotiques; mais la variable Z_n du chapitre **VIII** n'est pas une somme de variables indépendantes, le principe de composition est différent et n'efface pas

entièrement l'information sur la loi initiale de Z_1 .

IX.3. Loi de Poisson.

La loi de Poisson est la plus simple de toutes les lois de probabilité asymptotiques; elle est entièrement discrète.

Considérons le problème très simple (et purement mathématique) suivant: on a n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , stochastiquement indépendantes, et ne prenant que les deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives p et q ($p + q = 1$). La loi de leur somme $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est

$$\mathcal{P}(S = k) = \binom{n}{k} p^{n-k} q^k$$

(loi de Bernoulli). Mais supposons que n soit très grand et q très petit, de l'ordre de $1/n$. On pourra poser $q = \lambda/n$ avec λ ni grand ni petit. Alors, pour $k \ll n$, $p^{n-k} = (1 - \lambda/n)^{n-k} \simeq e^{-\lambda}$ et $\binom{n}{k} \simeq n^k/k!$ De sorte que

$$\mathcal{P}(S = k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{IX.8.}$$

On constate d'abord que pour $k \gg \lambda$ ces probabilités sont pratiquement nulles (aussi bien sous leur forme approchée que sous leur forme exacte). Seules sont significatives les probabilités correspondant aux petites valeurs de k .

Plus généralement, supposons que les X_j n'aient pas toutes exactement la même loi, mais que toutes, comme ci-dessus, prennent la valeur 1 avec une probabilité très petite ε_j , et la valeur zéro avec une probabilité $1 - \varepsilon_j$ presque égale à 1.

La fonction génératrice de chaque X_j étant $G_j(x) = 1 + \varepsilon_j(x - 1)$, la somme $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ aura pour fonction génératrice (si les X_j sont indépendantes):

$$G(x) = \prod_{j=1}^{j=n} [1 + \varepsilon_j(x - 1)]$$

Pour approcher ce type d'expression on prend bien sûr le logarithme; or

$$\ln(1 + \varepsilon_j(x - 1)) \simeq \varepsilon_j(x - 1) - \frac{1}{2}\varepsilon_j^2(x - 1)^2$$

où on a conservé le terme d'ordre deux pour une évaluation de l'erreur. On obtient donc en revenant aux exponentielles:

$$G(x) \simeq \exp \left\{ \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(x - 1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j^2(x - 1)^2 \right\}$$

Introduisons les paramètres

$$\lambda = \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j \quad \text{et} \quad \mu = \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j^2 \quad (IX.9.)$$

Le premier, λ , est la somme des moyennes des X_j , donc la moyenne de S . On a supposé les ε_j très petits, supposons maintenant que l'ordre de grandeur de n est tel que la somme λ ait une valeur appréciable. Alors, les carrés ε_j^2 étant bien plus petits que les ε_j , leur somme sera très petite par rapport à λ . Ainsi la fonction génératrice $G(x)$ sera approximativement donnée par

$$G(x) \simeq \exp \{ \lambda (x - 1) \} \quad (IX.10.)$$

avec une erreur relative de l'ordre de $-\frac{1}{2}\mu(x-1)^2$. Les probabilités pour que $S = 0, 1, 2, 3, \dots$ sont donc à nouveau données par la loi de Poisson, avec une erreur relative de l'ordre de μ . Toutes ces approximations ne sont justifiées que pour les petites valeurs de S et non pour $S = 1000$ ou $S = 10000$, mais pour les grandes valeurs, bien que l'erreur *relative* ne puisse plus être considérée comme petite, les probabilités aussi bien exactes qu'approchées sont de toute façon si prodigieusement petites (ce que montrent les factorielles au dénominateur de la loi de Poisson) que cela n'a pas d'importance.

Nous voyons donc apparaître le résultat suivant : lorsqu'on considère une somme d'un grand nombre n de variables indépendantes qui ne prennent que les deux valeurs 0 et 1, avec une très faible probabilité (de l'ordre de $1/n$) pour 1, alors leur somme obéit à la loi de Poisson.

A première vue, on pourrait penser que cela contredit les conclusions du chapitre **VII** : on devrait en effet avoir une loi gaussienne. Mais en étudiant le passage à la limite, nous avons remarqué que, surtout si la loi des X_j est fortement dissymétrique — ce qui est le cas ici — il fallait que le nombre N de variables à sommer soit vraiment très grand pour arriver à la loi gaussienne ; nous allons voir qu'il doit être beaucoup plus grand que le nombre n qui intervient ici. Nous en avons donné une estimation explicite (VII.5) : il fallait que N soit grand par rapport à $400 M_3^2/M_2^3$, M_2 et M_3 étant les moments d'ordre deux et trois de la loi de X . Ces moments ne sont pas les mêmes pour toutes les X_j ; mais pour chaque X_j , ils sont tous trois égaux à ε_j ($M_1 = M_2 = M_3 = \varepsilon_j$), et sous nos hypothèses ils ont donc tous le même ordre de grandeur $1/n$. De sorte que $M_3^2/M_2^3 \sim n^3/n^2 = n$. D'après VII.5 il faudrait donc, pour arriver à la densité gaussienne, que $N \gg 400n$; autrement dit, n n'est pas assez grand et c'est pour cela qu'on obtient la loi de Poisson au lieu de la densité gaussienne.

Lois de probabilité asymptotiques

Un tel phénomène est très courant pour les lois asymptotiques : il y en a qui sont vraiment des limites lorsque n tend vers l'infini : c'est le cas pour la loi normale du chapitre **VII**, ainsi que pour la loi limite de $Z_n/E(Z_n)$ du chapitre **VIII**. Mais il y en a aussi, comme ici la loi de Poisson, qui sont une étape intermédiaire sur la route vers l'infini. Tant que n est de l'ordre de grandeur des $1/\varepsilon_j$ on a la loi de Poisson, puis, lorsque n poursuit son voyage vers l'infini et atteint un ordre de grandeur nettement supérieur aux nombres $400/\varepsilon_j$, on arrive à la loi gaussienne.

On remarquera cependant que la loi de Poisson est aussi la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes, mais de variables qui ne prennent que les deux valeurs 0 et 1, la seconde avec une faible probabilité : la somme de ces variables sera donc un nombre entier petit (comme le nombre de naissances par jour ou par heure dans une maternité). Les remarques présentées à la section **2** à propos de la loi normale expliquent donc aussi pourquoi la loi de Poisson s'observe si fréquemment dans la nature, dès lors que les nombres qu'on mesure sont entiers et petits.

Jusqu'ici nous sommes restés dans l'abstraction : nous avons considéré des sommes de variables aléatoires sans nous préoccuper de ce qu'elles peuvent représenter.

Voici maintenant un problème concret : les queues qui peuvent se former à un péage d'autoroute. Mettons qu'il faut une minute pour effectuer les paiements au guichet. On supposera qu'il n'y a qu'un guichet ; s'il y en a plusieurs, le problème n'est pas essentiellement différent ; la durée de paiement de une minute n'a ici aucune signification pratique, n'importe quelle unité de temps eût convenu. On voudrait connaître la loi de probabilité du nombre de voitures qui se présentent par minute, sachant qu'en moyenne il s'en présente 0.76. L'intérêt de ce problème est le suivant : cette moyenne est inférieure à 1, donc "en moyenne" il ne se forme pas de queue : au bout de cent minutes, environ 76 véhicules sont passés, alors que le guichet aurait pu en absorber cent. Il est bien clair que si la moyenne avait été 1.22, il y aurait un résidu d'environ 22 véhicules au bout de cent minutes, et on serait donc sûr qu'une queue se formerait et s'allongerait en moyenne de 22 véhicules par cent minutes. Toutefois, lorsque la moyenne est inférieure à 1, la probabilité qu'il se forme des queues même longues n'est pas nulle ; si cette probabilité est supérieure à 5% pour une durée de trois heures (180 minutes) par exemple, la compagnie peut avoir intérêt à améliorer le péage. En effet une probabilité de 5% pour trois heures signifie que toutes les soixante heures environ se forme une queue longue, soit tous les trois jours. Cela peut dissuader bon nombre d'utilisateurs d'emprunter l'autoroute et faire perdre de l'argent à la compagnie. Celle-ci peut améliorer le péage de deux

façons : soit construire un second guichet, ce qui aura pour effet de faire tomber la moyenne de 0.76 à 0.38, soit améliorer son fonctionnement pour que la durée de paiement soit raccourcie : si celle-ci est abaissée à une demi-minute, la moyenne tombera aussi à 0.38. Il est assez évident a priori que la probabilité de formation de queues de longueur fixée doit être une fonction décroissante du nombre moyen de véhicules par minute. Mais cette intuition a priori ne permet pas de connaître la loi de cette décroissance. C'est cette loi que nous nous proposons de découvrir par le Calcul des probabilités.

Qu'il puisse se former des queues même lorsque le nombre moyen de véhicules par minute est plus petit que 1 n'est pas paradoxal, il suffit d'imaginer que si la moyenne est 0.76, il peut parfois arriver deux, trois, ou même quatre voitures en une seule minute. Cela va alors faire durer les formalités plus d'une minute, puisqu'il y aura plus d'une voiture au guichet ; or pendant ces deux ou trois minutes vont arriver en moyenne encore deux ou trois fois 0.76 voitures, qui à leur tour bloqueront les guichets deux minutes au lieu d'une, pendant lesquelles arriveront encore des voitures, etc.

Pour aborder ce problème il faut commencer par trouver la loi de probabilité pour qu'il arrive zéro, un, deux, trois, ... véhicules. C'est seulement avec la connaissance quantitative de cette loi qu'on pourra ensuite étudier quantitativement la loi de formation des queues.

Or il est facile de montrer que cette loi doit être une loi de Poisson, du moins si on est assuré que le nombre de voitures par minute est petit (qu'il n'est pas de l'ordre de mille ou un million, auquel cas il faut procéder autrement).

Supposons d'abord que le flux est constant au cours de la journée ; cela est toujours faux en pratique, où il y a des heures de pointe (aux environs de huit heures ou de dix-huit heures) et des heures creuses, mais cette hypothèse permettra déjà de trouver la loi de probabilité pour une moyenne constante ; on agit de même lorsqu'on veut définir la vitesse en cinématique : on commence par la définir dans le cas où le mouvement est uniforme, puis on étend la définition en partant du principe que tout mouvement peut être considéré comme uniforme pendant un instant assez court.

Sous cette hypothèse, les automobilistes quittent leur domicile et prennent l'autoroute à des instants aléatoires, mais uniformément distribués au long de la journée (car si ces instants n'étaient pas uniformément distribués on ne pourrait avoir un flux constant). Chaque automobiliste agit indépendamment des autres, donc les départs du domicile (ou les arrivées au péages) de tous ces usagers sont stochastiquement indépendants.

Lorsqu'on dit que le flux moyen au péage est de λ voitures par minute, cela signifie que si dans la journée N voitures en tout sont passées, $\lambda =$

Lois de probabilité asymptotiques

$N/1\,440$, puisqu'il y a 1 440 minutes dans une journée. Si on prend *au hasard* une voiture parmi les N , la probabilité pour que cette voiture arrive au péage au cours d'une minute donnée parmi les 1 440 que compte la journée est $\varepsilon = 1/1\,440$. L'hypothèse d'un flux constant se traduit en effet par l'équiprobabilité a priori de chacune des minutes de la journée. Inversement, la probabilité pour que cette voiture arrive en dehors de la minute donnée, est $1 - \varepsilon = 1\,439/1\,440$. On peut donc associer à chaque automobiliste j ($j = 1, 2, 3, \dots, N$) une variable aléatoire X_j qui vaut 1 si l'automobiliste j arrive au péage au cours de la minute donnée, et 0 si l'automobiliste arrive au péage en dehors de cette minute donnée. Le fait que chaque automobiliste agit indépendamment se traduit par l'indépendance stochastique des X_j , et les X_j ont toutes la même loi :

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } \varepsilon; \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - \varepsilon; \end{cases} \quad (IX.11.)$$

La somme des X_j , $S = \sum_{j=1}^N X_j$, est donc le nombre de voitures qui arrivent pendant la minute donnée. Nous avons vu précédemment que, si N est du même ordre de grandeur que $1/\varepsilon$, la loi de la somme S est approximativement une loi de Poisson :

$$\mathcal{P}(S = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (IX.12.)$$

Puisque $\lambda = N/1\,440 = N\varepsilon$, la condition que N soit du même ordre de grandeur que $1/\varepsilon$ signifie simplement que λ ne doit être ni trop grand, ni trop petit. Ceci est la loi de probabilité pour une minute donnée, mais bien entendu toutes les minutes de la journée sont équivalentes et la loi sera la même pour n'importe quelle minute de la journée.

Revenons alors à l'exemple qui a introduit la discussion, où λ valait 0.76. Les valeurs numériques de la loi de Poisson sont données par le tableau suivant :

k	$\mathcal{P}(S = k)$	
0	0.4677	
1	0.3554	
2	0.1351	
3	0.0342	(IX.13.)
4	0.0065	
5	0.0010	
6	0.0001	
7	0.0000	

Au-delà de 6 les probabilités sont inférieures au dix-millième. En faisant la somme des six dernières, on voit que la probabilité pour qu'il se présente

deux véhicules ou plus au péage est 0.177; la probabilité pour qu'il se présente trois véhicules ou plus est 0.0418. Avec les capacités d'absorption que nous avons posées, il suffit qu'une seule fois se présentent plus de deux véhicules pour que l'engorgement momentané ne puisse être résorbé par la suite que si on a la chance d'avoir moins que deux véhicules dans les minutes qui suivent; or la probabilité pour qu'il se présente plus de deux véhicules étant 0.177, cela va se produire en moyenne toutes les six minutes. Par cette estimation purement qualitative, on comprend que des bouchons puissent se former bien que le flux moyen soit inférieur à un véhicule par minute.

Nous nous proposons maintenant d'analyser cela quantitativement.

IX.4. La loi des queues.

À chaque instant n de la journée (les instants étant les minutes successives, $n = 1, 2, 3, \dots, 1440$), la longueur de la queue est égale au nombre de véhicules déjà arrivés moins le nombre de véhicules déjà autorisés. Mais le nombre de véhicules déjà autorisés n'est en général pas n , car si par exemple aucun véhicule ne s'est présenté pendant les trois premières minutes, puis qu'il s'en présente trois d'un coup pendant la quatrième minute, la longueur de la queue sera de deux véhicules, et non de $0 + 0 + 0 + 3 - 4$; à la fin de la quatrième minute, le nombre de véhicules autorisés aura été 1 et non $n = 4$. En effet, si pendant une période il se présente moins de véhicules que prévu, il y aura des temps morts au guichet, mais ces temps morts sont perdus et ne peuvent plus être recomptés plus tard pour absorber un trafic plus dense. Il faut donc tenir compte de ces temps morts.

Appelons Q_n la variable aléatoire "longueur de la queue à l'instant n ", et X_n le nombre de véhicules arrivés pendant la n^e minute (les X_n ont toutes la loi de Poisson mentionnée ci-dessus et sont indépendantes entre elles). Si par exemple $Q_{n-1} = 1$ et qu'il arrive zéro véhicules pendant la minute suivante, Q_n sera égale à 0; dans ce cas on obtient Q_n en ajoutant $X_n - 1$ à Q_{n-1} . De même si $Q_{n-1} = 0$ et $X_n = 1$, Q_n sera nulle: là aussi $Q_n = Q_{n-1} + X_n - 1$. Par contre si $Q_{n-1} = 0$ et $X_n = 0$, on n'aura pas $Q_n = Q_{n-1} + X_n - 1 = -1$, mais $Q_n = 0$ (la queue ne peut jamais avoir une longueur négative). Pour trouver la récurrence qui fait passer de Q_{n-1} à Q_n , le mieux est de décomposer les événements en réunions disjointes adéquates. Dans de tels problèmes *il ne faut jamais essayer de deviner*, mais toujours suivre un procédé systématique.

L'événement $\{Q_n = 0\}$ est la réunion de $\{Q_{n-1} = 0\} \cap \{X_n = 0\}$, de $\{Q_{n-1} = 0\} \cap \{X_n = 1\}$, et de $\{Q_{n-1} = 1\} \cap \{X_n = 0\}$. Ces trois événements sont disjoints: on ne peut évidemment pas avoir à la fois $Q_{n-1} = 0$ et $Q_{n-1} = 1$, ni $X_n = 0$ et $X_n = 1$. D'autre part, les variables aléatoires Q_{n-1}

Lois de probabilité asymptotiques

et X_n sont stochastiquement indépendantes (les véhicules qui arrivent au cours de la n^e minute “ignoraient” ce qui s’était produit jusque là). Donc

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(Q_n = 0) &= \mathcal{P}(Q_{n-1} = 0 \text{ et } X_n = 0) + \\
 &\quad + \mathcal{P}(Q_{n-1} = 0 \text{ et } X_n = 1) + \\
 &\quad + \mathcal{P}(Q_{n-1} = 1 \text{ et } X_n = 0) \\
 &= \mathcal{P}(Q_{n-1} = 0) \times \mathcal{P}(X_n = 0) + \\
 &\quad + \mathcal{P}(Q_{n-1} = 0) \times \mathcal{P}(X_n = 1) + \\
 &\quad + \mathcal{P}(Q_{n-1} = 1) \times \mathcal{P}(X_n = 0)
 \end{aligned} \tag{IX.14.}$$

Cette expression de $\mathcal{P}(Q_n = 0)$ diffère de ce qu’elle serait si Q_n était simplement la somme $Q_{n-1} + X_n - 1$: le premier des trois termes serait alors absent.

En revanche, pour les probabilités $\mathcal{P}(Q_n = k)$ avec $k \geq 1$, tout se passe comme si Q_n était bien la somme $Q_{n-1} + X_n - 1$; Q_n ne peut en effet être égal à $k \geq 1$ que si $Q_{n-1} + X_n = k + 1$, car il n’y a pas dans ce cas de temps mort au guichet: il y a Q_{n-1} véhicules qui attendent (Q_{n-1} pouvant être zéro), il en arrive X_n de plus, et un passera. C’est seulement lorsque Q_{n-1} et X_n sont tous deux nuls qu’il aura un temps mort et que Q_n sera égal à 0 au lieu de -1 . Ainsi l’événement $\{Q_n = k\}$ pour $k \geq 1$ sera la réunion pour j variant de 0 à $k + 1$ des événements disjoints $\{Q_{n-1} = j\} \cap \{X_n = k + 1 - j\}$, de sorte que

$$\mathcal{P}(Q_n = k) = \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{P}(Q_{n-1} = j) \times \mathcal{P}(X_n = k + 1 - j) \tag{IX.15.}$$

tout comme si Q_n était simplement la somme de Q_{n-1} et de $X_n - 1$. En regroupant (IX.14.) et (IX.15.) on obtient la récurrence qui fait passer de la loi de Q_{n-1} à celle de Q_n . Cette récurrence permet d’écrire un programme qui calculera récursivement les lois de Q_n à partir de celle de Q_1 , qui est évidemment la suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(Q_1 = 0) &= \mathcal{P}(X_1 = 0) + \mathcal{P}(X_1 = 1) \quad \text{pour } k = 0 \\
 \mathcal{P}(Q_1 = k) &= \mathcal{P}(X_1 = k + 1) \quad \text{pour } k \geq 1
 \end{aligned}$$

Si on exécute ce programme, on s’aperçoit que la loi de Q_n se stabilise au bout d’une centaine d’itérations (voir figures 36, 37, 38), ce qui correspond au fait que la loi de Q_n tend vers une limite lorsque n tend vers l’infini. Le nombre d’itérations avant stabilisation dépend évidemment de la précision: plus on prend en compte de décimales, plus grand est ce nombre. La centaine correspond à trois ou quatre décimales, et la limite n’est, au sens mathématique, jamais atteinte. Ainsi, il s’établit au bout d’un certain temps

un régime stable. Mais ceci n'est vrai que si le flux moyen est inférieur à un véhicule par minute, sinon évidemment les queues vont s'allonger indéfiniment (c'est-à-dire que la probabilité d'avoir une queue inférieure à n'importe quelle longueur fixée tendra vers zéro). L'établissement d'un régime stable peut se comprendre a priori : dans le phénomène de formation des queues, il n'y a aucune raison de penser que la loi de probabilité de Q_n puisse dépendre de l'instant n , puisque les conditions (le flux moyen, la durée du paiement, etc.) sont supposées constantes ; seul le début du processus présente des conditions spéciales, car on a imposé artificiellement que la queue soit de longueur nulle à l'instant zéro. La longueur de la queue (c'est-à-dire la variable aléatoire Q_n) redevient nulle indéfiniment à des instants aléatoires ; mais les distributions possibles de ces instants de retour à zéro sont toutes équiprobables, il n'y a pas de distribution privilégiée. En imposant que l'instant $n = 0$ soit obligatoirement l'un de ces instants on détruit l'équivalence des instants. C'est pourquoi pendant une période de l'ordre de la centaine de minutes la loi de Q_n évolue selon un régime transitoire avant de retrouver la loi constante comme limite.

On peut exprimer commodément la récurrence des lois des Q_n et leur limite en considérant les fonctions génératrices. En effet, les variables Q_n prennent des valeurs entières non négatives, donc l'usage des fonctions génératrices est tout à fait recommandé.

Appelons $G_n(z)$ la fonction génératrice inconnue de Q_n et $F(z)$ celle, connue, des X_n . La loi commune des X_n étant la loi de Poisson, $F(z)$ est la fonction $\exp(\lambda[z - 1])$. Les relations (IX.14.) et (IX.15.) se traduisent en termes de fonctions génératrices comme suit :

$$z G_n(z) - F(z) G_{n-1}(z) = (z - 1) F(0) G_{n-1}(0) \quad (IX.16.)$$

On peut montrer mathématiquement que, pour $0 < \lambda < 1$, $G_n(z)$ doit tendre vers une limite, mais on se contentera de l'admettre. La démonstration est assez longue et peu instructive, j'estime donc qu'elle ne vaut pas la peine de rallonger excessivement cette section. De toutes façons le programme qui calcule la récurrence IX.14 - IX.15 montre une stabilisation de la loi de Q_n (voir figures 36 à 39).

Sachant que $G_n(z)$ tend bien vers une limite finie $G(z)$, on peut faire tendre n vers l'infini dans la relation ci-dessus, ce qui donne

$$[z - F(z)] G(z) = (z - 1) F(0) G(0) \quad (IX.17 a.)$$

d'où on déduit ce que doit être la fonction génératrice de la loi limite si

Lois de probabilité asymptotiques

cette limite existe :

$$G(z) = F(0) G(0) \frac{z-1}{z-F(z)} \quad (IX.17b.)$$

La fonction $(z-1)/(z-F(z))$ se prolonge analytiquement en $z=1$, où elle vaut $1/(1-F'(0))$; en prenant $z=1$ dans l'expression ci-dessus, on obtient $G(1) = F(0) G(0)/(1-F'(0))$, et bien sûr $G(1) = 1$ puisque $G(1)$ est la limite des $G_n(1)$ qui sont tous égaux à 1. Donc $F(0) G(0) = 1 - F'(0)$. On remarquera en passant que la relation IX.16 est valable quelle que soit la loi de la variable X_n , c'est-à-dire pour des fonctions génératrices $F(z)$ arbitraires; de sorte que la loi limite aura pour fonction génératrice

$$G(z) = [1 - F'(0)] \frac{z-1}{z-F(z)} \quad (IX.17c.)$$

résultat obtenu presque sans calculs. Dans le cas qui nous concerne la loi des X_n est la loi de Poisson, pour laquelle $F(z) = \exp(\lambda[z-1])$; dans ce cas $1 - F'(0) = 1 - \lambda$. Mais les expressions IX.17b ou IX.17c sont valables pour n'importe quelle loi initiale.

Nous voyons ici, avec la formation de queues, un nouveau phénomène conduisant à une loi de probabilité asymptotique discrète: pour une loi donnée des arrivées (qui est généralement, dans les cas ayant un sens pratique, une loi de Poisson), la loi de la longueur des queues après stabilisation est déterminée par IX.17a, b, c. Notez bien que les Q_n ne sont pas des sommes de variables indépendantes.

Si on veut calculer la loi limite, il suffit en principe de calculer les coefficients de Taylor de cette fonction analytique $G(z)$, ce qui est aisé pour les premiers, mais de plus en plus difficile pour les suivants (il n'y a pas de formule simple). Toutefois la relation (IX.17c.) contient toute l'information.

Le problème des queues à un guichet a été abordé par Émile Borel⁽¹⁾. Son approche est différente: il ne prend pas en considération la variable aléatoire "longueur de la queue", dont la loi est certes exprimable analytiquement (formule IX.17c. ci-dessus), mais ne permet pas une expression simple pour chaque probabilité. Il faut dire qu'à l'époque on ne disposait pas de *personal computers* sur lesquels on pouvait écrire en vitesse un petit programme qui calcule tout.

Borel a donc trouvé le biais suivant: au lieu de considérer les queues, il considère ce qu'il appelle une série: c'est une suite d'utilisateurs qui se

⁽¹⁾ Émile Borel *Sur l'emploi du théorème de Bernoulli, pour le calcul d'une infinité de coefficients. Application au problème d'attente à un guichet.* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, mars 1942.

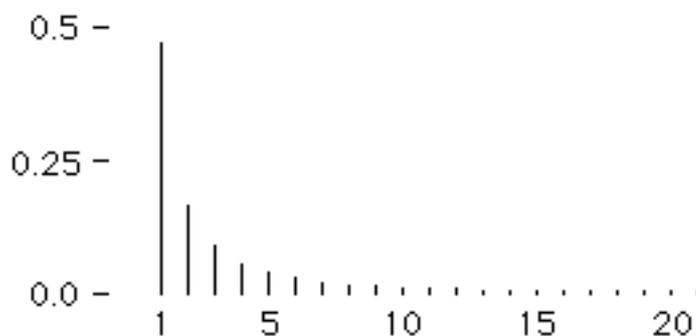


figure 35

Le graphique ci-dessus illustre la loi de Borel pour la longueur des séries d’usagers ; ici pour la valeur $\lambda = 0.76$ (celle de notre exemple). Le premier trait vertical correspond à la probabilité $e^{-\lambda} \simeq 0.46$ d’avoir une série de longueur 1, c’est-à-dire un usager qui se présente au guichet et qui n’est pas immédiatement suivi d’un autre ; le second trait correspond à la probabilité $\simeq 0.17$ d’avoir une série de longueur 2 : un usager se présente, puis un second arrive avant que le premier n’ait terminé, après quoi le guichet reste inoccupé au moins pendant la minute suivante. Si le flux λ reste constant toute la journée, on peut conclure d’après la loi des grands nombres qu’au cours de la journée environ 46% des séries seront réduites à un seul usager, 17% à deux usagers consécutifs, etc. Bien entendu les queues longues ne peuvent se former que dans des séries au moins aussi longues.

succèdent au guichet consécutivement sans que le guichet se libère ; dès que le guichet redevient libre (même une seule minute) la série se termine, mais une nouvelle série se produira avec le premier usager qui se présente après le temps mort. Une série peut se réduire à un seul usager. Les queues longues ne peuvent se former qu’à l’intérieur d’une série longue, mais il n’y a aucune relation mathématique précise entre la longueur d’une série et le maximum de la longueur de la queue pendant la série : une série peut être très longue sans que jamais plus de deux usagers ne fassent la queue (si les usagers se présentent de façon assez régulièrement espacée), et inversement une queue longue peut se former dans une série relativement courte (si beaucoup d’usagers arrivent presque en même temps). Il y a toutefois une corrélation assez forte entre la longueur des queues et la longueur des séries dans lesquelles elles se forment. On peut donc utiliser la probabilité α_n d’avoir des séries de longueur supérieure à un seuil donné n comme un critère quantitatif pour décider si le nombre de guichets est suffisant, comme nous l’avons proposé pour la probabilité pour que se forme une queue de longueur supérieure à n .

Borel a obtenu la formule explicite suivante pour la probabilité p_n pour

Lois de probabilité asymptotiques

qu'une série "prise au hasard" soit formée de n usagers :

$$p_n = e^{-n\lambda} \lambda^{n-1} \frac{n^{n-2}}{(n-1)!}$$

où λ est le nombre moyen d'usagers par minute ($\lambda = 0.76$ dans notre exemple). Cette formule n'est valable que si $\lambda < 1$. Elle permet de calculer les durées d'attente moyennes pour un usager, mais ne permet pas de calculer la loi de la longueur des queues *IX.17 c.* que nous avons obtenue par une autre méthode.

Revenons à la loi des queues et à la fonction génératrice $G(z)$ de la formule (*IX.17 c.*).

Pour calculer numériquement les coefficients de Taylor de $G(z)$ (c'est-à-dire les probabilités limite de la loi de la longueur des queues) d'ordre élevé l'expression (*IX.17 c.*) n'est guère commode. Pour le calcul numérique effectif de la loi limite il est préférable d'exécuter le programme itératif basé sur la récurrence (*IX.14, 15*). Par contre l'expression analytique (*IX.17 c.*) de la fonction génératrice est très pratique pour calculer la moyenne et la variance de la loi limite qui sont données par $G'(1)$ et $G''(1)$, ainsi que les premiers coefficients de Taylor qui sont données par $G'(0)$ et $G''(0)$. Notons Q sans indice pour la variable aléatoire limite. Rappelons que $\mathbf{E}(Q) = G'(1)$ et $\mathbf{Var}(Q) = G''(1) + \mathbf{E}(Q) - \mathbf{E}(Q)^2$ (cf *VI.6* et *VI.7*).

Dérivant formellement (*IX.17 c.*) on obtient

$$\begin{aligned} G'(z) &= [1 - F'(1)] \frac{1 - F(z) + (z-1)F'(z)}{[z - F(z)]^2} \\ G''(z) &= [1 - F'(1)] \times \\ &\times \frac{[1 - F'(1)](z-1)F''(z) - 2[1 - F'(z)][1 - F(z) + (z-1)F'(z)]}{[z - F(z)]^3} \end{aligned} \tag{IX.18.}$$

Pour $z = 0$ ces expressions prennent les valeurs particulières suivantes :

$$\begin{aligned} G(0) &= \mathcal{P}(Q = 0) = \frac{1 - F'(0)}{F'(0)} = (1 - \lambda) e^\lambda \\ G'(0) &= \mathcal{P}(Q = 1) = [1 - F'(0)] \frac{1 - F(0) - F'(0)}{F'(0)^2} \\ &= (1 - \lambda) e^\lambda (e^\lambda - 1 - \lambda) \\ G''(0) &= \mathcal{P}(Q = 2) = (1 - \lambda) [2(1 - \lambda) e^{2\lambda} (e^\lambda - 1 - \lambda)] \end{aligned}$$

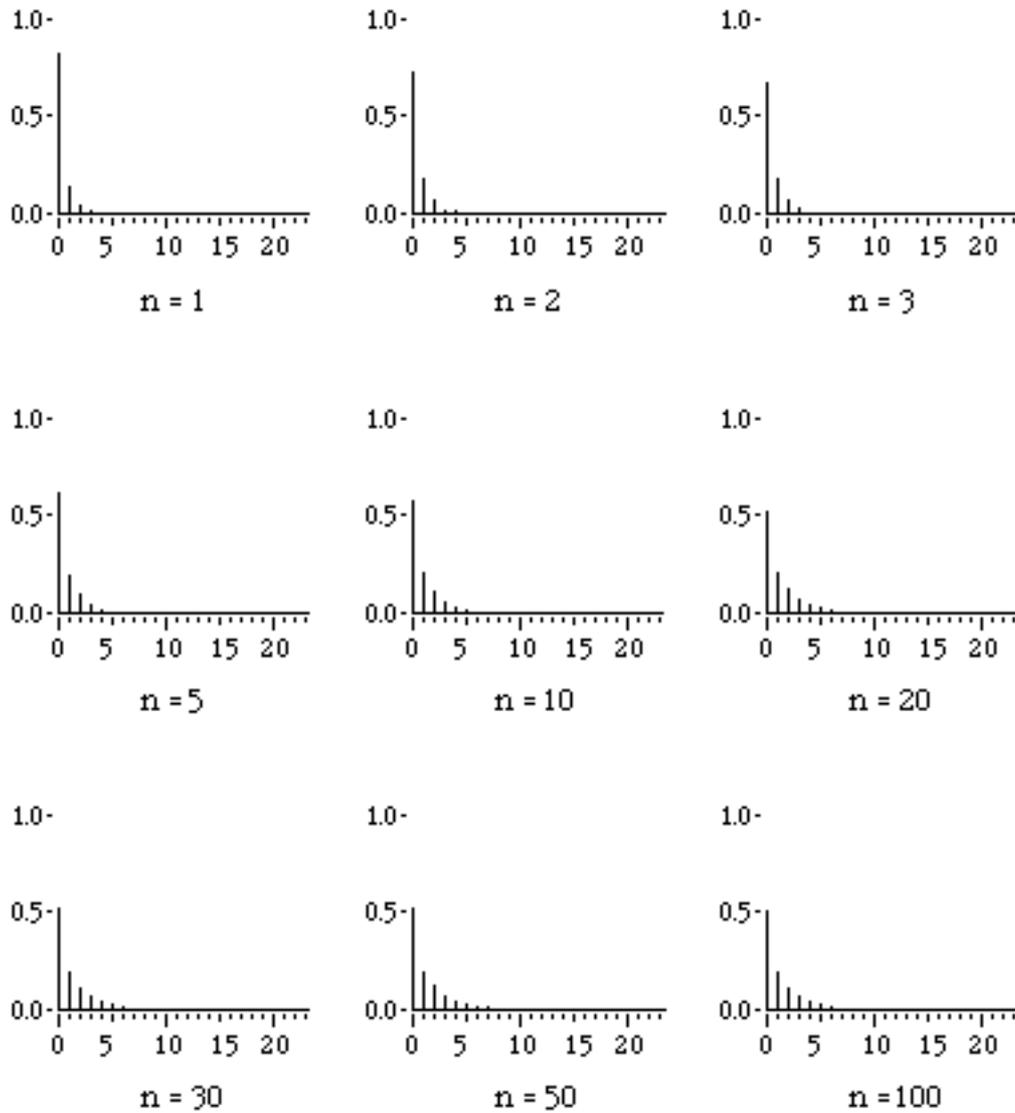


figure 36

Les neuf graphiques ci-dessus représentent les lois de probabilité de la longueur des queues pour $\lambda = 0.76$ après 1, 2, 3, 5, 10, 20, 30, 50, et 100 minutes : comme d'habitude, la hauteur des barres est proportionnelle à la probabilité de l'abscisse correspondante. L'échelle des abscisses est visualisée par une graduation (chaque trait de graduation correspond à une valeur – entière – de la variable aléatoire "longueur de la queue"). L'échelle des ordonnées est visualisée également : comme il s'agit de probabilités, celle-ci va de 0.0 à 1.0. On peut observer l'évolution vers une loi limite : pour n petit (donc peu après le début), la barre d'abscisse zéro est encore haute, puis elle diminue de plus en plus en plus au profit des autres ; le graphique n'évolue pratiquement plus au-delà de $n = 100$.

Lois de probabilité asymptotiques

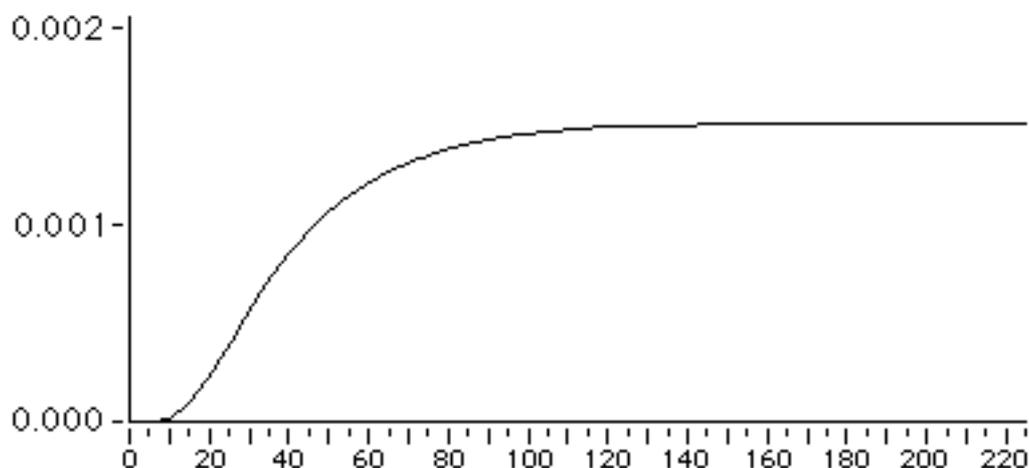


figure 37

Afin de visualiser l'évolution de la loi de Q_n vers la loi limite, on peut aussi représenter la probabilité que la queue ait une longueur supérieure ou égale à un seuil fixé, en fonction du temps écoulé. La courbe ci-dessus correspond à un seuil de 12 (avec toujours $\lambda = 0.76$) : l'abscisse représente le temps écoulé en minutes et l'ordonnée la probabilité que la queue comporte au moins douze véhicules. Bien sûr la courbe n'est qu'une interpolation des valeurs successives de ces probabilités, puisque le temps est un nombre entier de minutes.

On voit qu'au début cette probabilité est pratiquement nulle : elle est donnée par la loi de Poisson : pour que la queue soit d'au moins douze véhicules dès le premier instant, il faut que douze véhicules ou plus se présentent pendant la première minute, événement dont la probabilité est

$$\sum_{k \geq 12} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Mais après cette probabilité augmente et tend vers une limite, égale à 0.0015 environ. Ce qui est minuscule et ne justifie pas qu'on construise un second guichet. Toutefois pour $\lambda = 0.9$, la probabilité limite d'avoir une queue d'au moins douze véhicules est de 7% environ.

Nous n'avons pas *démontré* que les probabilités $\mathcal{P}(Q_n = k)$ tendaient vers une limite, mais le calcul numérique montre bien une stabilisation des valeurs.

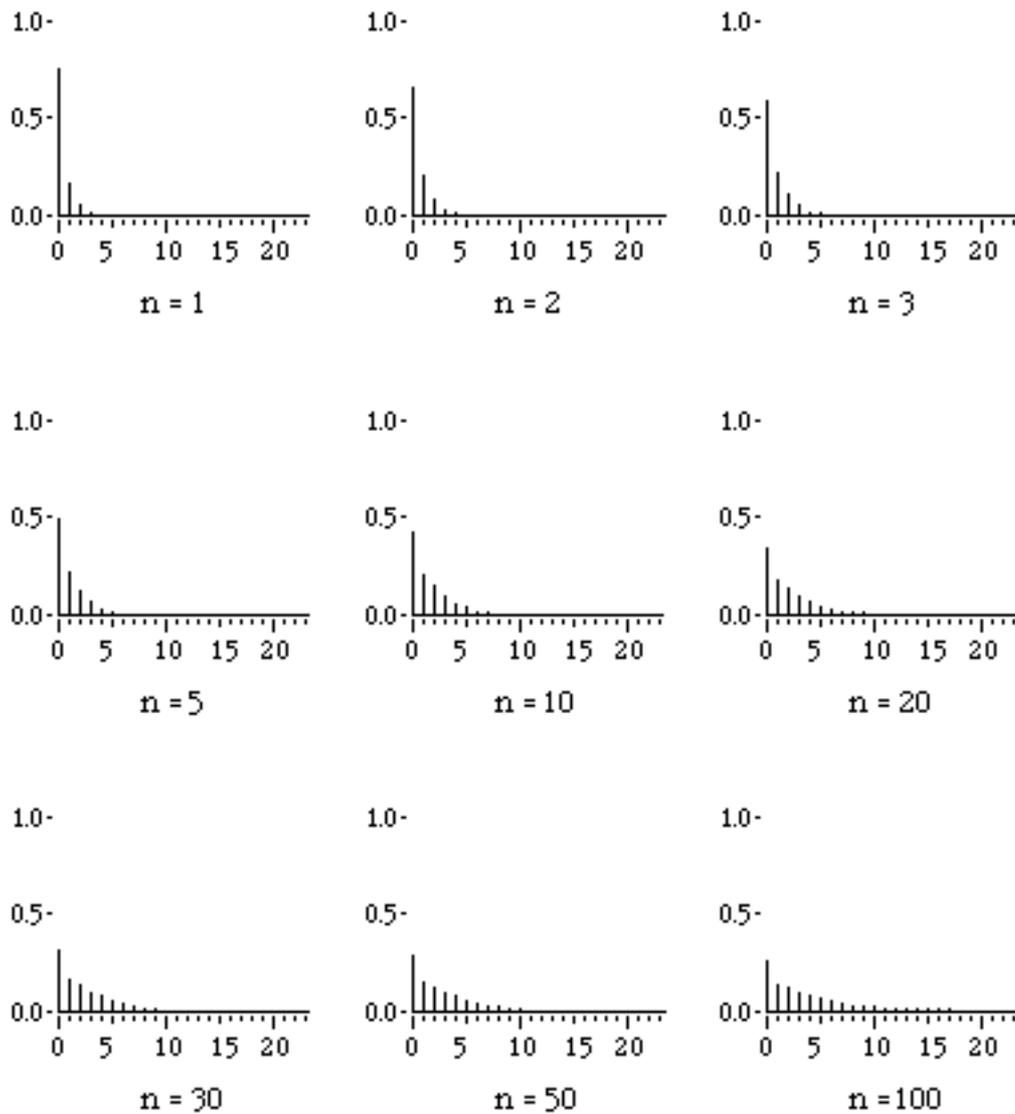


figure 38

Ici on représente la même chose que sur la figure 36, mais pour $\lambda = 0.9$ au lieu de 0.76. En comparant les deux figures, on peut observer que la barre d'abscisse zéro – qui représente la probabilité de n'avoir aucune queue – diminue ici plus vite, et les autres barres augmentent plus vite, ce qui est bien conforme à l'évidence. Mais on peut calculer quantitativement : par exemple la probabilité limite pour que la queue dépasse douze véhicules (obligeant ainsi les usagers à attendre leur tour plus de douze minutes) est ici de 7%, alors qu'elle était insignifiante pour $\lambda = 0.76$.

Lois de probabilité asymptotiques

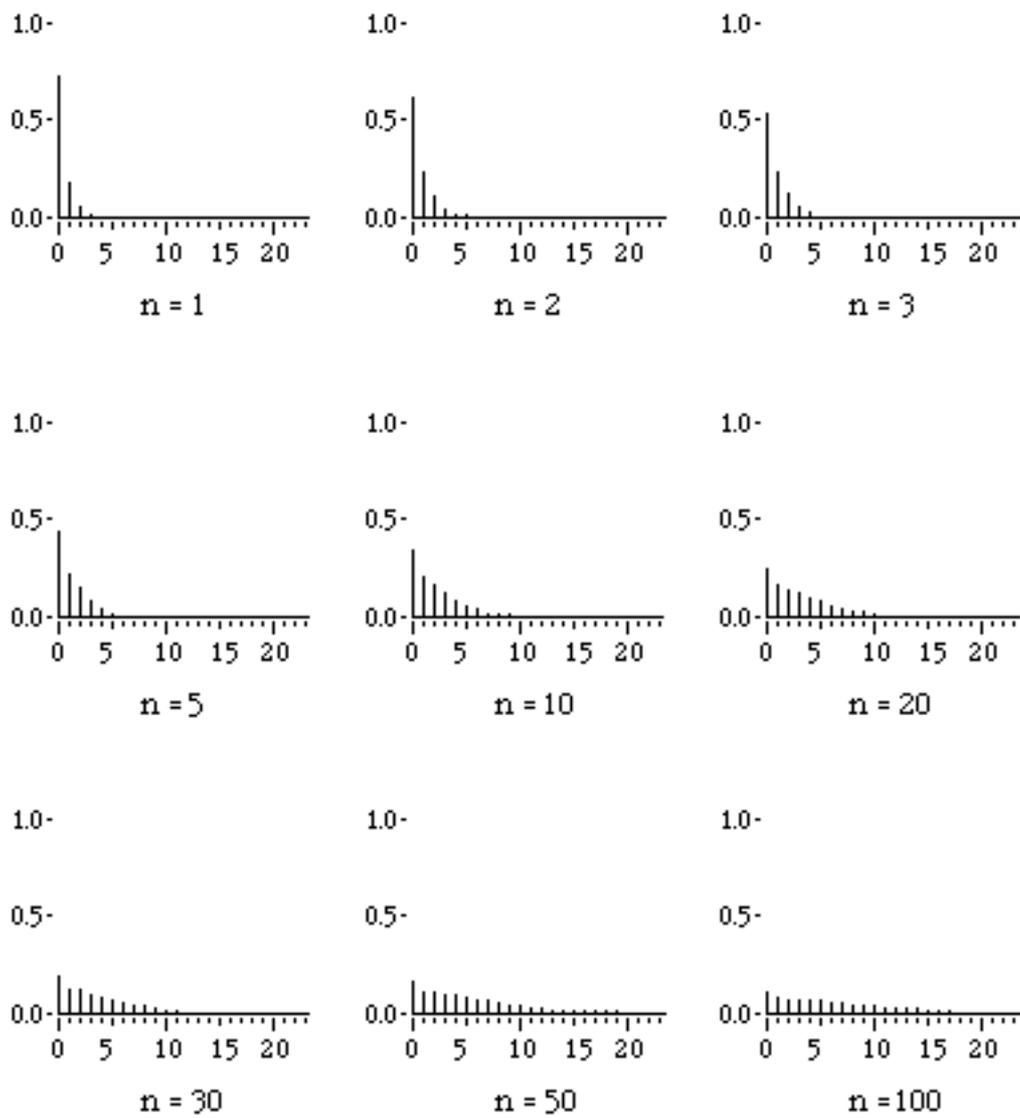


figure 39

Même chose que dans les figures 36 et 38, mais avec cette fois $\lambda = 0.99$.

On voit que $G''(0)$ est déjà relativement compliquée et cela permet d'imaginer à quoi pourrait ressembler par exemple $\mathcal{P}(Q = 12)$ si au lieu de le calculer numériquement par itérations, on en voulait une expression analytique formelle en fonction de λ .

Pour les valeurs en $z = 1$ on obtient des rapports indéterminés en $0/0$; on peut lever l'indétermination en recourant à la règle de l'Hospital, mais il est plus commode de revenir à IX.16. qu'on dérive trois fois; ainsi :

$$\begin{aligned} [z - F(z)]G(z) &= (z - 1)F(0)G(0) \\ [1 - F'(z)]G(z) + [z - F(z)]G'(z) &= F(0)G(0) \\ -F''(z)G(z) + 2[1 - F'(z)]G'(z) + [z - F(z)]G''(z) &= 0 \\ -F'''(z)G(z) - 3F''(z)G'(z) + 3[1 - F'(z)]G''(z) + [z - F(z)]G'''(z) &= 0 \end{aligned}$$

remplaçant après coup z par 1 , on obtient $0 = 0$ pour la première ligne et $1 - \lambda = F(0)G(0)$ pour la seconde (ce qui n'apporte rien de nouveau), mais $-F''(1) + 2(1 - \lambda)G'(1) = 0$ pour la troisième et $-F'''(1) - 3F''(1)G'(1) + 3(1 - \lambda)G''(1) = 0$ pour la quatrième, ce qui donne aisément ce qu'on cherche :

$$\begin{aligned} G'(1) = \mathbf{E}(Q) &= \frac{F''(1)}{2(1 - \lambda)} = \frac{\lambda^2}{2(1 - \lambda)} \\ G''(1) &= \frac{F'''(1) + 3F''(1)G'(1)}{3(1 - \lambda)} = \frac{\lambda^3(\lambda + 2)}{6(1 - \lambda)^2} \end{aligned}$$

d'où la variance

$$\mathbf{Var}(Q) = G''(1) + \mathbf{E}(Q) - \mathbf{E}(Q)^2 = \frac{6\lambda^2 - 2\lambda^3 - \lambda^4}{12(1 - \lambda)^2}$$

Le moment est maintenant venu de résumer et de critiquer notre approche de ce problème des queues aux guichets. Pour le résoudre nous avons copieusement recouru à des approximations, qui nous étaient offertes sous la forme de lois asymptotiques, en l'occurrence la loi de Poisson et un passage à la limite.

La loi de Poisson est d'abord apparue comme celle (évidemment approchée) du nombre de véhicules qui arrivent pendant une minute, à condition de supposer, ce qui est essentiel, que la densité du trafic, définie par le flux moyen instantané $\lambda = 0.76$ véhicules par minute, est stable. En admettant que le flux instantané reste stable pendant une heure, on peut le mesurer en comptant le nombre de véhicules qui sont passés pendant une heure, puis en divisant ce nombre par soixante; si le flux instantané était resté stable pendant deux heures, on aurait compté le nombre de véhicules passés

Lois de probabilité asymptotiques

pendant ces deux heures, et on aurait divisé ce nombre par cent-vingt. S'il n'était resté stable que pendant une demie-heure, on aurait divisé le nombre de véhicules passés pendant la demie-heure par trente. Plus haut, nous avons comparé cette idée de flux instantané à celui de vitesse instantanée en cinématique. On rencontre cependant ici une différence essentielle avec la cinématique.

Lorsqu'on veut définir la vitesse instantanée d'un mobile, on commence, comme nous avons fait ici, par définir la vitesse moyenne au cours d'un intervalle de temps; disons pour fixer les idées qu'on la mesure en mètres par seconde. Sur une heure, c'est la distance parcourue en mètres, divisée par 3 600. Sur une minute, c'est la distance parcourue divisée par 60. On admet que lorsque l'intervalle de temps devient petit (par exemple une seconde), cette vitesse moyenne tend vers une limite, au point que si on mesurait la distance parcourue pendant un milliardième de seconde, et qu'on la divisait par 10^{-9} , on trouverait la même limite (ou une valeur plus exacte de cette limite, d'autant plus exacte que l'intervalle serait plus court). Avec le flux il n'en va plus de même, car le flux moyen calculé sur un intervalle de temps long (deux heures, une heure, une demie-heure) a des chances de rester à peu près le même ($\simeq 0.76$) à cause de la loi des grands nombres; par contre, si on compte le nombre de véhicules qui passent pendant une minute, on n'obtiendra pas 0.76, mais des valeurs entières aléatoires 0, 1, 2, 3, ... distribuées justement selon la loi de Poisson. Loin de se rapprocher d'une limite, on obtiendra des valeurs de plus en plus divergentes lorsque la durée de l'intervalle sera rendue plus courte: par exemple, le nombre de véhicules arrivant pendant une seconde sera presque toujours 0, rarement 1, et pratiquement jamais 2 (il sera donné par la loi de Poisson de paramètre $\lambda/60 = 0.76/60 \simeq 0.01267$, qui donne 0.987 pour la probabilité d'avoir zéro véhicule, mais seulement 0.0125 pour la probabilité d'avoir un seul véhicule, et 0.000079 pour la probabilité d'avoir deux véhicules).

Le flux instantané ne peut pas être mesuré s'il varie sans cesse, car la loi des grands nombres est indispensable pour sa détermination; il faut donc s'assurer de sa stabilité par des mesures préalables. Dans le cas du péage d'autoroute, il se peut que le flux instantané varie beaucoup au cours de la journée, mais se répète d'une journée à l'autre (en excluant évidemment les dimanches et jours fériés, les départs en vacances, etc.). Par exemple le flux peut être constamment variable, être différent à 8 heures, 8 heures trente, 9 heures, 9 heures trente, ..., mais être identique tous les jours à 8 heures, ou tous les jours à 8 heures trente. On pourra donc mesurer le flux moyen en additionnant sur vingt jours le nombre de véhicules qui arrivent entre 8 h. et 8 h. 05, puis entre 8 h. 05 et 8 h. 10, etc. Tous les procédés statistiques utilisables auront en commun de reposer

sur une hypothèse d'invariance: soit stabilité sur une durée suffisamment longue, soit similitude des différentes journées entre elles. Comme cela avait été longuement expliqué au chapitre **I**, la notion de probabilité exige une hypothèse d'invariance; nous voyons sur l'exemple présent qu'il en va de même lorsqu'on veut *mesurer*.

L'invariance permet de calculer des probabilités a priori, que nous avons opposées aux probabilités empiriques; mais lorsqu'on veut mesurer de telles probabilités empiriques il faut aussi s'assurer qu'il y a une invariance quelque part. Ici, c'est l'invariance au cours du temps ou *reproductibilité*.

Au chapitre **I** nous avons signalé une analogie entre l'équiprobabilité qui résulte d'une invariance, et le temps physique qui résulte des invariances galiléennes. Poursuivant cette comparaison, nous pouvons dire que la mesure du temps (c'est-à-dire la réalisation d'appareils mesurant le temps) exige un principe physique préalable d'invariance: la mesure du temps présuppose une conviction (que seule une perception théorique peut donner) quant à l'homogénéité de l'écoulement du temps. De même on ne peut prétendre mesurer de probabilités empiriques sans postuler la loi des grands nombres, et pour que ce postulat soit valide, il faut une conviction que les conditions se reproduisent, que par exemple le trafic se reproduit à l'identique d'un jour à l'autre.

Il va de soi que la précision de mesures ainsi basées sur une hypothèse de reproductibilité très approximative et sur la loi des grands nombres ne peut en aucun cas atteindre la seconde décimale; ainsi la valeur supposée de 0.76 pour le flux instantané supposé constant pourrait aussi bien avoir été de 0.7 ou 0.8 véhicules par minute. Il est très rare que des moyennes statistiques ou des probabilités empiriques soient connues avec une précision plus grande. En effet, la loi des grands nombres, avec les fluctuations gaussiennes étudiées au chapitre **VII**, nous a montré que l'écart-type des fluctuations était de l'ordre de la racine carrée du grand nombre. Cela signifie que si on détermine la moyenne λ en comptant le nombre de véhicules passés pendant une heure (qui est donc $0.76 \times 60 \simeq 105$), l'incertitude relative sera de l'ordre de $1/\sqrt{105}$, c'est-à-dire du dixième.

Il faut donc partir du principe que dans des problèmes comme celui du péage d'autoroute, ainsi que dans tous les problèmes de statistiques humaines ou industrielles, les probabilités sont déterminées au dixième, ou à la rigueur dans des cas exceptionnels, au centième près. Il n'y a guère que la physique statistique où on peut aller au delà, le grand nombre étant celui d'Avogadro ($\sim 10^{24}$); les grandeurs sont alors en principe définies (mais rarement *effectivement connues*) à 10^{-12} près.

On peut conclure que dans le calcul des probabilités une approximation

Lois de probabilité asymptotiques

même grossière est *toujours* meilleure qu'une expression mathématique compliquée. Il ne faut donc pas hésiter à utiliser l'approximation gaussienne, même pour la somme de dix ou vingt variables indépendantes, ou la formule de Stirling pour des factorielles : pour $4! = 24$ la formule de Stirling donne 23.506, pour $3! = 6$ elle donne 5.836, pour $2! = 2$ elle donne 1.919, et même pour $1! = 1$ elle donne 0.922 : à 10% près, la formule de Stirling est correcte pour *n'importe quelle factorielle*, 0! excepté.

On peut également utiliser l'approximation plus précise

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi(n + 1/6)}$$

qui donne 1.075 827 pour 1!, 2.078 921 pour 2!, et 6.160 443 pour 3!; même 0! est alors approché par 1.023 327. Une précision relative de 2% dès $n = 0$, et qui s'améliore encore quand n augmente : 1% pour $n = 8$, 0.5% pour $n = 16$, 0.2% pour $n = 40$, ...

IX.5. Autres lois asymptotiques.

En discutant l'exemple de la densité de Cauchy, nous avons remarqué que celle-ci apparaissait plutôt comme un déguisement de la loi normale, par l'effet d'une déformation non linéaire. Nous avons même pu démontrer mathématiquement que n'importe quelle densité fixée à l'avance pouvait être obtenue comme une déformation non linéaire de la densité gaussienne. Il en va de même pour la loi de Poisson : on pourrait démontrer que n'importe quelle loi discrète peut être obtenue artificiellement comme une déformation non linéaire de la loi de Poisson. Mais il ne s'agirait que de constructions artificielles qui ne répondraient pas à la véritable question : "quelles lois limites (asymptotiques) rencontre-t-on dans des problèmes ayant une pertinence réelle?" (cette question a été discutée à la fin de la section 2).

Bien que ce chapitre soit spécialement consacré aux lois asymptotiques, la plupart de ces lois ont été ou seront rencontrées dans d'autres chapitres à propos de problèmes particuliers. C'est pourquoi nous concluons par un petit catalogue des lois asymptotiques restantes, avec référence au chapitre où elles sont traitées.

La loi du dernier retour

Elle a été rencontrée au chapitre III. Nous avons calculé alors que pour une marche aléatoire de $2n$ pas, la probabilité R_k pour que la marche soit passée *pour la dernière fois* par zéro à l'instant $2k$ est

$$R_k = 2^{-2n} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \quad (IX.18.)$$

On en déduisait que la probabilité pour que le dernier retour avant l'instant $2n$ se soit produit *avant* l'instant 2ℓ est

$$S_\ell = \sum_{k=1}^{k=\ell} R_k$$

Lorsque n est grand on peut approcher R_k par $1/[\pi\sqrt{k(n-k)}]$ en approchant les factorielles des coefficients binômiaux par la formule de Stirling, puis remarquer que la somme des R_k est la somme de Riemann de l'intégrale

$$\int_0^{\ell/n} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} dt$$

d'où on déduit que

$$S_\ell \simeq \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\ell}{n}} \right)$$

Ces résultats font donc apparaître une densité asymptotique: lorsque n est grand, la loi de $\frac{1}{n} R_k$ a pour densité la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } 0 < t < 1; \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ ou } t \geq 1. \end{cases} \quad (IX.19.)$$

La variable R_k ne pouvant prendre des valeurs en dehors de $0 < k < n$, il est logique que la densité f soit nulle (ou non définie) en dehors de $0 < t < 1$.

L'approximation qui conduisait à la densité (IX.19) reposait sur la formule de Stirling $n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. Celle-ci n'est en principe correcte que pour n grand; elle a été appliquée à l'expression (IX.18) de la probabilité R_k , qui contient les factorielles $(2k)!$, $k!$, $(2n-2k)!$, et $(n-k)!$ donc il faut que k et $n-k$ soient tous deux assez grands. Voyons ce que cela donne en pratique: pour $n = 1000$ et $k = 1$ on obtient $R_1 = 0.0089$ (valeur exacte) et $R_1 \simeq 0.0101$ (valeur approchée), soit une différence relative de 12%; pour $k = 2$, $R_2 = 0.0067$ (valeur exacte) et $R_2 \simeq 0.0071$ (valeur approchée), soit une différence relative de 6.3%. Pour $k = 10$, $R_{10} = 0.00316$ (valeur exacte) et $R_{10} \simeq 0.00320$ (valeur approchée), soit une différence relative de 1.2%. La seule erreur vraiment grosse concerne les extrémités, $k = 0$ ou $k = n$, car alors la valeur approchée est infinie et la valeur exacte $R_0 = 0.0178$. On peut constater sur les valeurs numériques données ci-dessus que la valeur approchée est toujours plus grande que la valeur exacte calculée par les factorielles; pour de petites valeurs de k , la différence ne diminue pas lorsque n tend vers l'infini, mais ces valeurs représentent par contre une proportion

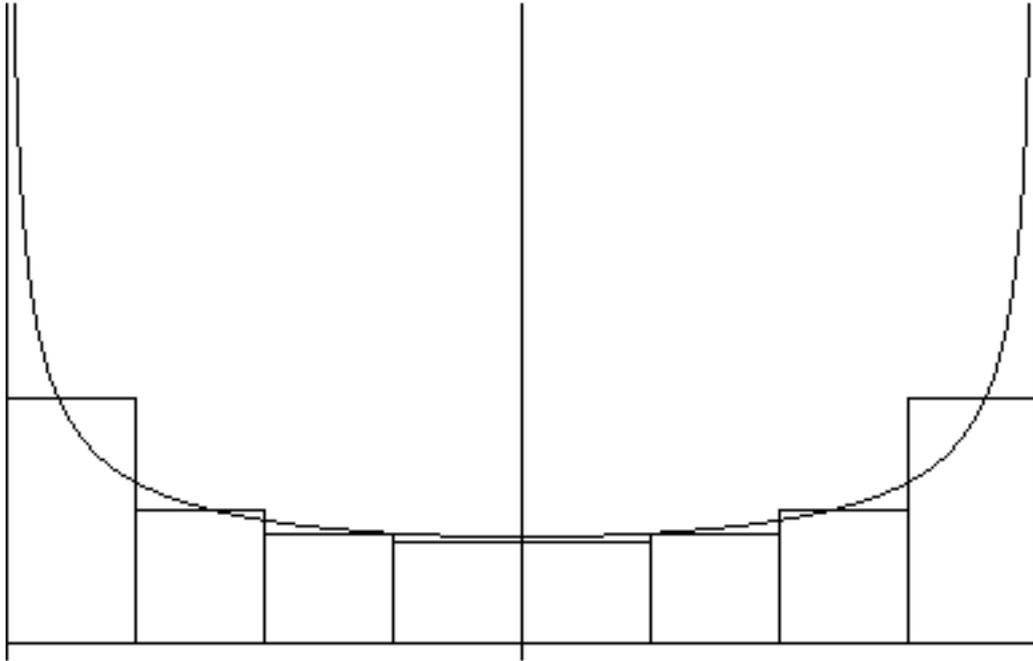


figure 40a

Ce graphique compare les probabilités de dernier retour R_k pour $k = 0 \dots 7$ ($n = 7$), représentées par les hauteurs des huit rectangles, à la densité $f(x) = 1/\pi\sqrt{x(1-x)}$.

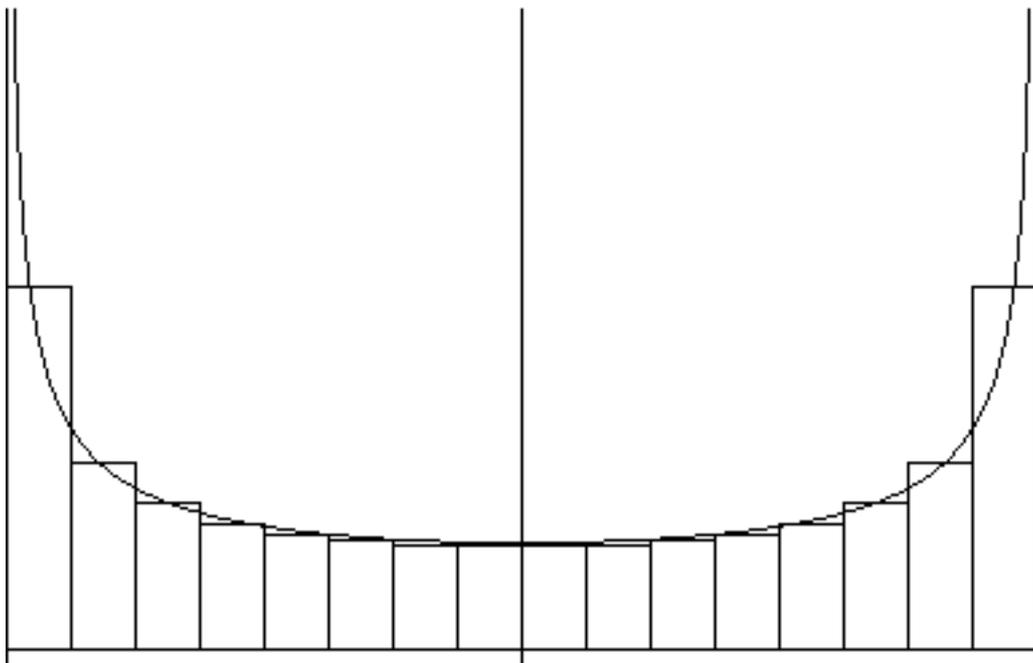


figure 40b

Ici $n = 15$, les probabilités R_k sont représentées par les hauteurs des seize rectangles, la courbe de la densité $f(x)$ est inchangée.

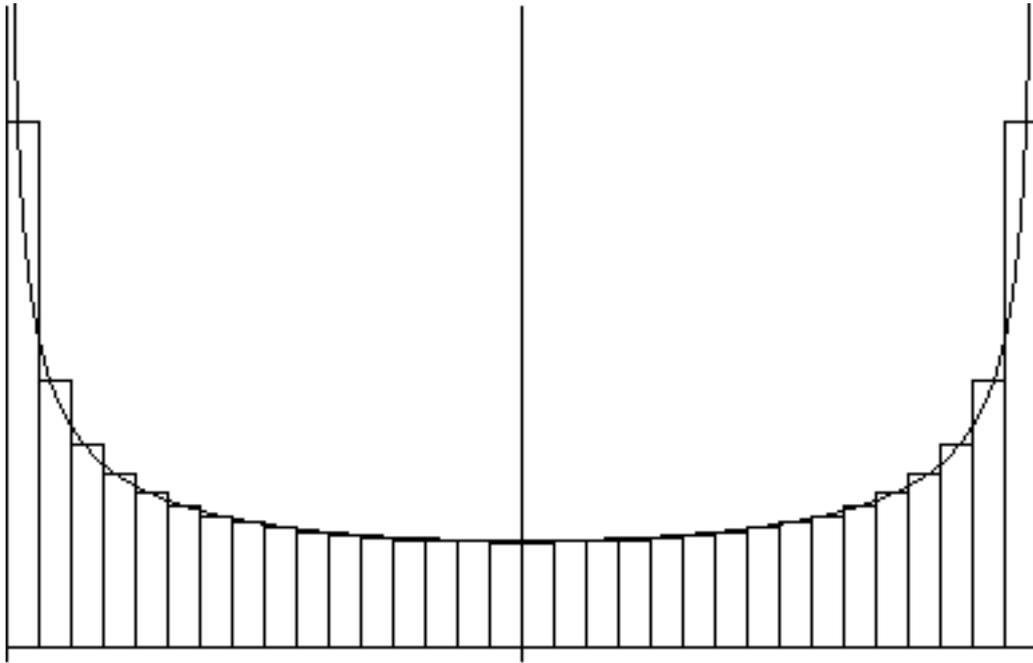


figure 40c

Même chose pour $n = 31$.

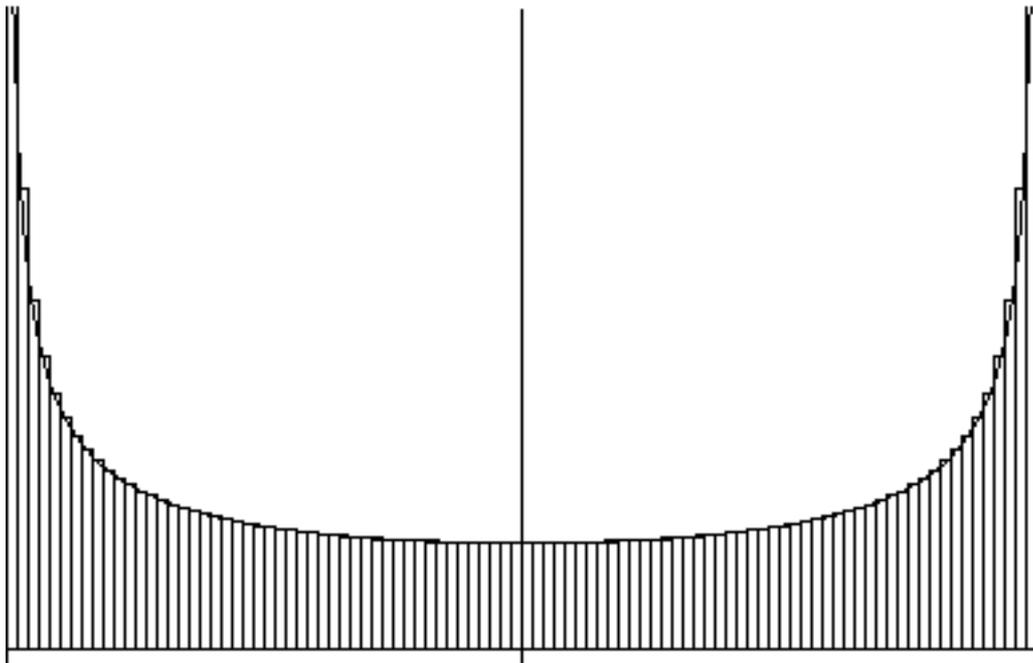


figure 40d

$n = 95$.

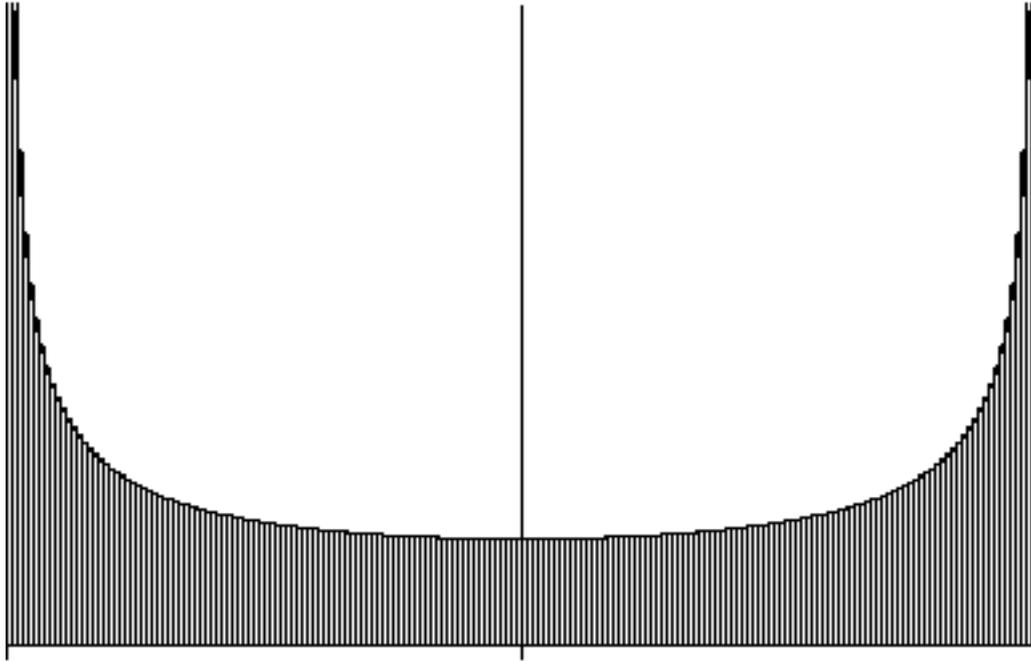


figure 40e

$n = 191$. Il est devenu impossible de distinguer les sommets des rectangles de la courbe.

de plus en plus petite de l'ensemble de toutes les valeurs (qui vont de zéro à n).

On peut voir sur les figures 40 (a, b, c, d, e) comment la loi discrète se rapproche de la densité asymptotique. Ces figures se passent de commentaire.

La loi de Bernoulli.

En statistique, un procédé classique est le *sondage par échantillon*. On veut étudier un certain caractère dans une population (par exemple combien d'électeurs vont voter pour le Parti du Progrès). Au lieu d'interroger tout le monde, on prend au hasard un échantillon de deux mille personnes. Le principe est que la probabilité pour que la proportion des partisans du Progrès dans l'échantillon diffère sensiblement de la proportion réelle dans la population totale, est faible. Mais cela n'est vrai que pour des échantillons assez gros.

On peut utiliser les méthodes qui ont été présentées dans ce livre pour calculer cette probabilité: on cherche une invariance, puis on calcule par dénombrement, ce qui conduira à une formule pleine de factorielles; ensuite,

on cherche une approximation simple qui s'applique aux grands entiers, ce qui donnera une loi asymptotique.

L'invariance résulte du choix *au hasard* de l'échantillon: "au hasard" signifie que tous les échantillons sont équiprobables. Dans une population de N personnes, il y a $\binom{N}{n}$ échantillons de taille n . Le problème sera étudié en détail au chapitre **X**, section **2** (*la théorie des échantillons de Bernoulli*), de sorte que le lecteur y est renvoyé pour les calculs. Si p est le nombre de partisans du Progrès dans la population totale, la probabilité pour que l'échantillon de n personnes tiré au hasard en contienne k est

$$p_k = \frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{N-n}{p-k}}{\binom{N}{p}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(N-n)!}{(p-k)!(N-p-n+k)!} \cdot \frac{N!}{p!(N-p)!}$$

Ceci est la loi "mathématiquement exacte", qui est valable quels que soient les nombres N , p , n , et k . On l'appelle *la loi hypergéométrique*.

Cette loi gouverne les problèmes de tirage du type: *Une urne contient N boules, dont p blanches et $N - p$ noires. On tire au hasard et sans remise n boules dans l'urne; quelle est la probabilité pour que l'échantillon tiré contienne k boules blanches et $n - k$ boules noires?*

Si n est beaucoup plus petit que N , on peut faire les approximations suivantes:

$$\begin{aligned} (N-n)! &= \frac{N!}{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)} \simeq \frac{N!}{N^n} \\ (p-k)! &= \frac{p!}{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)} \simeq \frac{p!}{p^k} \\ (N-p-n+k)! &= \frac{(N-p)!}{(N-p)(N-p-1)\cdots(N-p-n+k+1)} \\ &\simeq \frac{(N-p)!}{(N-p)^{n-k}} \end{aligned}$$

(ces approximations supposent évidemment que $n \ll N$, $k \ll p$, et $n - k \ll N - p$). Par conséquent, si on pose $\alpha = p/N$ et $\beta = (N - p)/N = 1 - \alpha$, on aura:

$$p_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{\binom{N-n}{p-k}}{\binom{N}{p}} \simeq \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$

Cette approximation, valable pour N grand, est donc une loi asymptotique, appelée *loi de Bernoulli*. On peut aussi la rencontrer sous une forme non

Lois de probabilité asymptotiques

asymptotique dans le problème de l'urne cité plus haut, mais pour des tirages *avec* remise : si on tire successivement et avec remise n boules dans l'urne, à chaque tirage la probabilité de tirer une boule blanche est $\alpha = p/N$; la fonction génératrice pour chaque tirage est donc $G(z) = \alpha + \beta z$; les tirages avec remise sont indépendants, donc la fonction génératrice pour n tirages est $(\alpha + \beta z)^n$; en développant selon la formule du binôme, on retrouve bien la loi de Bernoulli.

Il n'est évidemment pas surprenant que la loi sans remise donne asymptotiquement pour N grand la même loi qu'avec remise : en effet, si $n \ll N$, le tirage de n boules sans remise modifie à peine les proportions de boules noires ou blanches, de sorte qu'on doit obtenir à peu près le même résultat qu'avec remise.

Nous ne mentionnons cette loi ici que pour insister sur le fait qu'elle peut aussi se rencontrer sous forme asymptotique. De toute façon elle sera étudiée en détail au chapitre **X**.

Cette loi décrit le sondage par échantillon lorsque $n \ll N$; mais signalons — ce sera étudié au chapitre **X** — que si n devient lui-même grand, ainsi que k et $n - k$, la loi de Bernoulli devient gaussienne : comme la loi de Poisson, la loi de Bernoulli est une loi asymptotique de l'échelle intermédiaire ; si n est grand, mais que k reste petit et $\beta \exp\{\alpha/\beta\} \simeq 1$ (par exemple $k \leq 10$, et $10 \ll n \ll N$) alors la loi de Bernoulli devient une loi de Poisson. Cela montre que la même loi hypergéométrique peut se transformer en plusieurs sortes de lois asymptotiques selon l'échelle, c'est-à-dire selon les ordres de grandeur relatifs des nombres entiers N, p, n , et k . Mais on constate que l'on retrouve toujours la même famille : loi gaussienne ou loi de Poisson. Cela provient de ce que la loi de Bernoulli est la loi d'une somme de variables indépendantes.

Les lois du khi-deux et de Student.

Enfin, deux lois asymptotiques à densité continue que nous signalons sans insister : la loi du khi-deux ou χ^2 est la densité d'une somme de *carrés* de variables gaussiennes indépendantes. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes, ayant chacune une loi de densité gaussienne de variance 1 et de moyenne 0, alors la somme des carrés $S = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ aura la densité χ^2 à n degrés de liberté. Cette densité sera étudiée en détail au chapitre **XI**. Elle est à la base d'un test statistique simple et bien connu.

La loi de Student est la loi du quotient d'une variable gaussienne par la racine carrée d'une somme de carrés de gaussiennes : si Y, X_1, X_2, \dots, X_n sont $n + 1$ variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de variance 1 et

de moyenne 0, alors la variable

$$T = \frac{Y}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}}$$

aura une loi de densité de Student. Cette densité aussi est, tout comme celle du χ^2 , à la base d'un test statistique bien connu, et sera étudiée dans cet esprit au chapitre **XI**.

Comme le montrent leurs définitions même, ces lois ne sont, comme la loi de Cauchy, qu'un déguisement de la loi normale. Leur fonction est de simplifier le travail des statisticiens en fournissant des tests *clés en main*. Ces densités ne se rencontrent pas directement "dans la nature"; elles apparaissent parce qu'on choisit délibérément, pour la commodité du test, de calculer les grandeurs de manière non linéaire (somme des carrés des écarts).

On peut noter que la loi de Cauchy est le cas particulier de la loi de Student pour $n = 1$.

X. LES FONDEMENTS DE LA STATISTIQUE.

X.1. Le principe des tests statistiques.

Nous avons vu que si on jette par exemple mille fois une pièce de monnaie, le nombre N de pile est une variable aléatoire pouvant prendre toutes les valeurs entre zéro et mille; la plus probable est 500 et la probabilité d'avoir $500 + j$ pile est environ

$$\frac{1}{\sqrt{500}\pi} \exp\left\{-\frac{j^2}{1000}\right\}$$

en supposant que pile ou face a à chaque fois exactement une chance sur deux de sortir. On peut constater ceci: pour $j = 10$, $\exp\{-j^2/1000\} = e^{-0.1} \simeq 0.99$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir 510 (ou 505, ou 507) est pratiquement la même que celle d'obtenir 500. Par contre pour $j = 100$, $\exp\{-j^2/1000\} = e^{-10} \simeq 0.000045$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir 600 est 22000 fois plus petite que celle d'obtenir 500. Si on fait l'expérience avec une pièce correctement équilibrée, il n'y a pratiquement pas plus de chances d'obtenir *exactement* 500 pile plutôt que 501 ou 499; la probabilité d'obtenir 500 (ou 501 ou 499) est à peu près $1/\sqrt{500}\pi \simeq 1/40$, et il y a à peine moins de chances d'obtenir 507, 485, ou 511. Par contre il est extrêmement peu probable d'obtenir 600 (une chance sur 873000); la probabilité d'obtenir pile 600 fois *ou plus* est la somme des probabilités d'obtenir k pile, de $k = 600$ à $k = 1000$, et est environ $1/250000$.

Par conséquent, si après avoir fait cette expérience on obtient 600 pile, on est fondé à en déduire que la pièce est mal équilibrée et que pile avait plus de chances de sortir que face (que par exemple la probabilité d'avoir pile n'est pas 0.5, mais plutôt 0.6). Par contre si on obtient 511 pile, on n'est absolument pas fondé à en déduire que la pièce est mal équilibrée (que par exemple la probabilité d'avoir pile serait 0.511 plutôt que 0.500), car avec une pièce parfaitement équilibrée on avait à peu près autant de chances de faire 511 que 500.

Un des problèmes de la statistique est de pouvoir déterminer ainsi, par des tests *quantitatifs*, si on est fondé ou non à considérer un écart par rapport à la valeur attendue d'un paramètre comme une fluctuation normale due au hasard, ou si au contraire cet écart est extrêmement peu probable, ce qui conduit alors à penser que la valeur attendue avait été incorrectement déterminée. Dans l'analyse ci-dessus du jeu de pile ou face, on a pu calculer

la probabilité pour qu'un écart donné soit dû à une fluctuation aléatoire, *parce qu'on* connaissait la loi de probabilité (binômiale) de ces fluctuations.

Le jeu de pile ou face est ici un exemple scolaire, c'est-à-dire un exemple choisi pour son extrême simplicité, qui permet de tout calculer et de montrer ainsi comment la théorie fonctionne. Dans la pratique (du moins celle où justement la statistique est le plus nécessaire), les situations ne sont pas aussi nettes.

Si par exemple on teste un nouveau médicament contre l'hypertension, on compare la diminution de tension à celle qui est attendue en l'absence de médicament. Il est très rare que les effets d'un médicament soient clairs au point d'amener une amélioration qui n'aurait qu'une chance sur un million de se produire par hasard en l'absence de médicament (mais on peut considérer que les *véritables* médicaments sont précisément ceux-là). Le plus souvent on admet que le médicament a un effet si l'amélioration constatée n'avait qu'une chance sur vingt ou sur cent de se produire par hasard. Les tests de nouveaux médicaments sont généralement effectués selon le principe suivant: on administre le médicament à un groupe de malades (disons de cent personnes pour fixer les idées) pendant une durée déterminée. Il n'y a aucun moyen de connaître a priori la probabilité des améliorations spontanées de l'état des malades; c'est pourquoi on choisit un autre groupe de cent personnes ayant la même maladie (en l'occurrence de l'hypertension), et qui ne recevront pas le médicament (ce second groupe est appelé le groupe témoin). Dans le groupe témoin on peut également observer des améliorations de l'état des malades, qui sont soit spontanées, soit dues aux soins normaux (par exemple régime sans sel). La différence entre la valeur moyenne de la tension dans le groupe témoin et le groupe traité est alors considérée comme une estimation de l'espérance mathématique de la baisse de tension induite par le médicament que l'on veut tester.

Afin d'éliminer tout effet subjectif, au lieu de simplement s'abstenir d'administrer un médicament aux personnes du groupe témoin, on leur distribue un placebo sous une forme exactement identique au médicament (par exemple le médicament est préparé sous forme de comprimé contenant la substance active et un excipient; le placebo est alors un comprimé d'apparence exactement identique, fabriqué avec le même excipient, mais sans la substance active), et en veillant à ce que les malades ignorent si le comprimé qu'ils reçoivent est actif ou inactif. On dit alors que l'expérience a lieu en (simple) aveugle. Afin d'éviter également un effet subjectif par l'intermédiaire du personnel soignant, on distribue les boîtes de comprimés de façon indifférenciée, le placebo ne se distinguant du médicament que par un code que les expérimentateurs sont seuls à connaître. On dit alors que l'expérience a lieu en double aveugle. Tel est du moins le *principe* de

l'expérimentation, car la pratique peut s'en écarter. Ainsi, une enquête de l'épidémiologiste Kenneth Schulz révèle que sur quatre cents médecins, la moitié déclare connaître des collègues qui n'ont pas respecté le protocole et obtenu illicitement les codes qui devaient être tenus secrets (*New Scientist*, vol **2008**, 1996, page 10).

Si on constate davantage d'améliorations dans le groupe traité que dans le groupe témoin, on ne peut pas en déduire que le médicament est efficace, car la différence entre les deux groupes peut être due au seul hasard : soit que par hasard il y a eu moins d'améliorations spontanées que la moyenne dans le groupe témoin, soit que par hasard il y en ait eu plus que la moyenne dans le groupe testé, le médicament lui-même étant totalement inefficace. Toutefois, si on peut montrer que la probabilité pour que la différence constatée entre les deux groupes soit due au hasard est très faible (par exemple 0.01), on peut tenir le raisonnement suivant : il n'y avait qu'une chance sur cent pour que les résultats constatés se produisent par hasard ; il n'y a donc "qu'une chance sur cent" de se tromper en attribuant la différence à une cause ; or on a veillé, en rendant toutes les conditions identiques pour les deux groupes, à ce que la seule cause possible soit le médicament. On tient alors un raisonnement analogue à celui qui avait été tenu pour le jeu de pile ou face. Mais tout le problème est justement de savoir *comment on calcule* cette probabilité : dans le jeu de pile ou face, on connaissait la loi de probabilité ; dans le cas de l'action d'un médicament sur un groupe de personnes, on ne sait rien a priori. Généralement, on postule que la loi de probabilité inconnue a une densité gaussienne, car on admet que, l'action du médicament étant par nature complexe, des causes innombrables et indépendantes les unes des autres se superposent, de sorte que d'après la propriété établie au chapitre **VII**, la loi de probabilité des fluctuations devrait avoir une densité gaussienne, bien qu'on ignore tout de leur cause. Dans certains cas rares, où on devine mieux les causes, on peut toutefois être conduit à postuler des lois non gaussiennes. La règle générale établie au chapitre **VII** est qu'on obtient des lois gaussiennes quand un grand nombre de perturbations aléatoires *indépendantes* se superposent ; mais on peut obtenir des lois non gaussiennes, si les différentes perturbations qui agissent s'influencent mutuellement : un exemple de cela est fourni par les processus en cascade (chapitre **VIII**), où la variable aléatoire Z_n n'est pas la somme de variables indépendantes.

Une fois admis que la densité de la loi de probabilité est gaussienne, il suffit de connaître la moyenne et l'écart-type pour la déterminer entièrement (et connaître la densité de la loi suffit pour calculer approximativement les probabilités). Ces deux paramètres peuvent être devinés à partir des résultats observés, et on peut alors estimer quantitativement la probabilité

pour que les valeurs devinées soient fausses, selon un raisonnement du même type que celui qui a été tenu plus haut, à propos du jeu de pile ou face, pour estimer à partir des résultats observés la probabilité que la pièce soit pipée.

Bien entendu ce type de raisonnement statistique n'est pas rigoureux : dans le cas de la pièce de monnaie, il était rigoureux ; mais pour des mécanismes complexes dont une grande part reste inconnue, on fait des hypothèses qui sont peut-être tout à fait gratuites. Rien ne garantit que les probabilités d'amélioration spontanée de l'état d'un malade soient réellement évaluables ; par exemple, que faut-il penser si au lieu de prendre un seul groupe témoin, on en prend beaucoup et qu'on constate une très forte variabilité dans la proportion de guérisons spontanées ? En outre, comme on va le voir, la question de savoir de quoi au juste on mesure ainsi la probabilité n'est elle-même pas très clairement posée.

Il se trouve que les réponses à ces questions ne sont pas simples si on veut les traiter honnêtement. Le fond de l'affaire est de savoir où intervient le hasard. Nous disions en effet "si on peut montrer que la probabilité pour que la différence constatée entre les deux groupes *soit due au hasard* est très faible, alors ...". Mais comment intervient le hasard dans cette affaire ? Dans les premiers chapitres nous avons déjà montré que le hasard n'agit pas toujours de la même façon (par exemple pour des boules ou pour des particules de Bose). Pour pouvoir dire qu'un problème de probabilité ou de statistique est traité scientifiquement, il ne suffit pas d'appliquer des formules mathématiques, il faut aussi que les conclusions qu'on en tire soient *réellement logiques*, et pour cela il faut savoir comment le hasard a agi. Le problème des tests statistiques de médicaments est brouillé par la complexité des processus biologiques ; c'est pourquoi, avant de l'aborder, nous avons étudié un exemple très simple, celui du jeu de pile ou face. Un autre exemple simple qui joue un rôle essentiel par rapport aux principes de la statistique est le *sondage par échantillons*, que nous allons étudier maintenant. La théorie mathématique du sondage par échantillon sera traitée dans la section suivante (**X.2.**), tout comme la théorie du jeu de pile ou face a été traitée (sous la forme de la marche aléatoire) au chapitre **III**. Toutefois, on peut discuter de son sens avant d'aborder la théorie mathématique. Nous reprendrons ensuite la discussion sur les tests de médicaments, à la lumière des ces deux exemples simples.

Le sondage par échantillons est un procédé très connu du grand public, puisque les media en font un usage fréquent. Pour connaître par exemple les intentions de vote des électeurs français (dont le nombre est de trente millions environ), on mène une enquête auprès d'un échantillon de mille à deux mille d'entre eux, choisis selon des critères que nous étudierons à la section suivante. On part du principe (qui sera justifié théoriquement

à la section **X.2.**) que les intentions de vote pour les différents partis se distribuent dans l'échantillon selon des proportions proches des proportions exactes, celles de la population totale. Or il se trouve que le hasard n'intervient pas du tout de la même façon dans le sondage que dans le jeu de pile ou face.

Dans le jeu de pile ou face, le hasard intervient dans le mouvement de la pièce de monnaie, car ce mouvement est chaotique, tout comme celui de la bille de billard ou de roulette analysé au chapitre **I**: en principe la position et les vitesses (de translation et de rotation) initiales déterminent le côté sur lequel la pièce tombera, mais un changement absolument infime dans ces données initiales suffit à changer ce résultat. D'un lancer à l'autre, ces paramètres initiaux sont variables. Dans le sondage, le hasard intervient dans le choix de l'échantillon.

Il n'est pas nécessaire de connaître exactement les paramètres initiaux du mouvement ni de calculer le mouvement exact, pour pouvoir dire que, si la pièce est parfaitement symétrique, elle ne peut tomber plus souvent sur pile que sur face car cela contredirait les symétries spatiales auxquelles le mouvement, tout chaotique qu'il soit, est soumis; c'est pourquoi on admet a priori que les deux côtés sont équiprobables.

Par contre si par exemple la pièce a une forme symétrique, mais est plus lourde du côté pile (le centre de gravité est alors plus près du côté pile que du côté face), ou bien si le métal est homogène, mais que la tranche est légèrement biseauté (de telle sorte que le côté face ait un diamètre légèrement plus grand que le côté pile), il se produira le phénomène suivant: lorsque la pièce sera encore sur la tranche et roulera sur la table, le centre de gravité ne sera pas à la verticale de l'aire de sustentation et la pesanteur fera pencher la pièce du côté où se trouve le centre de gravité, favorisant ainsi le côté face. Ces considérations sur le mouvement montrent donc que le hasard agit *à travers le mouvement de la pièce*. Si la pièce est bien équilibrée, il y a une raison *a priori* pour que la probabilité d'avoir face soit égale à $\frac{1}{2}$, même si on ne lance la pièce qu'une seule fois. Cette probabilité est déterminée par les lois de la Physique avant même qu'on ait procédé au premier lancer. Ce sera vrai aussi si la pièce n'est pas équilibrée et que le côté face est plus probable: il y aura une probabilité inconnue $x > \frac{1}{2}$ d'avoir face et une probabilité $1 - x < \frac{1}{2}$ d'avoir pile, mais bien qu'inconnue (et impossible ou du moins très difficile à calculer à partir des équations du mouvement et de la forme de la pièce) cette probabilité x sera néanmoins déterminée a priori par les lois de la Physique.

Dans le sondage les choses sont très différentes. Il y a (à un moment donné de la campagne électorale) une proportion x_1 d'électeurs qui se

prononceraient pour le parti du Progrès si on leur posait la question, une proportion x_2 qui se prononceraient pour le parti de la Démocratie, une proportion x_3 qui se prononceraient pour le parti de la Liberté, etc. Cela veut dire que si on posait la question à chacun des N électeurs, il y en aurait p_1 qui se prononceraient pour le parti du Progrès, p_2 qui se prononceraient pour le parti de la Démocratie, p_3 qui se prononceraient pour le parti de la Liberté, et les nombres x_1 , x_2 , x_3 sont simplement les rapports p_1/N , p_2/N , p_3/N .

Ces rapports *ne sont pas* la probabilité a priori pour qu'un électeur particulier vote pour tel ou tel parti. On peut d'ailleurs se demander ici ce que seraient de telles probabilités a priori; si on croit au réductionnisme mécaniste absolu, par exemple, on dira que la réponse de l'électeur Jean Dupond à la question du sondeur est déterminée par les lois de la Physique, étant donné que tous les mécanismes neuronaux actionnés dans le cerveau de Jean Dupond, et aboutissant à l'état dans lequel Jean Dupond éprouve la sensation que le parti du Progrès est le meilleur, sont des mouvements d'atomes et de molécules qui obéissent aux lois de la Physique. De même que pour la pièce de monnaie, la roulette, ou l'agitation thermique, on peut alors considérer ces mouvements moléculaires de neurotransmetteurs comme chaotiques, qu'ils créent donc du hasard et déterminent une probabilité a priori.

Il importe peu qu'on croie au déterminisme mécaniste absolu ou qu'on n'y croie pas; le problème débattu ici est que, s'il y a un sens à parler de probabilité a priori, ce sera la probabilité, déterminée par des causes particulières internes à Jean Dupond, pour que celui-ci déclare au sondeur son intention de voter pour le parti du Progrès. Il n'y a alors aucune raison pour que la probabilité a priori de Pierre Martin, ou de Paul Duval soit la même; il n'y a aucune raison non plus pour qu'elle soit égale à x_1 , ni même pour que la moyenne de ces probabilités a priori sur l'ensemble des électeurs soit égale à x_1 . Au lieu de prendre l'exemple des intentions de vote, pour lequel le raisonnement mécaniste est confus et très discutable, on pourrait prendre celui de la mucoviscidose (voir sections **III. 6** et **IV. 4**). Si on prend au hasard un couple marié dans la population française, il y a une chance sur deux mille qu'il procréé un enfant ayant cette maladie; mais la probabilité pour un couple donné est soit 0, soit 0.25 (ce pourrait même être 1 si les parents étaient tous deux atteints, c'est-à-dire tous deux homozygotes, mais ce cas ne se produit jamais). En prenant un couple au hasard dans la population, on fait intervenir le hasard dans le choix de ce couple; en considérant un couple particulier donné, le hasard intervient au moment de la fécondation, dans la combinaison chromosomique. Le hasard ne joue pas du tout le même rôle dans les deux cas.

Dans le jeu de pile ou face, la notion de probabilité a priori a un sens

simple et clair (elle se comprend d'après la Physique et le chaos, comme cela a été expliqué au chapitre I), et cette probabilité a priori est celle que nous retenons pour traiter le problème par le Calcul des probabilités. C'est ce que nous avons fait pour les problèmes de boules qu'on jette dans des boîtes, de particules de Bose qu'on place dans des états quantiques, la bille de roulette, etc. Dans le cas des sondages sur les intentions de vote, il y a aussi des probabilités a priori, mais qui n'ont rien à voir avec la probabilité a priori pour que tel ou tel électeur particulier donne telle ou telle réponse : ce sont les probabilités pour que, un électeur étant choisi au hasard, ce soit un partisan de l'un ou l'autre des candidats. Quant à la probabilité a priori pour qu'un individu particulier vote comme ceci ou comme cela, on ne voit guère comment lui donner un sens concret. La *signification* de la probabilité est donnée par la connaissance du niveau où intervient le hasard.

Il en va de même pour l'action d'un médicament. Un médicament agit par voie chimique : il y a donc réellement un mécanisme moléculaire par lequel le médicament fait baisser la tension artérielle (point n'est besoin de se réclamer du déterminisme mécaniste absolu pour cela). L'effet du médicament sur l'organisme est donc causal, tout comme le mouvement de la pièce de monnaie qui induisait la probabilité a priori x d'avoir face. Il n'est pas dépourvu de sens de parler de la probabilité a priori pour que le médicament, administré à Jean Dupond, induise dans les cinq heures qui suivent une baisse de tension nettement supérieure aux fluctuations *spontanées* de la tension. La calculer ou même la mesurer empiriquement est une autre histoire, mais il est également rationnel d'admettre que les fluctuations spontanées de la tension suivent une loi de probabilité approximativement gaussienne. On peut tenir pour fantaisiste l'explication mécaniste des intentions de vote, mais le mécanisme moléculaire de l'action d'un médicament est un fait soigneusement établi.

Les deux notions de probabilité se distinguent par le lieu où intervient le hasard :

— lorsqu'une personne est choisie au hasard dans un groupe et qu'on demande la probabilité pour que le médicament ait agi (ou pour que la personne choisie préfère le candidat du Progrès), le hasard intervient dans le choix, par le sondeur, de cette personne ;

— lorsqu'il n'y a pas de groupe, mais une seule personne présente, et qu'on demande la probabilité pour que, si on administre le médicament à *cette personne*, celui-ci agisse sur elle, le hasard intervient dans le chaos moléculaire du métabolisme.

Appelons la première *probabilité statistique* et la seconde *probabilité biochimique*. Il n'y a évidemment aucune raison pour que ces probabilités

coïncident.

L'effet biochimique du médicament sur l'organisme est différent chez chaque personne : le médicament peut provoquer avec certitude une chute de tension chez Jean Dupond, mais rien du tout (si ce n'est des effets secondaires) chez Pierre Martin. Cette différence est due à une cause, par exemple des métabolismes différents : il se peut que l'hypertension de Jean Dupond soit due à une mauvaise élimination du sel (insuffisance rénale), tandis que celle de Pierre Martin serait due à une autre cause (par exemple des états de stress peuvent induire la production d'hormones provoquant une vasoconstriction, c'est-à-dire un resserrement des artères) ; si le médicament accélère l'élimination du sel, il agit sur l'hypertension de Jean Dupond, mais pas sur celle de Pierre Martin. Dans les deux cas la probabilité biochimique a priori est différente : celle de Jean Dupond est proche de 1, celle de Pierre Martin proche de 0. Le mécanisme biochimique détermine une probabilité a priori pour que le médicament entraîne une chute de tension, tout comme le mouvement chaotique de la pièce de monnaie déterminait une probabilité a priori d'avoir pile ou face.

Le test clinique du médicament par contre consiste à faire un sondage, en prélevant sur l'ensemble de la population des personnes hypertendues un groupe de cinquante, cinq cents, ou cinq mille personnes, et à noter combien réagissent positivement au traitement. Si le médicament agit sur 80% des personnes du groupe, on pourra dire qu'environ 80% de la population générale des personnes hypertendues répond au traitement. Mais cela ne signifie pas que chaque personne a une probabilité biochimique 0.8 d'être guérie, cela signifierait plutôt que 80% des personnes hypertendues élimine mal le sel, l'hypertension ayant alors chez les 20% restants une cause différente. La signification de cette probabilité statistique est très prosaïque : si vous allez consulter pour hypertension, alors, pour le médecin qui prescrira le médicament en ne connaissant que le symptôme (l'hypertension), mais non la cause (mauvaise élimination du sel), il y aura 80% de chances qu'il s'applique à vous ; par contre pour vous, si votre hypertension a une autre cause, il y aura 0% de chances qu'il agisse.

Si on veut *mesurer* la probabilité biochimique, on peut procéder comme suit (de tels tests de médicament sont réellement pratiqués en clinique) : une séquence comportant des placebos et des substances actives (sous une présentation identique) est prescrite ; la succession des médicaments (M) et placebos (P) n'est connue que de l'expérimentateur ; on choisit délibérément des séquences très irrégulières, de type aléatoire (randomisées), par exemple $PPMPMMPMPPPMPMPPMPPMPPMP$.

Le test se présente sous la forme de comprimés identiques, mais

Les fondements de la statistique

numérotés afin que l'ordre puisse être respecté; la personne testée doit prendre un comprimé chaque jour à la même heure. On se rapproche ainsi de l'idéal d'une expérience reproductible, quoique la variabilité inhérente à tout organisme vivant ne peut être éliminée. Un tel test effectué sur une seule et même personne mesure alors (même si dans le principe la précision est très médiocre) la probabilité a priori pour une personne donnée. Si par exemple ce test est effectué sur Jean Dupond, qui élimine mal le sel, on s'attend en théorie à ce qu'un médicament favorisant l'élimination du sel agisse efficacement, tandis qu'un médicament qui s'attaque aux causes hormonales reste sans action. Pour Pierre Martin, dont l'hypertension a des causes hormonales, ce devrait être l'inverse.

En réalité, ces expériences montrent, lorsqu'elles sont effectuées, que l'action des médicaments hypotenseurs n'est jamais aussi nettement spécifique. La raison à cela est ce qu'on appelle la *multifactorialité* (ici, de l'hypertension). Il faut comprendre que l'organisme vivant est un tout inséparable, dans lequel la séparation rigoureuse des différentes causes, qui est le principe des sciences expérimentales, est impossible. Par exemple, on peut avoir diagnostiqué une mauvaise élimination du sel chez Jean Dupond; mais cela suffit-il à affirmer qu'elle est la cause (ou la cause unique) de l'hypertension? Celle-ci pourrait être due à la conjugaison de deux, trois facteurs, ou plus, l'un connu (la mauvaise élimination du sel) et les autres inconnus; en outre la mauvaise élimination du sel, ou bien l'hypertension qui en résulte, peut créer un état de stress qui a son tour agira comme seconde cause.

C'est ici qu'on rencontre les limites de la méthode statistique: pour que des tests statistiques puissent apporter une véritable information, il faut pouvoir séparer les différentes causes qui agissent (lorsque cette séparation est possible, les techniques statistiques qui permettent de les séparer constituent la *régression* (voir chapitre **XII**); mais pour que celle-ci puisse avoir une signification rigoureuse, il faut que les causes soient toutes connues, et que leurs effets puissent être séparés par un choix convenable des protocoles expérimentaux). Une simple corrélation statistique, sans isoler une cause, n'a pas de signification utilisable en pratique: par exemple, on peut avoir établi qu'il y a trois fois plus de cancer de l'oesophage dans la ville X que dans la ville Y ; mais cela ne dit rien sur les causes, et en particulier on ne peut pas en déduire que ces causes agiraient sur une personne quittant Y pour venir s'installer à X (par exemple si la cause était l'alcoolisme endémique des habitants de X , elle ne pourrait agir sur un résident qui ne s'adonne pas à ce vice).

La notion de probabilité biochimique est donc, comme on voit, peu opératoire. Elle le deviendrait cependant s'il était possible de découvrir dans le métabolisme des invariances conduisant à des épreuves équiprobables comme c'est le cas en génétique. Là ce n'est pas le cas, et c'est pourquoi cette notion de probabilité biochimique n'est pas utilisée; elle est simplement passée sous silence ou ignorée. Mais justement à cause de cette omission, l'idée qu'il y aurait une différence essentielle entre la probabilité statistique et la probabilité biochimique n'est jamais expressément discutée, ce qui conduit à la confusion courante sur la signification d'un résultat statistique. C'est pour empêcher cette confusion que nous avons introduit ici la notion

techniquement inopérante de probabilité biochimique. Elle permet de se rendre compte que la simple mesure statistique de probabilités empiriques ne suffit pas pour comprendre un phénomène, **il faut aussi savoir où intervient le hasard**. Par exemple, une enquête peut établir que un Français sur deux mille est frappé par la mucoviscidose ; mais la *compréhension* du phénomène résulte de la découverte du niveau où est intervenu le hasard (la combinaison des chromosomes). Le simple résultat de l'enquête n'apporte aucune compréhension. Il en est de même pour comprendre l'action d'un médicament : on la comprendrait si on découvrait où intervient le hasard dont le test n'a montré que l'effet statistique.

Bien entendu, pour que le sondage soit correct, il faut que l'échantillon soit choisi selon un protocole *stochastiquement indépendant* de la variable qu'on cherche à mesurer (l'effet statistique du médicament dans la population ou le nombre d'électeurs de tel ou tel parti). Un tel protocole est appelé une *randomisation*.

Il n'existe en général pas de critère théorique de randomisation, c'est-à-dire qu'il n'existe pas, pour choisir n personnes sur une population totale de N , de critère dont on puisse démontrer théoriquement a priori qu'il est stochastiquement indépendant du paramètre à mesurer ; ces critères sont soit basés sur des «évidences», soit établis empiriquement par essais et erreurs. Ainsi on peut adopter le protocole suivant : la population totale de N personnes est enregistrée dans un fichier séquentiel, et une fonction random choisit n fois un nombre compris entre 1 et N ; on prend alors l'échantillon formé par les n personnes dont les numéros d'ordre dans le fichier sont les nombres fournis par la fonction random ; dans ce cas, on tient pour «évident» qu'un tel protocole est stochastiquement indépendant de la variable étudiée (la fonction random «ignore» la couleur des yeux des personnes). C'est ce type de protocole qui est utilisé pour des enquêtes médicales à grande échelle (voir encadré ci-contre).

Toutefois pour un sondage sur une population de 30 000 000 de personnes, la gestion d'un fichier qui les contient toutes avec leurs noms et adresses pose des problèmes techniques considérables (coût énorme pour la création et l'entretien du fichier, quantité de mémoire et temps d'accès), et c'est pourquoi des méthodes plus souples sont employées par les instituts de sondage, mais bien sûr ces méthodes doivent être validées empiriquement, c'est-à-dire que leur indépendance stochastique (par rapport aux intentions de vote par exemple) doit être vérifiée et maintenue par des corrections constantes (consulter des ouvrages spécialisés pour en savoir plus).

Ce qui vient d'être dit laisse de côté le rôle joué par le groupe témoin. Celui-ci sert, comme son nom l'indique, à écarter les effets de clinique ;

Les fondements de la statistique

streptokinase + aspirine et héparine	tPA + aspirine et héparine	APSAC + aspirine et héparine
streptokinase + aspirine seule	tPA + aspirine seule	APSAC + aspirine seule

une enquête médicale à grande échelle.

Le tableau ci-dessus est extrait d'un article publié dans *The Lancet* (édition française) de Septembre 1992, pages 7 – 25 . Il s'agit d'une étude de la survie après infarctus du myocarde, portant sur 41 299 patients, répartis dans 914 hôpitaux situés dans 20 pays. L'ensemble des 41 299 patients a été réuni sur une base volontaire, mais ensuite leur répartition entre les six groupes indiqués dans le tableau a été effectuée par randomisation. Cela signifie que les coordonnées des 41 299 malades ont été enregistrées séquentiellement dans un fichier, puis que les six groupes ont été choisis par une fonction random opérant sur le fichier. Le but de l'étude était d'étudier l'effet de l'héparine (un médicament fibrinolytique) sur le nombre de récurrences d'infarctus; ce médicament n'étant pas destiné à être administré seul, mais toujours accompagné d'aspirine et d'une troisième substance qui peut être selon les cas, la streptokinase, l'APSAC, ou le tPA, on voit que tout repose sur la comparaison d'un groupe traité à l'héparine (en haut) et d'un groupe témoin (en bas); afin que la comparaison entre un groupe traité et le groupe témoin correspondant soit significative, il était essentiel que ces deux groupes ne diffèrent que par l'administration d'héparine: c'est pourquoi les deux autres substances actives sont administrées à l'identique dans les deux groupes. La randomisation a pour but de garantir l'indépendance stochastique entre le choix de l'échantillon et les caractéristiques des soins particulières à chaque hôpital; en effet, si par exemple dans le groupe traité avec APSAC les hôpitaux européens étaient favorisés, tandis que dans le groupe traité avec tPA les hôpitaux américains étaient favorisés, on ne pourrait plus écarter l'influence de facteurs inconnus caractérisant les soins hospitaliers de part et d'autre de l'Atlantique et cela fausserait l'étude.

Toutefois une telle étude a forcément les limites suivantes :

a) les 914 hôpitaux n'ont pas été choisis par randomisation; s'ils l'avaient été, d'ailleurs, l'intérêt médical de l'enquête n'en aurait pas été augmenté;

b) si on considère les proportions de récurrence d'infarctus (ou d'hémorragie cérébrale consécutive au traitement) dans les groupes traités comme la mesure par sondage d'une probabilité, il s'agit de la probabilité pour qu'une personne venant de subir une crise, prise au hasard dans la population des 20 pays de l'enquête, et soignée dans l'un des 914 hôpitaux, soit victime d'une récurrence (ou d'une hémorragie cérébrale consécutive au traitement). La probabilité du même événement dans un hôpital misérable d'une région deshéritée du tiers-monde peut être très différente. Autrement dit, il s'agit de la probabilité *statistique* pour une personne prise au hasard dans la population de l'enquête, et non de la probabilité *biochimique* a priori d'action du médicament (résultant des mécanismes moléculaires, au demeurant inconnus) pour une personne particulière et bien déterminée. Une telle étude ne peut donc fournir aucune information sur les mécanismes d'action de l'héparine. Son ambition est surtout de décider si statistiquement le nouveau médicament vaut la peine d'être commercialisé; c'est pourquoi l'enquête est restreinte aux hôpitaux des régions solvables.

en effet les patients du groupe traité ne subissent pas seulement les effets du médicament testé, mais aussi ceux des soins généraux consécutifs à l'hospitalisation, ne serait-ce que le régime alimentaire. Si on veut utiliser le sondage pour connaître les effets sur une population *non* hospitalisée, il faut pouvoir soustraire les effets dûs à l'hospitalisation : la constatation que dans le groupe témoin il y a dix améliorations (alors que l'écart-type n'est que 3,46) indique une assez forte probabilité pour qu'un tel effet de clinique se soit produit, et il faudrait donc corriger en baisse la proportion de 3/5. Pour effectuer de telles soustractions, il existe des méthodes statistiques mathématiquement fondées, déjà évoquées plus haut, appelées *régression* (voir chapitre **XII**).

X.2. La théorie des échantillons de Bernoulli.

Dans l'exemple du test de médicament, il a fallu distinguer entre les probabilités biochimiques d'une action du médicament sur le métabolisme de chaque personne particulière, et les probabilités statistiques liées au choix d'un échantillon de population. Les deux sortes de probabilités proviennent de phénomènes aléatoires, mais les premières proviennent des échanges aléatoires de molécules dans le métabolisme, tandis que les secondes proviennent du choix aléatoire d'un groupe de population.

Pour que les choses soient plus claires on peut prendre un exemple où le hasard n'intervient que dans le choix de l'échantillon statistique et n'interfère pas du tout avec les mécanismes biologiques. Supposons qu'on veuille déterminer la proportion de Français qui ont les yeux bleus. Ce caractère ne varie pratiquement pas au cours du temps (il faut plusieurs générations pour que se produise une variation notable), de sorte que les mécanismes biologiques sous-jacents peuvent être complètement négligés. Faire un recensement de toute la population pour connaître le nombre de personnes dont les yeux sont bleus permettrait certes de connaître ce nombre à l'unité près, mais aurait un coût disproportionné par rapport au bénéfice attendu de l'information : il est en effet bien rare qu'une telle précision soit utile. La méthode qu'on utilise alors pour déterminer cette proportion est celle du sondage : on choisit *au hasard* un échantillon de mille ou deux mille personnes dans l'ensemble de la population, et on compte la proportion de personnes aux yeux bleus dans cet échantillon : on admet communément que plus l'échantillon est grand, plus cette proportion sera proche de la proportion exacte, ce qui est à nouveau l'expression de la *loi des grands nombres*. Il s'agit là d'une évidence commune tant qu'on se contente d'appréciations qualitatives. Mais dans cette section nous allons soumettre cette évidence à l'analyse *quantitative*. Au lieu de se contenter de dire "*plus l'échantillon est grand, plus cette proportion sera proche de*

la proportion exacte”, on peut établir une relation mathématique entre la taille de l'échantillon et la précision du sondage. Cette théorie mathématique du sondage a été créée par Jakob (Jacques) Bernoulli et publiée dans un livre posthume en 1713, huit ans après sa mort : l'*Ars conjectandi*, c'est-à-dire “l'art de conjecturer”). Le terme même de “loi des grands nombres” n'apparaîtra que bien plus tard. Voici comment Jacques Bernoulli lui-même pose le problème :

Je suppose que dans une urne, à ton insu [le tutoiement du lecteur est un style d'exposition latin] soient placées trois mille pierres blanches et deux mille pierres noires ; je suppose que pour connaître leurs nombres par expérience, tu tires une pierre après l'autre (en remplaçant cependant à chaque fois la pierre que tu as tirée avant de choisir la suivante, pour que le nombre des pierres ne diminue pas dans l'urne) ; tu observes combien de fois sort une pierre blanche et combien de fois une noire. On demande si tu peux le faire tant de fois qu'il devienne dix fois, cent fois, mille fois, etc. plus probable (c'est-à-dire qu'il devienne moralement certain) que le nombre de fois où tu choisis une pierre blanche et le nombre de fois où tu choisis une pierre noire soient dans ce même rapport sesquialtère [1, 5 fois] où se complaisent à être entre eux les nombres de pierres ou de cas, plutôt que dans tout autre rapport différent de celui-ci. (...)

Mais pour que cela ne soit pas compris autrement qu'il ne convient, il faut bien noter ce qui suit ; je voudrais que le rapport entre les nombres que nous entreprenons de déterminer expérimentalement, ne fût pas pris de façon nette et sans partage (car ainsi c'est tout le contraire qui arriverait et il deviendrait d'autant moins probable de découvrir le vrai rapport qu'on ferait de plus nombreuses observations), mais je voudrais que le rapport fût admis avec une certaine latitude, c'est-à-dire compris entre une paire de limites, pouvant être prises aussi rapprochées qu'on voudra. Assurément, si dans l'exemple des pierres proposé plus haut nous prenons les deux rapports $\frac{301}{200}$ et $\frac{299}{200}$, ou $\frac{3001}{2000}$ et $\frac{2999}{2000}$, etc. dont le sesquialtère est très près et du plus grand et du plus petit, on montrera que l'on peut arriver à ce que le rapport trouvé grâce à des expériences recommencées de nombreuses fois tombe entre ces limites du rapport sesquialtère plus probablement, de toute probabilité donnée, qu'en dehors.

(Trad. Norbert Meusnier, document IREM de Besançon, 1989)

La *nécessité logique* de la loi des grands nombres signifie que celle-ci peut être *démontrée*, et non simplement connue comme une loi de la nature dont Dieu seul connaît la justification. Il ne faut cependant pas oublier que démontrer consiste à déduire une vérité à partir d'une autre, et qu'on ne démontre rien à partir de rien. Jacques Bernoulli en est parfaitement conscient :

On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. (...) Mais cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard (...) Ainsi les cas “d'égale facilité” sont-ils connus pour les dés, pour une urne contenant des bulletins noirs et blancs, mais que dire du nombre des maladies qui peuvent engendrer la mort, des changements qui peuvent affecter le climat, (...) Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre

chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables ; car on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver et ne pas arriver dans le même nombre de cas qu'il avait été constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu'il arrivait ou n'arrivait pas.

Autrement dit, on démontre la loi des grands nombres par la logique, à partir de l'hypothèse d'une invariance. Lorsque les séries d'événements ne se reproduisent pas à l'identique, il n'est plus question de démontrer quoi que ce soit ; en revanche, on peut mesurer par la statistique.

C'est à l'exposé de cette "théorie des échantillons" que cette section est consacrée ; très précisément, il s'agit d'établir la relation mathématique entre la taille de l'échantillon et la précision ou la certitude du résultat.

Soit donc N le nombre d'individus dans la population totale, et n la taille de l'échantillon. On appellera p le nombre d'individus ayant les yeux bleus dans la population totale. Dans cet exemple le hasard n'intervient pas au niveau des mécanismes moléculaires, mais dans le choix (fait par l'expérimentateur) de l'échantillon ; on considère donc que par principe aucun échantillon n'a été privilégié. L'espace Ω est alors l'ensemble de tous les échantillons possibles de taille n : son cardinal est $\#\Omega = \binom{N}{n}$ (voir chapitre **II**, section **3**)

Pour un entier k compris entre 0 et n , le nombre d'échantillons contenant exactement k personnes aux yeux bleus est $\binom{p}{k} \cdot \binom{N-p}{n-k}$: en effet on peut considérer qu'un tel échantillon s'obtient en prenant d'abord un échantillon de k personnes parmi les p qui ont les yeux bleus (ce qui fait $\binom{p}{k}$ possibilités d'après **II.3.**), puis en prenant $n - k$ personnes parmi les $N - p$ qui n'ont pas les yeux bleus (ce qui fait $\binom{N-p}{n-k}$ possibilités pour *chacun* des choix précédents). Par conséquent la probabilité d'obtenir un échantillon contenant exactement k personnes aux yeux bleus est

$$p_k = \frac{\binom{p}{k} \cdot \binom{N-p}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{p!}{k! (p-k)!} \cdot \frac{(N-p)!}{(n-k)! (N-p-n+k)!} \cdot \frac{N!}{n! (N-n)!} \quad (X.1.)$$

En ne faisant rien d'autre que regrouper les factorielles dans un autre ordre, on voit que cela est aussi égal à

$$p_k = \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot \frac{(N-n)!}{(p-k)! (N-p-n+k)!} = \frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{N-n}{p-k}}{\frac{N!}{p! (N-p)!}} = \frac{\binom{N}{p}}{\binom{N}{k}}$$

Les fondements de la statistique

C'est la loi *hypergéométrique* (cf. **IX.5**). Mais si n est beaucoup plus petit que N , on peut faire pour ces factorielles les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} (N - n)! &= \frac{N!}{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)} \simeq \frac{N!}{N^n} \\ (p - k)! &= \frac{p!}{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)} \simeq \frac{p!}{p^k} \\ (N - p - n + k)! &= \frac{(N - p)!}{(N - p)(N - p - 1)\cdots(N - p - n + k + 1)} \\ &\simeq \frac{(N - p)!}{(N - p)^{n-k}} \end{aligned}$$

(ces approximations supposent évidemment que $n \ll N$, $k \ll p$, et $n - k \ll N - p$). Par conséquent, si on pose $\alpha = p/N$ et $\beta = (N - p)/N = 1 - \alpha$, on aura :

$$p_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{\binom{N-n}{p-k}}{\binom{N}{p}} \simeq \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \quad (X.2.)$$

Cette loi de probabilité *asymptotique* (valable pour N grand) est appelée *loi de Bernoulli*. Si on choisit au hasard une personne parmi les N de la population totale, α est la probabilité (exacte) pour que cette personne ait les yeux bleus (et β la probabilité pour qu'elle ne les ait pas bleus) : cela est évident a priori, puisque dans la population totale il y a exactement p personnes aux yeux bleus sur N en tout. La loi de Bernoulli dit alors que si on choisit au hasard un échantillon de plusieurs (n) personnes, la probabilité d'en avoir k aux yeux bleus dans l'échantillon sera environ $\binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$.

L'idée (conforme au sens commun) que dans un échantillon de 1000 ou 2000 personnes on doit retrouver à peu près la même proportion de personnes aux yeux bleus que dans la population totale, doit alors se traduire par le fait que la probabilité que $k \simeq n\alpha$ doit être proche de 1, tandis que la probabilité pour que k soit nettement différent de $n\alpha$ doit être faible. Il n'est en effet pas exclu que l'on puisse tomber sur un échantillon sans aucune personne aux yeux bleus, de même qu'en jouant à pile ou face mille fois il n'est pas absolument exclu de n'obtenir aucune fois face ; cela est simplement très peu probable. Nous allons donc étudier de plus près cette loi de Bernoulli.

Commençons par chercher le maximum de p_k . Il est clair que lorsque p_k est maximum, on doit avoir à la fois $p_{k+1} \leq p_k$ et $p_{k-1} \leq p_k$. On trouvera donc les maxima de p_k en cherchant les valeurs de k pour lesquelles ces deux

inégalités sont vérifiées à la fois. Or

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n-k+1}$$

d'où on déduit

$$p_{k+1} = p_k \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

$$p_{k-1} = p_k \cdot \frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

Les deux inégalités caractérisant le maximum seront donc

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \quad \iff \quad k \geq n\alpha - \beta$$

$$\frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \quad \iff \quad k \leq n\alpha + \alpha$$

On voit que k doit être compris entre $n\alpha - \beta$ et $n\alpha + \alpha$. Mais la différence entre ces deux nombres est $n\alpha + \alpha - n\alpha - \beta = \alpha + \beta = 1$, or entre deux nombres réels qui diffèrent de 1 il y a exactement un entier (à la rigueur deux dans le cas exceptionnel où $n\alpha + \alpha$ est lui-même entier); soit k_0 cet entier (il est donc très proche de $n\alpha$). Ainsi p_k est maximum pour $k = k_0 \simeq n\alpha$. Cela confirme le sens commun, qui voulait que dans un échantillon pris au hasard on retrouve à peu près la même proportion de personnes aux yeux bleus que dans l'ensemble de la population. Ici nous voyons par le calcul que la probabilité de trouver la même proportion est la probabilité maximum. Reste à voir comment elle décroît autour du maximum.

Pour cela on va faire comme déjà à plusieurs reprises dans ce cours: posons $k = k_0 + j$; j sera ainsi l'écart (positif ou négatif) de k par rapport à k_0 . On peut écrire pour $j > 0$:

$$\binom{n}{k_0+j} = \binom{n}{k_0} \cdot \frac{(n-k_0)^j}{k_0^j} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{n-k_0})(1 - \frac{2}{n-k_0}) \cdots (1 - \frac{j-1}{n-k_0})}{(1 + \frac{1}{k_0})(1 + \frac{2}{k_0}) \cdots (1 + \frac{j}{k_0})}$$

$$\simeq \binom{n}{k_0} \cdot \frac{\beta^j}{\alpha^j} \cdot \frac{\exp\{-j^2/2(n-k_0)\}}{\exp\{j^2/2k_0\}}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned} \binom{n}{k_0 - j} &= \binom{n}{k_0} \cdot \frac{k_0^j}{(n - k_0)^j} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{k_0})(1 - \frac{2}{k_0}) \cdots (1 - \frac{j-1}{k_0})}{(1 + \frac{1}{n-k_0})(1 + \frac{2}{n-k_0}) \cdots (1 + \frac{j}{n-k_0})} \\ &\simeq \binom{n}{k_0} \cdot \frac{\alpha^j}{\beta^j} \cdot \frac{\exp\{-j^2/2(n - k_0)\}}{\exp\{j^2/2 k_0\}} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\frac{\exp\{-j^2/2 k_0\}}{\exp\{j^2/2(n - k_0)\}} = \exp\left\{-\frac{j^2}{2} \left[\frac{1}{k_0} + \frac{1}{n - k_0}\right]\right\} \simeq \exp\left\{-\frac{j^2}{2n\alpha\beta}\right\}$$

ce qui montre que, aussi bien pour $j > 0$ que pour $j < 0$ on aura

$$p_{k_0+j} \simeq p_{k_0} \cdot \exp\left\{-\frac{j^2}{2n\alpha\beta}\right\} \quad (X.3.)$$

On constate une fois de plus que la probabilité diminue autour du maximum selon une loi gaussienne. Le calcul détaillé que nous venons d'effectuer montre surtout que l'écart-type de la gaussienne est $\sqrt{n\alpha\beta}$. En regardant une table de la loi normale, on voit que la probabilité pour que j soit supérieur à trois fois l'écart-type est égale à 0.0026. Donc la probabilité pour que j soit supérieur à $3\sqrt{n\alpha\beta}$ est 0.0026. Par exemple si $\alpha = 1/3$, $\beta = 2/3$, et $n = 1800$, on a $k_0 = 600$ et la probabilité pour que $|j| > 60$ est 0.0026. Autrement dit, la probabilité pour que la proportion de personnes aux yeux bleus dans l'échantillon soit supérieure à $\frac{660}{1800} = 36.7\%$ ou inférieure à $\frac{540}{1800} = 30.0\%$, est 0.0026. Cela signifie qu'on a seulement une chance sur 385 ($0.0026 \simeq \frac{1}{385}$) de se tromper en affirmant qu'à trois points de pourcentage près, la proportion de personnes aux yeux bleus dans l'échantillon est la même que dans la population totale. On peut alors inverser le raisonnement : si α est inconnu et qu'on trouve 31% dans un échantillon pris au hasard, on pourra dire qu'il n'y avait que une chance sur 385 pour que la proportion dans l'échantillon s'écarte de la proportion réelle α de plus de trois points de pourcentage, et que donc α est, avec probabilité $1 - \frac{1}{385}$, compris entre 28% et 34%.

L'*inversion du raisonnement* est une évidence empirique en ce sens que la vie de tous les jours se fonde sur elle : cette évidence empirique est à l'origine de ce qu'on nomme l'*habitude*. Pourtant ce n'est pas une évidence logique, cela ne se voit pas *immédiatement* à partir des principes. En outre l'évidence empirique n'est pas quantitative. C'est pourquoi nous allons soumettre cette *inversion du raisonnement* à l'analyse.

Le problème du sondage se posait ainsi : un ensemble de N éléments était donné, et on y choisissait au hasard une partie de n éléments ; l'espace

des épreuves était donc l'ensemble de ces parties, dont le cardinal était $\binom{N}{n}$. Dans le problème inverse, on ne peut plus dire que l'ensemble de N éléments est donné puisqu'on veut considérer toutes les possibilités pour les nombres p et q ; ces possibilités sont au nombre de $N + 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 0 \\ q = N \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 1 \\ q = N - 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 2 \\ q = N - 2 \end{array} \right. \quad \cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} p = N \\ q = 0 \end{array} \right.$$

Il s'agit donc de trouver la loi de probabilité de p , sachant que le résultat du sondage est k (au lieu de trouver la loi de k pour un p donné). Comme toujours depuis le début, il faut chercher ce qui est équiprobable. Il est clair que si $k = k_0$ est donné, les différentes possibilités pour p ne sont pas équiprobables (il sera plus probable de trouver un p tel que $p/N \simeq k_0/n$ qu'un p tel que p/N soit très différent de k_0/n , c'est justement ce que nous dit l'évidence empirique). Il faut donc imaginer l'expérience de pensée suivante : on prépare $N + 1$ ensembles, correspondant à toutes les valeurs possibles de p et q . Puis on effectue un très grand nombre de sondages dans ces $N + 1$ ensembles sans en favoriser aucun ; ces sondages donneront toutes les valeurs possibles pour k , mais on ne retiendra que le sous-échantillon de ceux qui donnent la valeur k_0 . Puis on comptera *dans ce sous-échantillon* la répartition des p . En termes d'espace des épreuves, cela signifie qu'on prend pour Ω la réunion de $N + 1$ répliques de l'ensemble des parties à n éléments de la population à N éléments, dont le cardinal sera $(N+1) \times \binom{N}{n}$. Ces répliques sont les Ω_p , tous de même cardinal $\binom{N}{n}$: chacun est l'ensemble des parties à n éléments de la population à N éléments, et ne se distingue des autres répliques que par la répartition en p et q . Les épreuves de l'espace Ω sont alors équiprobables. Quant à l'espace des épreuves de notre problème inverse, ce sera le sous-espace Ω_{k_0} des épreuves $\omega \in \Omega$ pour lesquelles le sondage aura donné $k = k_0$.

Il s'agit donc d'un problème de probabilités conditionnelles : on se restreint à un sous-ensemble de l'espace Ω (voir fin de la section **IV.3**). En reprenant la notation introduite par *IV.1*, cela s'écrit

$$\mathcal{P}(p = p_0 \mid k = k_0) = \frac{\mathcal{P}(p = p_0 \text{ et } k = k_0)}{\mathcal{P}(k = k_0)} \quad (X.4.)$$

Le numérateur peut également s'écrire

$$\mathcal{P}(p = p_0 \text{ et } k = k_0) = \mathcal{P}(k = k_0 \mid p = p_0) \times \mathcal{P}(p = p_0) \quad (X.5.)$$

Conformément à ce qui a été dit à la fin de la section **IV.3** sur la nature des probabilités conditionnelles, les probabilités absolues $\mathcal{P}(p = p_0 \text{ et } k = k_0)$, $\mathcal{P}(p = p_0)$, et $\mathcal{P}(k = k_0)$, concernent l'espace des épreuves Ω introduit ci-dessus, tandis que les probabilités conditionnelles $\mathcal{P}(p = p_0 \mid k = k_0)$

Les fondements de la statistique

et $\mathcal{P}(k = k_0 \mid p = p_0)$ sont les probabilités sur un sous-espace de Ω , respectivement Ω_{k_0} (l'ensemble des épreuves de Ω où le résultat du sondage est k_0) et Ω_{p_0} déjà introduit (l'ensemble des épreuves de Ω où $p = p_0$).

Il est facile de voir que $\mathcal{P}(p = p_0) = 1/(N + 1)$: en effet, Ω est la réunion des Ω_{p_0} , qui ont tous le même cardinal $\binom{N}{n}$. Par contre il n'y a aucune évidence a priori pour la valeur de $\mathcal{P}(k = k_0)$; mais on peut calculer : l'espace Ω étant la réunion des Ω_{p_0} , ces derniers forment donc une *famille exhaustive d'événements*, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(k = k_0) &= \sum_{p_0=0}^N \mathcal{P}(k = k_0 \mid p = p_0) \times \mathcal{P}(p = p_0) \\ &= \frac{1}{N + 1} \sum_{p_0=0}^N \mathcal{P}(k = k_0 \mid p = p_0) \end{aligned} \tag{X.6.}$$

Remarque. Les relations X.4, X.5 et X.6 qui nous ont permis de calculer $\mathcal{P}(p = p_0 \mid k = k_0)$ à partir des $\mathcal{P}(k = k_0 \mid p)$ sont connues dans la littérature sous le nom de relation de Bayes. Si les A_i sont une famille exhaustive d'événements, on a en effet :

$$\mathcal{P}(A_{i_0} \mid B) = \frac{\mathcal{P}(B \mid A_{i_0}) \cdot \mathcal{P}(A_{i_0})}{\sum_i \mathcal{P}(B \mid A_i) \cdot \mathcal{P}(A_i)}$$

En général, cette relation de Bayes sert, comme c'est le cas ici, à inverser le conditionnement. Mais elle n'est qu'une combinaison immédiate des relations IV.2 et IV.4 ; c'est pourquoi dans les traités modernes on perd peu à peu l'habitude d'en faire un théorème séparé.

En reprenant l'ensemble de ces décompositions, on va arriver au résultat cherché ; en effet :

— $\mathcal{P}(k = k_0 \mid p = p_0)$ est déjà connu puisque c'est la loi du problème direct donnée par X.1 :

$$\mathcal{P}(k = k_0 \mid p = p_0) = \binom{p_0}{k_0} \cdot \binom{N - p_0}{n - k_0} / \binom{N}{n}$$

— alors d'après X.6 :

$$\mathcal{P}(k = k_0) = \frac{1}{N + 1} \sum_{p_0=0}^N \binom{p_0}{k_0} \cdot \binom{N - p_0}{n - k_0} / \binom{N}{n}$$

— de sorte que X.4 se traduit par

$$\mathcal{P}(p = p_0 \mid k = k_0) = \frac{\frac{1}{N+1} \frac{\binom{p_0}{k_0} \binom{N-p_0}{n-k_0}}{\binom{N}{n}}}{\frac{1}{N+1} \sum_{p_0=0}^N \frac{\binom{p_0}{k_0} \binom{N-p_0}{n-k_0}}{\binom{N}{n}}} = \frac{\binom{p_0}{k_0} \binom{N-p_0}{n-k_0}}{\sum_{p=0}^N \binom{p}{k} \binom{N-p}{n-k_0}} \quad (X.7.)$$

La loi de probabilité de p est donc $C^{\text{te}} \cdot \binom{p}{k_0} \cdot \binom{N-p}{n-k_0}$. Comme toujours cette probabilité «exacte» est sans intérêt et il nous faut chercher sa densité asymptotique (cf. chapitre **IX**). Pour cela on peut suivre la méthode habituelle, qui a déjà fait ses preuves pour *II.7*, *II.8*, *II.10*, et encore ci-dessus pour *X.3*: d'abord chercher la probabilité maximum; le maximum se produit pour $p = p_{\max} \simeq Nk_0/n$ (très exactement p_{\max} est la partie entière de $[N+1]k_0/n$). Puis chercher la variation autour de p_{\max} . Cela conduirait à

$$\binom{p}{k_0} \cdot \binom{N-p}{n-k_0} \simeq \max \times \exp \left\{ -n \frac{x^2}{2\alpha(1-\alpha)} \right\}$$

avec $\alpha = k_0/n$ et $x = (p - p_{\max})/N$. On reconnaît la même densité macroscopique que dans *X.3*. (la variable macroscopique qui dans *X.3* correspond à $x = (p - p_{\max})/N$, est évidemment $y = j/n = (k - k_{\max})/n$)

Dans le cas présent on peut cependant, à partir des lois exactes, retrouver cela plus simplement. En effet, le dénominateur de *X.7* peut être calculé très facilement; il suffit de considérer les deux séries entières

$$\sum_{p=k}^{\infty} \binom{p}{k} z^p = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{p=n-k}^{\infty} \binom{p}{n-k} z^p = \frac{z^{n-k}}{(1-z)^{n-k+1}}$$

Pour la commodité de l'écriture convient (comme déjà dans *X.7*) que les coefficients binômiaux $\binom{p}{k}$ sont nuls pour $p < k$; en faisant le produit de ces deux séries on obtient

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p}{k} z^p \times \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p}{n-k} z^p = \sum_{N=0}^{\infty} A_N z^N = \frac{z^n}{(1-z)^{n+2}}$$

avec $A_N = \sum_{p=0}^N \binom{p}{k} \binom{N-p}{n-k}$. Or on a aussi

$$\frac{z^n}{(1-z)^{n+2}} = \frac{1}{z} \sum_{N=n+1}^{\infty} \binom{N}{n+1} z^N = \sum_{N=n}^{\infty} \binom{N+1}{n+1} z^N$$

Par conséquent, en identifiant les coefficients,

$$A_N = \sum_{p=0}^N \binom{p}{k} \binom{N-p}{n-k} = \binom{N+1}{n+1}$$

Ainsi $X.7$ devient

$$\mathcal{P}(p = p_0 | k = k_0) = \frac{\binom{p_0}{k_0} \binom{N-p_0}{n-k_0}}{\binom{N+1}{n+1}} = \frac{n+1}{N+1} \cdot \frac{\binom{p_0}{k_0} \binom{N-p_0}{n-k_0}}{\binom{N}{n}}$$

On reconnaît ci-dessus l'expression $X.1$ de la probabilité $\mathcal{P}(k = k_0 | p = p_0)$, de sorte que finalement

$$(N+1) \cdot \mathcal{P}(p = p_0 | k = k_0) = (n+1) \cdot \mathcal{P}(k = k_0 | p = p_0) \quad (X.8)$$

Cette relation montre qu'à un coefficient de normalisation près (ce qui est logique, puisque p peut prendre $N+1$ valeurs, alors que k en prend $n+1$), les lois $\mathcal{P}(k = k_0 | p = p_0)$ et $\mathcal{P}(p = p_0 | k = k_0)$ sont identiques.

En conclusion, ces deux interprétations du sondage sont équivalentes :

— si dans la population étudiée, on sait qu'il y a $1/3$ de personnes aux yeux bleus, la probabilité pour qu'un sondage effectué sur 1800 personnes prises au hasard en donne une proportion inférieure à 30.0% ou supérieure à 36.7%, est 0.0026 ;

— si on ne sait rien sur la population, mais que dans un sondage effectué sur 1800 personnes prises au hasard il y en ait $1/3$, soit 600, qui ont les yeux bleus, la probabilité pour que dans la population totale la proportion soit inférieure à 30.0% ou supérieure à 36.7%, est 0.0026.

Ces deux interprétations sont, d'après $X.8$, exactement équivalentes, à condition évidemment qu'on donne au terme "probabilité" le sens qui a présidé à nos calculs :

— dans la première interprétation, que les échantillons de 1800 personnes sont tous équiprobables ;

— dans la deuxième interprétation, que les échantillons pris sur les $N+1$ populations virtuelles de l'expérience de pensée envisagée plus haut soient équiprobables.

C'est ainsi qu'est fondée la méthode du sondage. La précision d'un sondage est donc mesurée par *deux* paramètres :

a) le *seuil* de certitude (qui est ici 0.0026) est ce qu'on accepte comme probabilité de se tromper ;

b) la *marge d'erreur* ou *fourchette* ou encore *intervalle de confiance* (qui est ici $\pm 3.33\%$) est la différence maximum qu'on accepte entre la valeur réelle de α et la valeur d'échantillon.

Lorsque la taille de l'échantillon est fixée, on ne peut bien sûr réduire la marge d'erreur qu'en augmentant les chances de se tromper ; ou inversement on ne peut réduire les chances de se tromper qu'en élargissant la fourchette. Si on veut à la fois resserrer l'intervalle de confiance et les chances de se tromper, il faut augmenter la taille de l'échantillon. Mathématiquement cela se traduit de la façon suivante : introduisons la fonction

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt$$

cette fonction est parfois désignée aussi par **erf** (x) (**error function**). On a la relation suivante entre le seuil de certitude ρ et la fourchette $\pm\varepsilon$:

$$\rho \simeq 2 \mathcal{N}\left(-\sqrt{\frac{n}{\alpha\beta}} \varepsilon\right) \tag{X.9.}$$

En effet, le seuil de certitude est la probabilité pour que $|\frac{k}{n} - \alpha| > \varepsilon$; or $\alpha \simeq \frac{k_0}{n}$, donc

$$\left|\frac{k}{n} - \alpha\right| > \varepsilon \quad \iff \quad |j| > n\varepsilon \quad \iff \quad \frac{|j|}{\sqrt{n\alpha\beta}} > \sqrt{\frac{n}{\alpha\beta}} \varepsilon$$

Si alors on assimile la loi discrète à la densité gaussienne, on aura d'après (VII.6.)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left\{\frac{|j|}{\sqrt{n\alpha\beta}} > \sqrt{\frac{n}{\alpha\beta}} \varepsilon\right\} &= \mathcal{P}\left\{|x| > \sqrt{\frac{n}{\alpha\beta}} \varepsilon\right\} = 2 \mathcal{P}\left\{x < -\sqrt{\frac{n}{\alpha\beta}} \varepsilon\right\} \\ &\simeq 2 \mathcal{N}\left(-\sqrt{\frac{n}{\alpha\beta}} \varepsilon\right) \end{aligned}$$

La relation X.9. relie entre eux le seuil ρ , la fourchette ε , et la taille de l'échantillon n . Comme nous l'avons vu plus haut, si $\rho = 0.0026$ et $n = 1800$, on aura $\varepsilon = 0.033$. Si on abaisse le seuil de certitude à $\rho = 0.072$ (soit une chance sur quatorze de se tromper), la fourchette se réduit à $\pm 2\%$; par contre si on veut augmenter la certitude à $\rho = 0.0001$ (une chance sur dix mille) la fourchette se relâche à $\pm 4.2\%$. Si on veut avoir une fourchette de $\pm 1\%$ avec le seuil de certitude de 0.26% , il faut augmenter la taille de l'échantillon : on voit d'après X.9 que ρ ne dépend en réalité que de $\sqrt{n} \varepsilon$; si ε passe de 3.33% à 1% , ρ restera inchangé si \sqrt{n} est conjointement multiplié par 3.33 , ce qui signifie que l'échantillon devra être 11 fois plus nombreux

($1800 \times 11 = 19800$) : pour un seuil de certitude fixé, l'intervalle de confiance est inversement proportionnel à la *racine carrée* de la taille de l'échantillon.

La relation $X.9$ exprime la limite théorique de la mesure par échantillon. Il n'existe aucun moyen (par exemple un traitement mathématique sophistiqué) permettant d'augmenter la certitude ou de resserrer la fourchette sans augmenter conjointement la taille de l'échantillon. Par contre on s'expose facilement à des causes d'erreur additionnelles. En effet, la formule $X.9$ a été obtenue en supposant que l'échantillon est choisi *au hasard* parmi $\binom{N}{n}$ échantillons équiprobables. Cela suppose qu'on n'a pas favorisé certains échantillons par rapport aux autres. Or, si par exemple les expérimentateurs choisissent leur échantillon dans une région particulière où à *leur insu* les yeux bleus sont plus rares, ils favorisent sans le savoir les échantillons où k est inférieur à la moyenne ; il n'y a alors plus d'équiprobabilité et la formule $X.9$ n'est plus valide. La qualité ou la difficulté des sondages ne provient donc pas du traitement mathématique des résultats, mais du protocole d'expérience : celui-ci doit déterminer un procédé de choix de l'échantillon qui soit stochastiquement indépendant de la couleur des yeux. Si par exemple on possède un fichier où toute la population est enregistrée avec un numéro d'ordre, on peut choisir l'échantillon avec une fonction *random* qui parcourt le fichier au hasard : par ce procédé l'équiprobabilité est garantie. Mais pour des populations considérables (par exemple l'électorat français) cette méthode n'est pas pratique et on a recours à des procédés de sélection souvent sophistiqués, mais plus économiques.

Dans de tels procédés l'indépendance stochastique est essentielle. Supposons par exemple que l'échantillon soit choisi selon un procédé déterminé (et déterministe : n'oublions pas que les fonctions *random* sont elles aussi toujours des algorithmes déterministes). On peut toujours ramener logiquement un tel procédé à un classement des échantillons dans un certain ordre croissant ou décroissant ; par exemple on organise un concours dans la population et les n premiers au classement constituent l'échantillon. Cela revient à considérer une variable aléatoire X : dans notre exemple, pour un échantillon (c'est-à-dire une épreuve) ω , $X(\omega)$ pourrait être la moyenne des notes obtenues au concours par les n personnes de l'échantillon ; l'échantillon formé par les n premiers au classement est alors celui qui a la meilleure moyenne, pour lequel X est maximum. Le contenu du concours ou les critères d'évaluation importent peu, il suffit qu'ils soient stochastiquement indépendants de la couleur des yeux : le classement peut être effectué par une fonction *random*. On considérera aussi une autre variable aléatoire Y : $Y(\omega)$ sera le nombre de personnes aux yeux bleus dans l'échantillon ω .

Si par exemple les échantillons sont prélevés dans la population française, et que la note donnée à chaque personne au concours est le code postal

de son domicile, il n'y aura pas d'indépendance stochastique entre X et Y . Ainsi les échantillons prélevés entièrement dans les départements d'outremer donneront à X des valeurs élevées (~ 97000), tandis que les échantillons entièrement prélevés dans l'Ain donneront à X les valeurs les plus faibles (~ 1000). L'indépendance stochastique implique que les probabilités conditionnelles $\mathcal{P}(X(\omega) \leq 1900 \mid Y(\omega) = k)$ ou $\mathcal{P}(X(\omega) \geq 97400 \mid Y(\omega) = k)$ sont indépendantes de k . Cela signifierait (si on prend par exemple $k = 18$) que la probabilité de prélever des échantillons de 1800 personnes dont seulement 18 ont les yeux bleus est la même à l'île de la Réunion que dans le département de l'Ain. L'inégale répartition géographique des yeux bleus a ainsi pour conséquence que la variable aléatoire X , qui reflète l'origine géographique de l'échantillon, n'est pas stochastiquement indépendante de Y . Le sondage ne sera donc correct que si le procédé de sélection de l'échantillon garantit cette indépendance stochastique, et c'est pourquoi les procédés de sélection sont l'objet du plus grand soin.

X.3. Conclusion.

Dans ce chapitre nous avons montré que dans toute situation où interviennent des probabilités, il ne suffisait pas de les calculer ou de les mesurer, mais il fallait également savoir sur quoi portent les choix du hasard. Selon les cas, la méthode du sondage peut permettre de mesurer une probabilité a priori qu'on ne peut pas calculer par la théorie (dans ce cas on fabriquait une population en reproduisant un processus), ou bien de mesurer approximativement des données statistiques non aléatoires sur une population déjà existante, et il importe de ne pas confondre ces deux situations très différentes. La première concerne les expériences reproductibles, mais donnant un résultat aléatoire: nous avons évoqué à titre d'exemple le lancer d'une pièce de monnaie; mais n'importe quelle expérience de Mécanique quantique tombe dans cette rubrique. Il s'agit d'expériences reproductibles dont le résultat est aléatoirement variable. Ce qui reste invariable dans ces expériences, n'est pas la valeur numérique du résultat, mais sa loi de probabilité: lorsqu'on relance une pièce de monnaie, elle ne retombe pas forcément du même côté, mais la probabilité de chaque côté reste la même à chaque lancer; de même dans une expérience de Stern et Gerlach, l'atome a toujours une chance sur deux d'être dans un état de spin, et si on recommence l'expérience, la déviation de l'atome varie aléatoirement, mais la loi de probabilité reste la même. La *reproductibilité* de l'expérience consiste en ce que

- a) la loi de probabilité du résultat reste la même;

Les fondements de la statistique

b) les expériences reproduites ne s'influencent pas mutuellement (indépendance stochastique).

Dans le cas du sondage sur une population on ne reproduit pas une expérience; le sondage est lui-même une expérience, et on ne la fait qu'une fois (sauf exception). On se fonde sur la relation (X.4.) pour tirer d'une observation faite sur l'échantillon, une conclusion statistique sur la population. Nous avons insisté sur le fait que si un sondage permet d'établir qu'un médicament sera efficace pour quatre personnes sur cinq dans la population, cela ne signifie pas que chaque personne a quatre chances sur cinq pour que le médicament agisse sur elle. La différence entre ces deux conclusions provient d'une différence dans l'intervention du hasard: lorsqu'on dit que le médicament sera efficace pour quatre personnes sur cinq, on sous-entend que le hasard intervient dans le choix d'une personne parmi une population; lorsqu'on dit que pour une personne donnée, le médicament a une probabilité $3/5$ d'être efficace, on sous-entend que le hasard intervient dans le métabolisme de la personne.

Il se trouve cependant que ces deux modes d'action du hasard, quoique complètement différents, se confondent objectivement lorsqu'on a affaire à des phénomènes reproductibles; dans le cas du médicament, ils ne se confondaient pas objectivement, car passer d'une personne à une autre n'est pas la reproduction d'une expérience.

Reprenons l'exemple de la pièce de monnaie (on aurait tout aussi bien pu prendre une quelconque expérience de Mécanique quantique). Si on la lance trente millions de fois, on disposera d'une population de résultats, par exemple 15 003 147 face et 14 996 853 pile. Si au lieu de relever tous les trente millions de résultats, on n'en relève que 1 800, on aura une estimation moins précise de la loi de probabilité $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La précision est, comme on l'a vu au §2, de l'ordre de l'écart-type $\sqrt{n\alpha\beta}$, donc de ± 42 sur les 1 800. L'incertitude moyenne sur la *mesure* de la probabilité est donc $42/1800 \simeq 0.023$. Avec la population complète de 30 000 000 de résultats, 15 003 147 face et 14 996 853 pile, on estimerait les probabilités à 0,500 1049 pour face et 0.499 8951 pour pile, soit une erreur de 0.000 1049 par rapport à la valeur théorique 0.5. Cette erreur peut tout aussi bien provenir des fluctuations aléatoires que des imperfections de la pièce utilisée pour l'expérience. L'incertitude a priori sur la mesure (écart-type des fluctuations) est $5\,477/30\,000\,000 \simeq 0.000\,182$, et l'erreur est bien de cet ordre, de sorte qu'avec le résultat effectivement obtenu on n'est pas fondé à penser que la pièce est mal équilibrée.

Faisons semblant de croire que la pièce est parfaite. Alors on peut ne pas faire réellement l'expérience et se contenter d'une expérience de pensée, dont le résultat est prévisible: si on la lançait dix milliards de fois, l'écart

quadratique moyen des fluctuations serait de l'ordre de 70 000 sur dix milliards, soit 0.000 007 (faire cette expérience réellement demanderait un travail considérable). Le grand avantage d'une expérience de pensée est de ne pas être pas limitée par des contingences matérielles ; on peut donc supposer que la pièce est lancée un nombre N aussi grand qu'on veut de fois. Ainsi, au lieu d'avoir une population déterminée (par exemple les électeurs français) dont le nombre N ne peut pas être augmenté à volonté, on dispose d'une population potentiellement infinie, c'est-à-dire qu'on peut faire tendre N vers l'infini. Lorsque N tend vers l'infini, non seulement le nombre de pile ou de face reste proche de $N/2$, mais en outre l'incertitude liée aux fluctuations tend vers zéro, ce qui permet de "mesurer" (en quelque sorte) la probabilité avec une précision arbitrairement grande.

Dans ces conditions, la proportion de pile ou de face dans la population infinie de résultats est *égale* à la probabilité a priori. On a démontré mathématiquement (cela résulte du chapitre **III**) que si la probabilité a priori d'obtenir face est 0.5, alors, sur une population potentiellement infinie de lancers, il y aurait une proportion de pile ou de face exactement égale à 0.5 : la probabilité pour que cette proportion s'en écarte, même d'une quantité infinitésimale, serait nulle. Il en serait de même si la probabilité a priori n'était pas 0.5, mais un nombre quelconque x . La vérité mathématique de cette affirmation résulte, comme cela a déjà été dit, de deux conditions :

- a) que les lancers soient reproductibles à l'identique ;
- b) qu'ils soient stochastiquement indépendants.

À cause de cela il n'y a pas de différence entre la probabilité a priori dûe à un choix aléatoire dans les paramètres rapidement fluctuants du mouvement de la pièce de monnaie, et la probabilité a posteriori qui se révèle dans la population de N résultats lorsque N croît indéfiniment. Pour dire les choses autrement : si on effectue l'expérience consistant à lancer la pièce 1 800 fois, on peut indifféremment considérer que

a) on a répété 1 800 fois un lancer (à chaque fois de manière identique et stochastiquement indépendante des lancers précédents) avec une probabilité 0.5 *a priori*, c'est-à-dire une probabilité décidée *avant* la manifestation du résultat, provenant de choix faits par le hasard pur sur les *causes* mécaniques du résultat ;

ou bien que

b) on a prélevé *au hasard* un échantillon de 1 800 résultats dans une population potentiellement infinie, de sorte que le choix du hasard n'a pas porté 1 800 fois sur les causes du mouvement d'une pièce de monnaie, mais une seule fois sur le choix d'un échantillon de 1 800 mouvements, parmi tous les mouvements possibles.

Les fondements de la statistique

Si on présuppose l'existence d'une "population" formée d'un nombre énorme de résultats possibles (mais comportant bien sûr une moitié de pile et une moitié de face) et qu'on prélève au hasard un échantillon de 1 800 résultats dans cette population, on obtiendra en appliquant la théorie des échantillons développée ci-dessus exactement les mêmes lois de probabilité qu'en appliquant la théorie de la marche aléatoire à la répétition de 1 800 lancers. Aucune expérience, même de pensée, ne pourrait mettre en évidence une différence entre les deux situations, et par conséquent permettre de trancher en faveur de l'une des deux interprétations. Il en est ainsi parce que les deux interprétations sont mathématiquement équivalentes : on a *démontré*, par la logique et non par l'expérience, que l'une entraîne l'autre, de sorte que le choix pour l'une plutôt que pour l'autre n'est qu'un choix de forme : l'interprétation b) peut donner le sentiment que les résultats sont prélevés dans l'ensemble, supposé déjà inscrit dans le Grand Livre, des résultats possibles, tandis que l'interprétation a) laisse croire que le hasard fait son choix *avant* que la pièce ne s'immobilise. Mais ces différences ne sont que des illusions dues à des manières différentes de dire la même chose.

Par contre la différence que nous avons signalée auparavant, entre le choix au hasard d'un échantillon sur une population existante, et l'action du hasard dans les mécanismes moléculaires du métabolisme, est une différence réelle et non une illusion. On peut imaginer une expérience concrète qui distingue les deux sortes d'actions du hasard : il suffit de mesurer sur une seule personne l'écart-type des fluctuations de tension artérielle dues au second hasard (celui qui agit dans les mécanismes moléculaires du métabolisme), et de constater qu'il n'est pas le même que celui des fluctuations de la tension d'une personne à l'autre. Même sans songer à cette expérience, il apparaît tout de suite à l'entendement qu'il n'y a aucun lien de cause à effet entre ce qui se passe dans le métabolisme d'une personne particulière, et les différences de constitution que d'autres personnes d'une population peuvent avoir entre elles ; par exemple, que Pierre Martin soit obèse n'a aucune influence sur le fait que Jean Dupond élimine mal le sel, surtout s'ils ne se sont jamais rencontrés et ne se connaissent pas. C'est que dans ce cas la population qu'on sonde n'est pas constituée de clones de Jean Dupond. La population de pile et de face imaginée ci-dessus a été fabriquée artificiellement par reproduction à l'infini d'un même processus et il est donc logique qu'elle ne contienne pas plus d'information qu'il n'y en avait au départ dans le processus, tandis que la population humaine existe indépendamment du métabolisme de chacun de ses membres, et apporte une information qui ne peut pas être extrapolée à partir de ce qu'on sait d'un individu particulier.

XI. TESTS STATISTIQUES

XI. 1. Les densités $\chi_r^2(t)$

Au chapitre précédent, nous avons vu comment utiliser la loi gaussienne pour distinguer une véritable anomalie d'une simple fluctuation aléatoire. L'exemple que nous avons retenu pour discuter était celui d'une pièce de monnaie qu'on lance un grand nombre n de fois. La loi gaussienne des fluctuations nous dit que la probabilité pour que le nombre de pile ou de face s'écarte de la valeur médiane $n/2$ de plus que, disons, cinq fois l'écart-type $\sigma = \sqrt{n/2}$ est si faible qu'il est pratiquement impossible qu'un tel écart se produise, ce qui permet, si cela se produit, d'affirmer avec un très haut degré de certitude que la pièce était donc mal équilibrée.

Les tests statistiques sont des recettes basées sur ce principe. Tous ne font que transposer le raisonnement précédent, en introduisant un intermédiaire mathématique qui ne change rien quand au fond, mais facilite le calcul. Dans le cas de la pièce de monnaie le recours direct à la loi gaussienne était facile: il suffisait de compter le nombre de pile, puis de comparer son écart par rapport à $n/2$ à l'écart-type $\sigma = \sqrt{n/2}$, et on pouvait alors sans calcul supplémentaire se servir d'une table de la loi gaussienne.

Les choses deviennent plus complexes lorsqu'au lieu d'une pièce de monnaie, on teste un dé. Si on lance le dé 6000 fois, chaque face du dé doit apparaître environ 1000 fois, et c'est alors l'écart par rapport à 1000 qui mesure la fluctuation. Mais il y a *six* fluctuations, une par face. En fait, il n'y en a que cinq indépendantes, car, de même que pour la pièce de monnaie le nombre de pile déterminait automatiquement le nombre de face, pour le dé la connaissance de cinq fluctuations détermine la sixième. Il est bien entendu que chacune de ces six fluctuations obéit à une loi approximativement gaussienne, et qu'on peut donc analyser chacune séparément, avec sa propre loi gaussienne. Mais il est assez rare en Statistique qu'une information aussi détaillée soit utile: il suffit de savoir si le dé est globalement bon ou mauvais et il est inutile de s'encombrer de ce qui arrive à chacune des faces. Le dé sera considéré comme mal équilibré même si un seul des six écarts est trop grand (par exemple supérieur à deux et demi ou trois fois l'écart-type); autrement dit: un dé qui est parfaitement équilibré pour les faces 1, 2, 5, 6, mais mal équilibré pour les faces 3 et 4, n'est pas meilleur qu'un dé qui est mal équilibré sur toutes les faces. Dans un tel cas tester l'écart pour

Tests statistiques

chacune des six faces séparément est une perte de temps, et on souhaiterait plutôt pouvoir mesurer un écart global, par exemple la somme des carrés des fluctuations. Certes, la somme des valeurs absolues des fluctuations, ou la somme des quatrièmes puissances pourraient convenir également, mais, comme cela a déjà été discuté à propos de la variance (voir **VI.2.**), la somme des carrés est considérée pour diverses raisons comme la plus pratique (bien entendu la somme *algébrique* des fluctuations est par nature toujours nulle et ne mesure donc rien).

Pour que la discussion soit plus concrète, imaginons que le dé, lancé 6000 fois, donne les résultats suivants :

	1064 fois		1009 fois	
	987 fois		977 fois	(XI.1.)
	961 fois		1002 fois	

Si on veut faire comme nous avons fait pour la pièce de monnaie, il faudra comparer les six résultats aux fluctuations gaussiennes autour de la moyenne 1000; dans ce cas il faut déterminer l'écart-type: en l'occurrence il vaut $\sqrt{1000} \simeq 32$. Ici l'écart-type est le même pour chacune des six faces, ce qui est évident puisqu'il y a symétrie (les six faces sont interchangeables). On peut aussi calculer la somme des carrés qui est alors

$$S = 64^2 + 13^2 + 39^2 + 9^2 + 23^2 + 2^2 = 6400 \quad (XI.2.)$$

Mais plus question de comparer cette valeur à l'écart-type 32. Il y a à cela trois raisons: la première est qu'on fait la somme de six contributions, il faudrait donc comparer à six fois la valeur moyenne attendue pour l'une; la seconde est qu'on prend les carrés (qui sont beaucoup plus grands), il faudrait donc comparer à six fois le carré de l'écart-type. Mais ce raisonnement serait faux: ce n'est pas à six fois le carré de l'écart-type qu'il faut comparer ce nombre, car (c'est la troisième raison) cette somme de carrés ne suit pas une loi gaussienne. Il se trouve en effet que, si les fluctuations obéissent à une loi gaussienne, ce n'est plus le cas de leurs carrés.

Si on n'a pas du tout réfléchi à la question, on peut être surpris d'apprendre que le carré d'une variable aléatoire n'obéit pas à la même loi que la variable elle-même, mais cela est logique et a déjà été évoqué: par exemple dans le problème des distributions au hasard de cordes sur un cercle (chapitre **I**) la différence entre les trois lois se traduisait mathématiquement

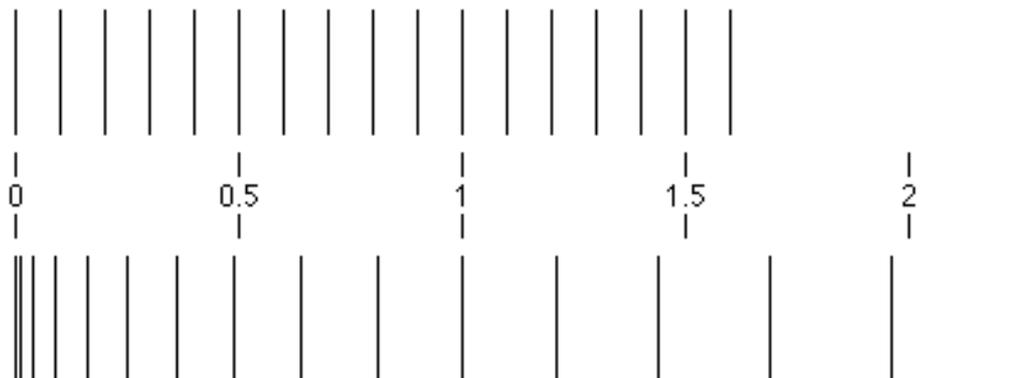


figure 41

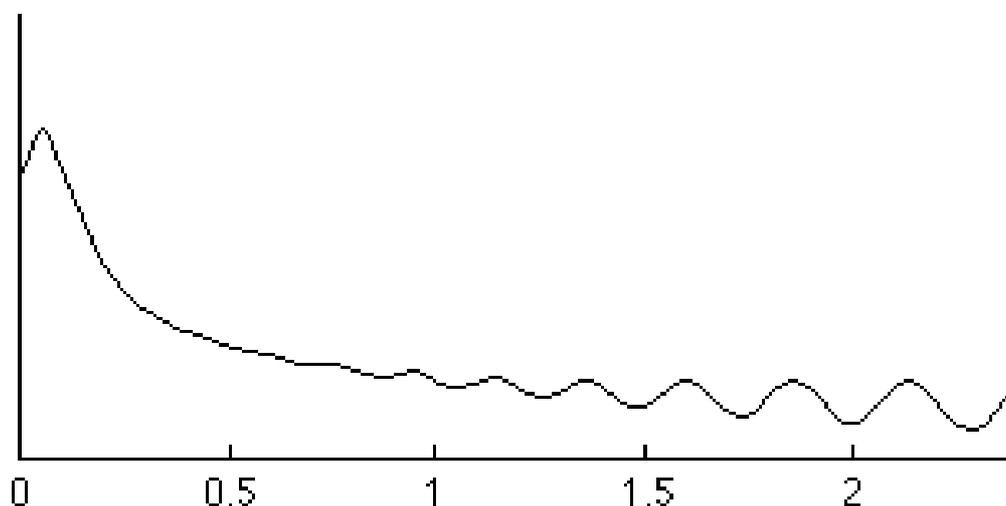


figure 42

par le fait que les variables aléatoires correspondantes sont liées par des relations non linéaires. Sur la figure 41 on peut voir deux graphiques de loi. Celui du haut représente une loi $\{x_j ; (p_j)\}$ telle que les p_j soient tous égaux à $\frac{1}{17}$ et $x_j = \frac{1}{10}j$: les valeurs sont donc équidistantes et vont de 0 à 1.6 ; elles sont toutes équiprobables et, comme il y en a 17 en tout, la probabilité de chacune est $\frac{1}{17}$. Le graphique du bas représente la loi du carré : les x_j sont remplacées par les x_j^2 , mais les p_j ne changent pas : le passage au carré rend plus petit ce qui est inférieur à 1, mais rend plus grand ce qui est supérieur à 1. Ce qui a pour effet que les valeurs inférieures à 1 se trouvent davantage comprimées vers 0, tandis que les valeurs supérieures à 1 sont dilatées. Par conséquent la *densité*, qui était uniforme, se trouve augmentée entre 0 et 1 (d'autant plus qu'on est plus près de 0) et diminuée au-delà de 1. Si on

Tests statistiques

effectue un lissage de cette loi discrète (celle du carré) pour faire apparaître sa densité, on obtient le graphique de la figure 42 ; le lissage de la loi initiale $\{x_j ; (p_j)\}$ aurait évidemment donné une densité constante entre 0 et 1.6. Ainsi, comme nous en avons déjà eu des exemples ailleurs, ce n'est pas une modification des probabilités qui change la loi, mais une modification dans la répartition des valeurs, consécutive à une transformation non linéaire.

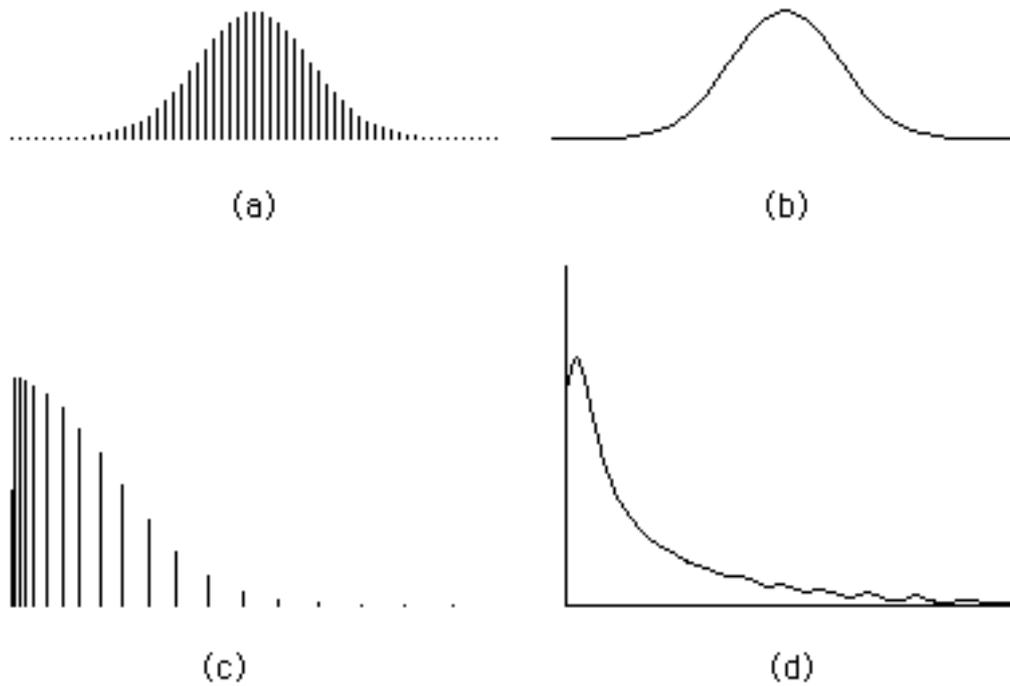


figure 43

On s'attend donc à un effet analogue pour la loi binômiale. Sur la figure 43 on peut voir en (a) la loi binômiale et en (b) la même loi après lissage par convolution ; ces graphiques sont les mêmes que sur les figures 11 (en haut), et 14 ($\varepsilon = 0.42$) du chapitre **VII**. Si X est une variable aléatoire de loi $\{x_j ; (p_j)\}$, son carré a pour loi $\{x_j^2 ; (p_j)\}$: c'est-à-dire que les probabilités p_j ne changent pas, mais les valeurs x_j sont remplacées par les carrés. Si parmi les x_j il y en a deux distinctes x_{j_1} et x_{j_2} qui ont le même carré, la probabilité de ce carré sera évidemment $p_{j_1} + p_{j_2}$. Dans le cas de la loi binômiale représentée sur la figure 43 a, qui est symétrique, cela se produit pour chacune des x_j , sauf 0. Ainsi la probabilité de $+x_j$ est (approximativement) $p_0 \exp(-x_j^2/2)$, et la probabilité de $-x_j$ est aussi

$p_0 \exp(-x_j^2/2)$, de sorte que la probabilité de x_j^2 sera $2p_0 \exp(-x_j^2/2)$, à l'exception de $x_0 = 0$ qui est seule à avoir 0 pour carré, et dont la probabilité ne sera donc pas $2p_0$, mais p_0 . C'est pourquoi on voit en (c) que les bâtons du graphique (dont la longueur est proportionnelle à la probabilité correspondante) sont deux fois plus longs que les bâtons du graphique (a), à l'exception du tout premier, qui se confond presque avec le second. Mais ce n'est pas la seule différence; car sur le graphique (a) les bâtons sont équidistants (en effet les valeurs x_j de la loi binômiale sont toutes des multiples entiers de x_1), et sur le graphique (c) ils ne le sont plus car leurs abscisses sont les carrés des précédentes. Ainsi les valeurs prises par le carré sont plus denses au voisinage de zéro et moins denses loin de l'origine. Si on effectue une convolution sur la loi (c), afin de mieux visualiser la *densité* de la loi, on obtient le graphique (d), qui ne ressemble plus du tout au graphique (b).

La loi de probabilité qui est représentée par le graphique (c) ou, sous forme lissée, par le graphique (d), est appelée *la loi du χ^2 à un degré de liberté*. En toute rigueur, la loi du χ^2 à un degré de liberté n'est qu'asymptotiquement la loi du carré d'une variable *binômiale*, c'est-à-dire que la loi discrète (c) a pour limite la loi du χ^2 lorsque le nombre de bâtons tend vers l'infini et que la distance entre eux tend conjointement vers zéro, de même que la loi gaussienne est la limite de la loi binômiale. Les graphiques (c) et (d) ne correspondent donc qu'asymptotiquement à la loi du χ^2 à un degré de liberté.

On peut résumer :

La densité normalisée $\chi_1^2(t)$ à un degré de liberté est la densité du carré d'une variable aléatoire de densité gaussienne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$.

Mais dans (XI.2.) il y avait une somme de carrés. Lorsqu'on additionne des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, leur somme est également gaussienne, avec une variance qui est la somme des variances de chacune; cela résulte d'une propriété très spéciale que les densités gaussiennes possèdent, à savoir que la convolution de plusieurs densités gaussiennes est aussi une densité gaussienne. Les carrés ont pour densité $\chi^2(t)$ et non $e^{-x^2/2}$, donc il n'y a aucune raison pour que leur somme soit aussi une densité $\chi^2(t)$. Nous allons voir ci-dessous lorsque nous calculerons ces fonctions que la densité de la somme de plusieurs carrés (disons r carrés) n'est pas semblable à la densité d'un seul carré, et on l'appelle la densité $\chi_r^2(t)$, ou densité $\chi^2(t)$ à r degrés de liberté.

Tests statistiques

On pourra donc retenir la définition suivante :

La densité normalisée $\chi_r^2(t)$ à r degrés de liberté est la densité de la somme des carrés de r variables aléatoires stochastiquement indépendantes, chacune de densité gaussienne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$.

Soit X une variable de loi $e^{-x^2/2}$. On sous-entendra qu'il s'agit de lois asymptotiques et qu'en réalité la loi est discrète. Cela signifie que

$$\mathcal{P}(a \leq X < b) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

si $b - a$ est suffisamment grand pour contenir un nombre statistiquement significatif de valeurs discrètes. Il suffit d'ailleurs pour caractériser la densité, de connaître la fonction

$$F(x) = \mathcal{P}(X < x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (XI.3.)$$

appelée *fonction de répartition* de X ; en effet, $\mathcal{P}(a < X < b) = F(b) - F(a)$. Pour déterminer la densité du carré de X , nous partirons donc du fait que la fonction de répartition de X est celle donnée par (XI.3.) et il s'agit de calculer la fonction de répartition $G(x)$ de X^2 .

Or

$$G(x) = \mathcal{P}(X^2 < x) = \mathcal{P}(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Puisque la fonction à intégrer ci-dessus est paire, on a aussi

$$G(x) \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Effectuons dans l'intégrale le changement de variable $s = t^2$; on obtient

$$G(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x s^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{2}} ds$$

L'astuce, dans le changement de variable, était de faire en sorte que la borne supérieure de l'intégrale, qui était devenue \sqrt{x} , redevienne x . Ainsi la probabilité pour que X^2 soit inférieur à x est l'intégrale de 0 à x (et non plus de 0 à \sqrt{x}) de la densité $\sqrt{1/2\pi} s^{-1/2} e^{-s/2}$; c'est la preuve que la fonction sous l'intégrale est bien la densité cherchée. La densité $\chi_1^2(t)$ sera donc

$$\chi_1^2(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{2}} \quad (XI.4.)$$

On voit que cette densité tend vers l'infini comme $1/\sqrt{t}$ quand t tend vers 0. Cette singularité est évidemment un artefact du passage à une limite continue: il ne peut pas y avoir une telle densité infinie pour des lois discrètes et réelles, comme le montrent les figures 42 et 43 (d). Le phénomène doit être compris de la façon suivante. Nous avons vu

au chapitre **VII** que lorsqu'on dit qu'une loi discrète tend vers une densité continue, cela signifie que c'est la loi échantillonnée ou lissée par convolution qui tend (au sens de la convergence uniforme des fonctions) vers la densité continue; mais la loi échantillonnée ou lissée est d'autant plus proche de sa limite que les valeurs de la loi discrète sont plus nombreuses et plus proches les unes des autres: ce qui fait qu'une loi discrète "tend" vers une densité continue, est que la distance moyenne entre les valeurs consécutives (le pas de discrétisation) tend vers zéro. Si dans le graphique de la figure 41 ou celui de la figure 43 (a) on augmente le nombre de valeurs en même temps qu'on les rapproche les unes des autres (par exemple, au lieu de prendre les 17 valeurs $x_j = \frac{1}{10}j$ pour $j = 0, 1, \dots, 16$, chacune ayant la probabilité $\frac{1}{17}$, on prend $1,7 \cdot 10^n$ valeurs $x_j = 10^{-n}j$ pour $j = 0, 1, \dots, 1,7 \cdot 10^n - 1$, chacune ayant la probabilité $1/1,7 \cdot 10^n$, et on fait tendre n vers l'infini), on ne change rien au fait que la loi lissée sera uniforme; par contre la loi lissée du carré (figure 42) va tendre vers la densité $1/\sqrt{t}$ (bien entendu le paramètre ε — la longueur de corrélation — du filtre de lissage devra tendre corrélativement vers zéro). Il n'est pas possible, à cause du faible pouvoir séparateur des graphiques, de présenter les dessins qui illustreraient le phénomène; mais si on le pouvait, on verrait que la courbe de la figure 42 tendrait vers la courbe $y = 1/\sqrt{x}$: en particulier l'abscisse de son maximum, qui est déjà proche de zéro sur le graphique, s'en rapprocherait de plus en plus, tandis que son ordonnée prendrait des valeurs de plus en plus grandes. Cela se comprend aisément: si les valeurs discrètes se densifient, le fait de les élever au carré produira une densité énorme tout près de zéro (par exemple si la distance entre les valeurs est ε , la distance entre les valeurs du carré au voisinage immédiat de zéro sera de l'ordre de ε^2). Tant que la loi est discrète, cette densité énorme ne peut toutefois pas être infinie, et c'est pourquoi la courbe lissée possède près de zéro un maximum aigu, mais non une singularité. Ce maximum se transforme cependant en singularité à la limite continue.

On peut de la même manière calculer la densité $\chi_r^2(t)$ à r degrés de liberté. Cette fois il s'agit de la somme de r carrés indépendants, on a donc r variables aléatoires $X_1, X_2, X_3, \dots, X_r$ stochastiquement indépendantes, et pour chacune on a

$$\mathcal{P}(X_j < x) \simeq \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Puisque les X_j sont stochastiquement indépendantes, leur loi conjointe s'obtient par factorisation, de sorte que pour la somme des carrés on aura

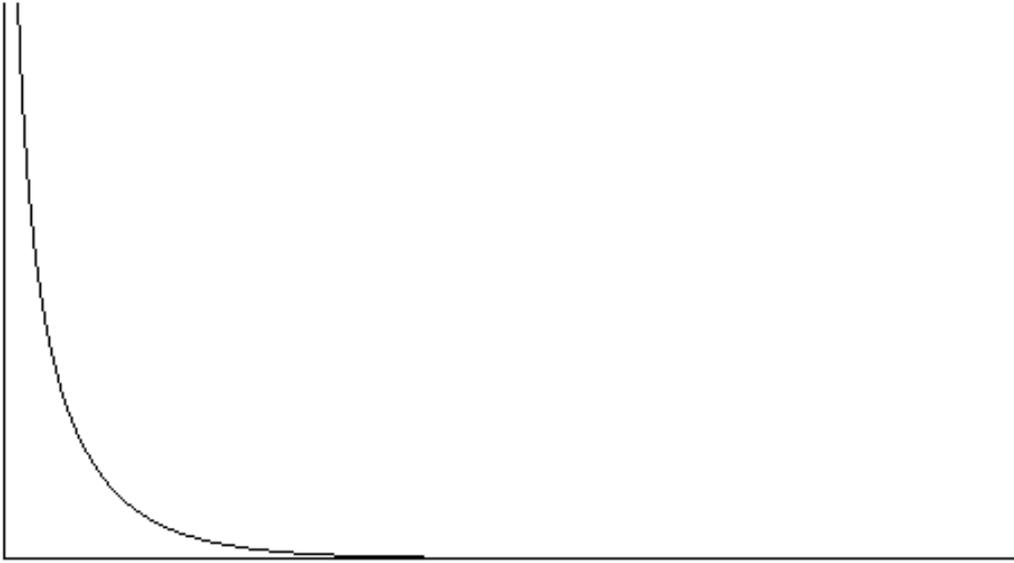
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_r^2 < x) &\simeq \\ &\simeq \iiint \dots \int_{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \dots + t_r^2 < x} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^r e^{-\frac{t_1^2}{2}} e^{-\frac{t_2^2}{2}} e^{-\frac{t_3^2}{2}} \dots e^{-\frac{t_r^2}{2}} dt_1 dt_2 dt_3 \dots dt_r \\ &= \iiint \dots \int_{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \dots + t_r^2 < x} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^r e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \dots + t_r^2}{2}} dt_1 dt_2 dt_3 \dots dt_r \end{aligned}$$

On voit que dans cette intégrale multiple tout est à symétrie sphérique, aussi bien la fonction à intégrer que le domaine d'intégration. On peut donc avantageusement passer en coordonnées sphériques, ce qui donne

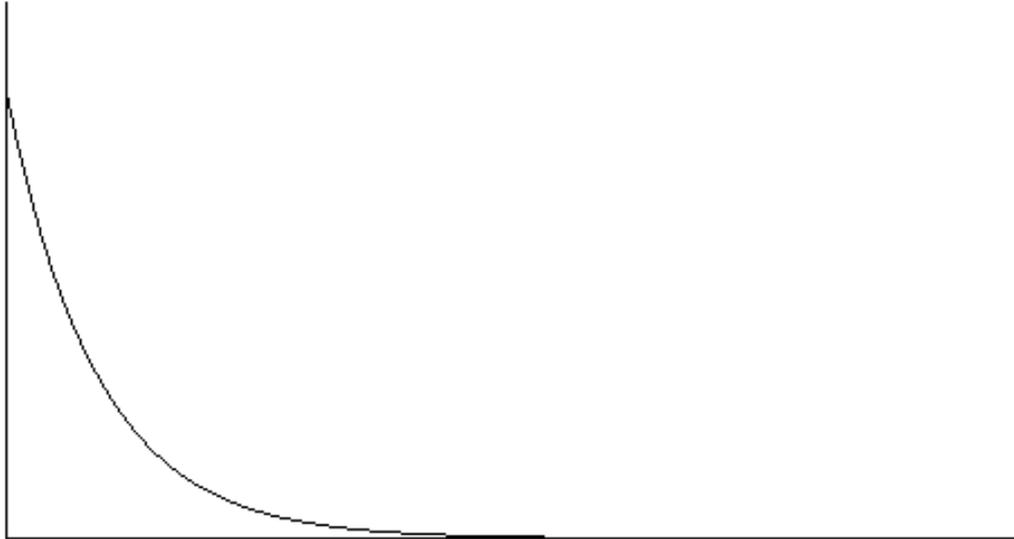
$$\mathcal{P}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_r^2 < x) \simeq \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^r \int_{\rho^2 < x} \rho^{r-1} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \cdot \frac{2\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})}$$

le facteur $2\pi^{r/2}/\Gamma(r/2)$ provenant de l'intégration des coordonnées sphériques angulaires (c'est l'aire de la sphère unité dans l'espace à r dimensions).

Tests statistiques

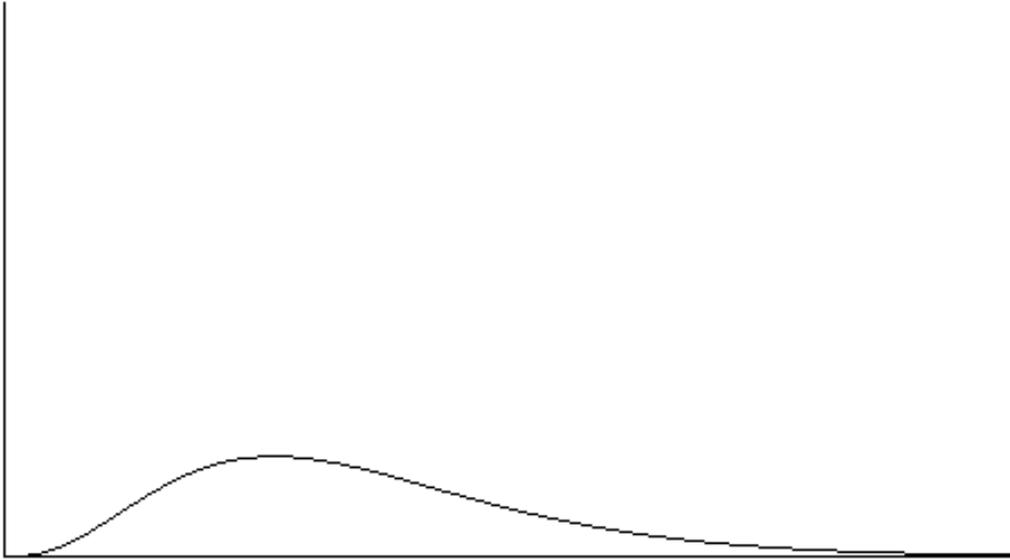


La densité χ^2 à un degré de liberté.

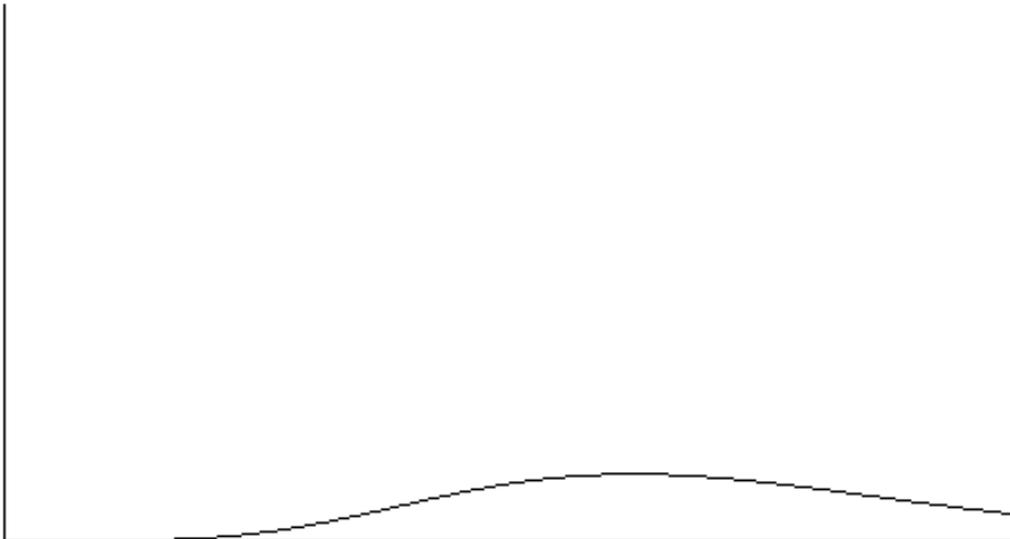


La densité χ^2 à deux degrés de liberté.

figure 44



La densité χ^2 à huit degrés de liberté.



La densité χ^2 à seize degrés de liberté.

figure 45

Voici quatre exemplaires (figures 44 et 45) choisis parmi les densités χ^2 ; les quatre graphiques sont à la même échelle.

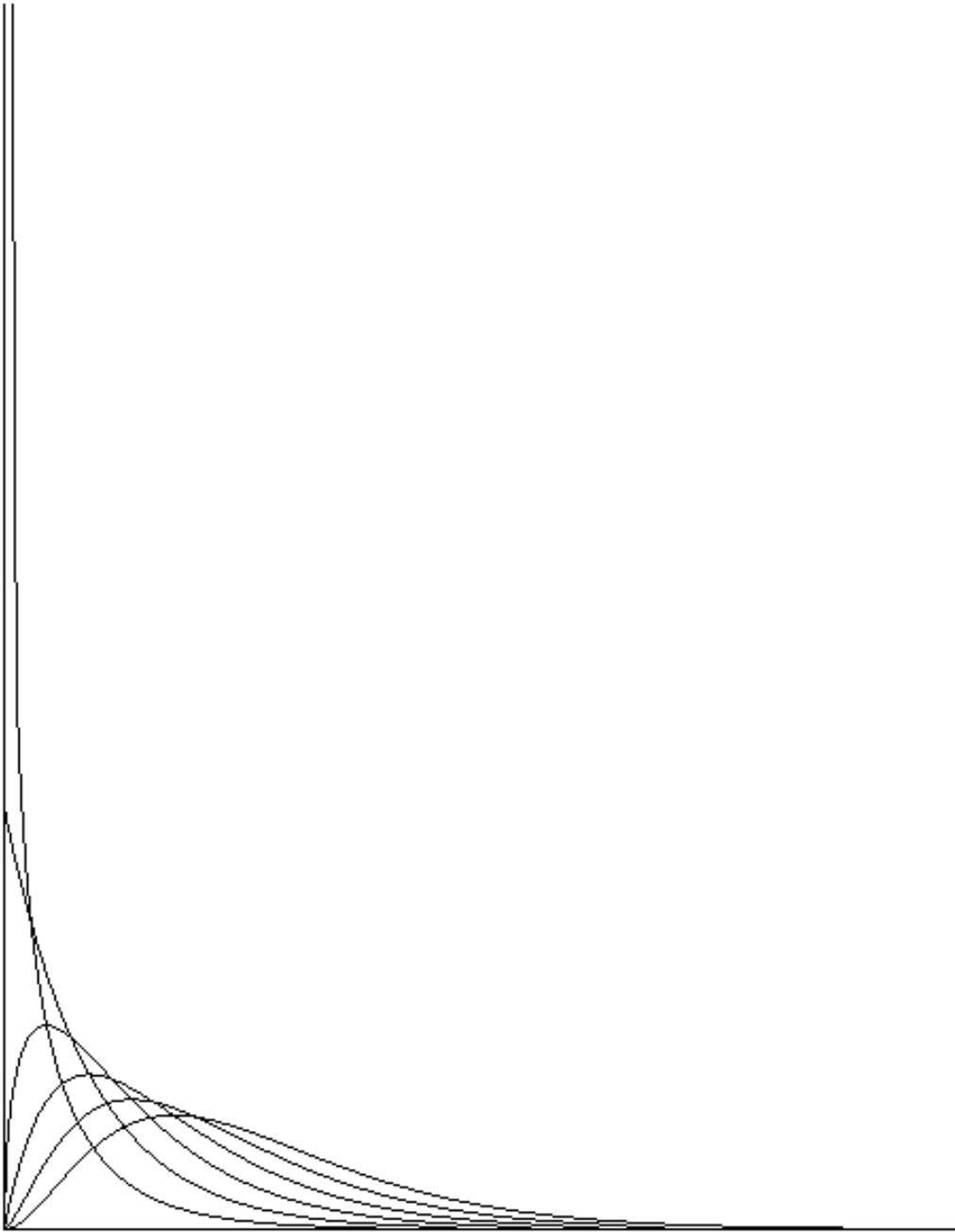


figure 46

Voici, toujours à la même échelle que sur les figures 44 et 45, les graphiques superposés des six premières densités χ_r^2 ($r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

À partir de là nous pouvons procéder comme dans le calcul précédent à une dimension : nous faisons le changement de variable $s = \rho^2$, ce qui donne

$$\mathcal{P}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_r^2 < x) \simeq \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} \int_0^x s^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{s}{2}} ds$$

Sous cette forme on voit apparaître la densité que nous cherchions. On peut donc conclure

$$\chi_r^2(t) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} t^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \quad (XI.5.)$$

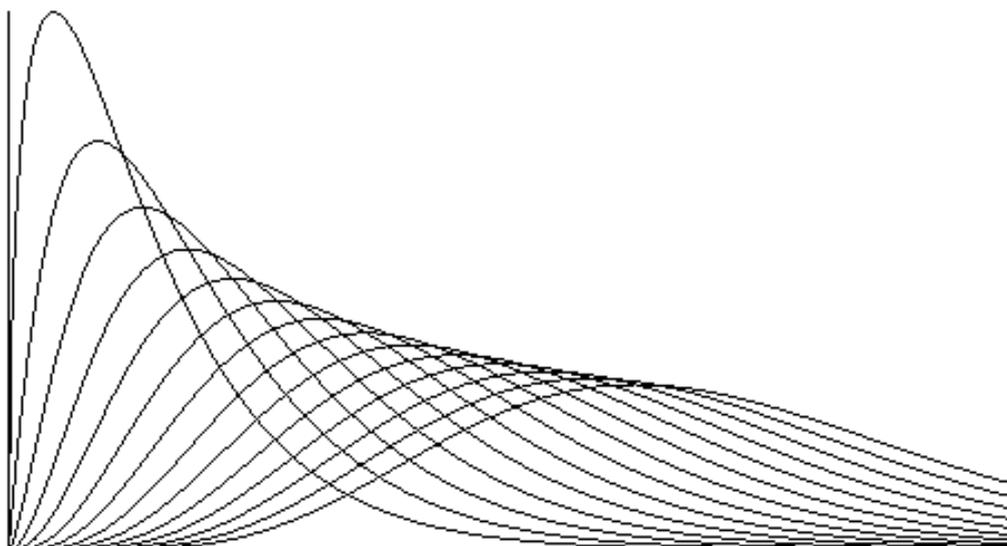


figure 47

Ici sont superposés les graphiques des densités χ_r^2 pour $r = 3$ à $r = 16$. L'échelle des abscisses est la même que sur les figures 44, 45, 46, mais les ordonnées ont été agrandies 2,5 fois.

XI. 2. Le test du χ^2

Revenons maintenant à (XI.2.) On avait calculé la somme des carrés des six fluctuations du dé, et il s'agissait de déterminer la loi de probabilité de cette somme de carrés, afin de pouvoir en déduire si la valeur calculée était probable ou pas : si la valeur effectivement observée est très peu probable, on en déduit que le dé est très probablement mal équilibré ; si au contraire la valeur effectivement observée est une valeur probable, on n'a plus aucune raison de conclure que le dé est mauvais. Mais on ne peut plus utiliser la loi gaussienne pour estimer ces probabilités, puisque la somme des carrés ne suit pas une loi gaussienne. Nous allons établir maintenant que la somme des six carrés suit une loi qui *asymptotiquement* a pour densité $\chi_5^2(t)$ (et non $\chi_6^2(t)$). Mathématiquement, cela s'énonce ainsi :

Tests statistiques

Théorème : Soient X_1, X_2, \dots, X_r des variables aléatoires gaussiennes normalisées (c'est-à-dire que leurs lois ont une densité égale à $(1/2\pi) e^{-x^2/2}$, de moyenne 0 et d'écart-type 1). Si la loi conjointe de ces variables a pour densité $(1/2\pi)^r \exp\{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2)/2\}$ et si elles sont liées par la relation $X_1 + X_2 + \dots + X_r = 0$, alors la somme de leurs carrés a pour densité $\chi_{r-1}^2(t)$.

D'après ce qui a été vu au §1 ci-dessus, on pourrait dire que si les $r = 6$ fluctuations étaient stochastiquement indépendantes les unes des autres, la somme de leurs carrés aurait pour densité (approximativement) $\chi_6^2(t)$. C'est bien sûr parce que les six fluctuations $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ sont liées par la relation linéaire $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0$ que la dimension baisse ainsi d'une unité. Mais il n'est pas évident sans vérification mathématique que cette liaison linéaire ne modifie pas par exemple l'écart-type. Afin de bien comprendre ce qui se passe, il faut examiner cette affaire de plus près, et pour cela nous allons *démontrer* le théorème. Pour que cette démonstration soit plus imagée, nous gardons le cas particulier $r = 6$ du dé.

Suivre cette démonstration demande un effort : ne la lisez que si vous souhaitez vraiment comprendre *pourquoi* la relation linéaire entre les X_j (qui fait baisser d'une unité le nombre de degrés de libertés) ne change pas le caractère gaussien de la densité.

Si les six fluctuations $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ étaient stochastiquement indépendantes les unes des autres, la densité de leur loi conjointe serait

$$f_6(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^r e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \dots + t_r^2}{2}} \quad (XI.6.)$$

Si elles sont liées par la relation $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0$, cela signifie que le point M de coordonnées $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ est situé sur l'hyperplan H d'équation $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0$. Le fait que les valeurs des X_j soient entières et que leur densité ne soit donnée par (XI.6.) qu'asymptotiquement ne change rien à cela. Supposons qu'on effectue un échantillonnage (ce serait la même chose pour une convolution) des valeurs discrètes. Pour effectuer cet échantillonnage on peut par exemple quadriller l'espace à six dimensions en hypercubes ou pavés dont les arêtes sont parallèles aux six axes $OX_1, OX_2, OX_3, OX_4, OX_5, OX_6$, mais on peut tout aussi bien le quadriller selon six autres directions mutuellement perpendiculaires, et telles que les cinq premières soient parallèles à l'hyperplan H . On choisira bien sûr la taille ε des pavés de telle sorte qu'ils contiennent chacun un nombre assez grand de points de la distribution discrète, tout en étant suffisamment petit pour conserver un sens à la notion de densité continue. Dans ces conditions il est bien clair que la probabilité pour que le

point M de coordonnées $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ soit situé dans un pavé P est approximativement donnée par la densité asymptotique continue :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M \in P) &\simeq \int_P f_6(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 dt_5 dt_6 \\ &\simeq \varepsilon^6 \cdot f(M_0) \end{aligned} \quad (XI.7.)$$

où M_0 désigne par exemple le centre du pavé. Or la densité $f(M)$ ne dépend en fait que de $\rho = OM$ (la distance de M à l'origine). Si on impose aux six variables $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ d'avoir une somme nulle, cela signifie qu'on ne considère que les points M situés sur l'hyperplan H , ou, ce qui revient au même puisque la densité f n'a pas de discontinuité, les points qui sont distribués dans une bande H_ε de largeur ε autour de l'hyperplan (on a supposé que le quadrillage de l'espace en pavés est parallèle à l'hyperplan). Ainsi la densité de la loi conjointe des X_j liées par la relation $\sum X_j = 0$ sera donnée par la répartition des probabilités selon les pavés contigus à l'hyperplan : il s'agit donc simplement des probabilités conditionnelles $\mathcal{P}(M \in P \mid M \in H_\varepsilon)$. Or cette probabilité conditionnelle est, conformément à (IV.1.), donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M \in P \mid M \in H_\varepsilon) &= \frac{\mathcal{P}(M \in P)}{\mathcal{P}(M \in H_\varepsilon)} \simeq \\ &\simeq \frac{\int_P f_6(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 ds_5 ds_6}{\int_{0 \leq s_6 < \varepsilon} f_6(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 ds_5 ds_6} \end{aligned} \quad (XI.8.)$$

En effet, la densité $f(M)$ ne dépendant que de $\rho = OM$ est invariante par changement de repère orthonormé, de sorte que nous pouvons intégrer par rapport aux coordonnées $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ du nouveau repère, dans lequel l'équation de l'hyperplan H est $s_6 = 0$: la bande de largeur ε autour de H , formée par l'ensemble des pavés contigus à H (qui est le domaine de l'intégrale au dénominateur), est la région de l'espace où $0 \leq s_6 < \varepsilon$. La densité $f(M)$ peut être refactorisée dans le nouveau repère. En effet :

$$\begin{aligned} f(M) &= e^{-\frac{t_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t_3^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t_4^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t_5^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t_6^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_5^2 + t_6^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 + s_6^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{s_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{s_2^2}{2}} \cdot e^{-\frac{s_3^2}{2}} \cdot e^{-\frac{s_4^2}{2}} \cdot e^{-\frac{s_5^2}{2}} \cdot e^{-\frac{s_6^2}{2}} \end{aligned}$$

Si en utilisant cela on refactorise l'intégrale au dénominateur de (XI.8.) et qu'on remplace celle du numérateur par son expression approchée (pour ε

Tests statistiques

petit) donnée par (XI.7.), on obtient pour la probabilité conditionnelle

$$\mathcal{P}(M \in P \mid M \in H) \simeq \frac{\varepsilon^6 f_6(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, 0)}{\varepsilon \int f_6(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, 0) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 ds_5}$$

Mais $f_6(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, 0) = f_5(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) / \sqrt{2\pi}$, de sorte que finalement après simplification

$$\mathcal{P}(M \in P \mid M \in H) \simeq \varepsilon^5 f_5(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$$

On comprend ainsi que

a) la loi conjointe des six variables $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ liées par la relation $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0$ est une loi discrète de valeurs distribuées sur l'espace \mathbb{R}^6 , mais toutes situées sur l'hyperplan H ;

b) si à l'intérieur de H on choisit un repère orthonormé, les valeurs discrètes de cette loi conjointe peuvent être repérées par les cinq coordonnées s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 , et (après échantillonnage par pavés) elles sont distribuées selon la densité

$$f_5(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = e^{-\frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2}{2}}$$

Or la propriété caractéristique de la fonction exponentielle (à savoir que l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles) a pour conséquence que cette densité se factorise, de sorte que tout se passe comme si les valeurs discrètes prises par le vecteur aléatoire $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$, qui sont toutes situées sur l'hyperplan H , étaient les valeurs discrètes d'un vecteur aléatoire S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 à cinq composantes *stochastiquement indépendantes* (mais dans le nouveau repère).

La démonstration du théorème s'achève ici.

On peut conclure que lorsque six variables aléatoires $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$, chacune de densité $e^{-t^2/2}$, sont liées par la relation $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0$, leur loi conjointe est agencée comme suit :

a) la probabilité pour que le vecteur $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ soit en dehors de l'hyperplan est nulle ;

b) à l'intérieur de l'hyperplan elle est approximativement la même que celle de cinq variables aléatoires *stochastiquement indépendantes* et ayant chacune la densité $e^{-t^2/2}$.

Pour démontrer cela, nous avons utilisé, de façon essentielle, deux propriétés de la densité gaussienne : la première est qu'elle dépend que de la somme des carrés des coordonnées et est donc invariante par changement de repère orthonormé (c'est cette propriété qui entraîne que la trace de f_6

sur l'hyperplan est f_5) et la seconde est que l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles (c'est cette propriété qui permet la factorisation de f_5 en produit, prouvant ainsi l'indépendance stochastique des cinq nouvelles coordonnées). Le théorème énoncé ci-dessus n'est donc vrai qu'à la limite où les X_j sont gaussiennes; il n'est qu'approximativement vrai pour la loi discrète *exacte*. Cela peut se comprendre à partir d'arguments géométriques simples: supposons pour alléger qu'on ait trois variables X_1, X_2, X_3 au lieu de six, avec $X_1 + X_2 + X_3 = 0$. On peut les exprimer en fonction de deux variables indépendantes S_1, S_2 , par exemple

$$\begin{aligned} X_1 &= S_1 + S_2 \\ X_2 &= S_1 - S_2 \\ X_3 &= -2S_1 \end{aligned}$$

Or si S_1 et S_2 prennent toutes les valeurs entières possibles, X_1 et X_2 auront nécessairement la même parité et X_3 sera toujours paire, donc on ne couvrira pas ainsi toutes les valeurs que peuvent prendre X_1, X_2, X_3 . On pourra essayer toutes les combinaisons pour exprimer X_1, X_2, X_3 en fonction de S_1, S_2 (de sorte que X_1, X_2, X_3 prennent des valeurs entières et $X_1 + X_2 + X_3 = 0$), il sera impossible de recouvrir exactement les valeurs prises par X_1, X_2, X_3 ; soit on n'en retrouvera qu'une partie, soit on devra y ajouter des demi-entiers. Cela est dû simplement à ce que, si l'espace \mathbb{R}^3 est invariant par rotation, il n'en est plus de même pour une partie *discrète* de \mathbb{R}^3 . Par contre la propriété est *approximativement* vraie lorsque les lois discrètes sont *approximativement* gaussiennes.

Par ailleurs, en y regardant de près, on comprendra également que les X_j doivent avoir *le même écart-type* (ici il valait 1): en effet, si les écarts-types des X_j étaient différents, il n'y aurait plus d'invariance par rotation (toutefois on aurait pu pallier cet inconvénient en choisissant dans H un repère orthogonal, mais non normé).

L'importante propriété que nous venons d'établir, que la loi conjointe de r variables aléatoires gaussiennes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_r$ d'écart-type 1 et de somme nulle est également une gaussienne, mais avec un degré de liberté (une dimension) de moins, a donc pour conséquence que la somme de leurs carrés suit une loi dont la densité est χ_{r-1}^2 ; en effet, la somme des carrés des X_j est alors égale à la somme des carrés de $r - 1$ variables aléatoires, également gaussiennes et d'écart-type 1, mais stochastiquement indépendantes.

Si on veut tester un dé à l'aide de la somme S des carrés des fluctuations (XI.2.), il faut donc utiliser la densité χ_5^2 ; mais comme celle-ci est prévue pour des variables aléatoires d'écart-type 1, il faut encore se ramener à ce

Tests statistiques

cas. En effet, les fluctuations d'un dé qu'on a jeté $6n$ fois ont un écart-type égal à \sqrt{n} ; on se ramènera donc à un écart-type égal à 1 en divisant chaque fluctuation par \sqrt{n} . Donc la somme S doit être divisée par 1000 pour qu'on puisse lui appliquer la loi χ_5^2 . La probabilité pour que S soit supérieure à un seuil donné x peut donc être calculée approximativement par

$$\mathcal{P}\left(\frac{S}{1000} > x\right) \simeq \int_x^\infty \chi_5^2(t) dt$$

Bien sûr l'intégrale ci-dessus ne se calcule pas par primitives, mais numériquement (il y a pour cela des logiciels ou des tables); dans l'exemple pris ici, $S = 6400$, donc $S/1000 = 6,4$; si on consulte alors une table on voit que la probabilité pour que S soit supérieur ou égal à 6,4 est environ 0,27; ces fluctuations n'étant pas "peu probables" on n'est donc pas fondé à conclure que le dé est truqué (ce qui ne signifie pas qu'on est fondé à conclure que le dé n'est pas truqué). Si par contre la somme S des carrés des six fluctuations avait été égale à 15 000, la même table aurait montré qu'avec un dé normal une telle amplitude n'avait qu'une chance sur cent de se produire; alors on aurait été fondé à conclure que le dé est probablement truqué.

On voit que les opérations à faire sont simples :

- a) se fixer un seuil de certitude α , par exemple $\alpha = 0.99$;
- b) calculer la somme S des carrés des fluctuations;
- c) diviser par la variance ($n/6$ si on a lancé le dé n fois) pour obtenir $x = S/(n/6)$;
- d) chercher sur une table la valeur de $\int_0^x \chi_5^2(t) dt$; si celle-ci est supérieure à α , on a dépassé le seuil, ce qui signifie que la probabilité pour que les fluctuations aient une telle amplitude est inférieure à $1 - \alpha$, et que donc le dé est probablement faussé.

C'est cette série d'opérations qui constitue le *test du χ^2* .

Tout ce qui a été dit depuis le début de ce chapitre avait pour but de montrer que ce test du χ^2 est mathématiquement équivalent à ce qu'aurait donné une analyse séparée de chacune des six fluctuations, et utilisant la loi gaussienne. En effet, on aurait pu également chercher séparément pour chacune des six fluctuations quelle probabilité elle avait de se produire (ou plutôt : quelle était la probabilité pour que la fluctuation ait une amplitude au moins égale à la fluctuation observée), puis accepter ou rejeter, selon le résultat de ces six calculs, l'hypothèse que le dé est faussé. L'avantage d'une étude séparée des six fluctuations est qu'elle permet de savoir laquelle ou lesquelles des faces du dé sont favorisées : si on souhaite disposer de cette information, il ne faut pas faire le test du χ^2 , mais l'analyse séparée. Par

contre le test du χ^2 est bien plus rapide et est donc préférable dès lors que seul importe le résultat global.

Il reste une dernière remarque à faire. Les densités $\chi_1^2(t)$ et $\chi_2^2(t)$ sont grandes au voisinage de $t = 0$, et deviennent petites pour t grand, comme on peut voir sur la figure 44. Par contre on peut voir sur la figure 45 que pour r grand (par exemple $r = 8$ ou $r = 16$) la densité est petite non seulement pour les grandes valeurs de t , mais aussi pour les petites. Cela signifie que lorsqu'il y a beaucoup de fluctuations, c'est-à-dire beaucoup de degrés de liberté, la somme S des carrés de ces fluctuations a non seulement une faible probabilité d'être grande, mais aussi une faible probabilité d'être petite. Or cela se comprend aisément si on y réfléchit. En effet, S est la somme des carrés, donc si S est petit, c'est que *toutes* les fluctuations sont petites; la faible densité au voisinage de zéro signifie donc qu'il est peu probable que toutes les fluctuations soient petites en même temps. De façon plus quantitative: la moyenne des carrés des fluctuations est la variance V ; il est peu probable que ces carrés deviennent beaucoup plus grands que la variance, mais il est peu probable aussi (s'ils sont nombreux) qu'ils soient *tous en même temps* nettement plus petits que la variance. Cela signifierait en quelque sorte que le hasard a *trop bien* fait les choses. Ainsi pour une pièce de monnaie qu'on lance 2000 fois, le résultat le plus probable est d'avoir 1000 fois pile (en avoir 999 est un tout petit peu moins probable). Mais si on lance 6000 fois un dé, obtenir *exactement* 1000 fois chacune des six faces n'est pas le résultat le plus probable, c'est au contraire improbable, et si au lieu de six faces, il y en avait douze, il serait encore plus improbable que toutes les douze apparaissent exactement 500 fois chacune. En calculant un peu, on peut constater que la densité $\chi_5^2(t)$ est maximum pour $t = 3, 5$; dans l'exemple où on lance 6000 fois un dé, cela signifie que la valeur "la plus probable" de $S/1000$ est 3, 5 et non zéro.

Toutefois lorsqu'on pratique le test du χ^2 pour savoir par exemple si le dé est mal équilibré, on ne peut pas interpréter les faibles valeurs de S de la même façon que les grandes. En effet, si le dé est mal équilibré, il sera encore moins probable d'avoir des valeurs "trop" petites pour S ; par conséquent on ne pourra conclure que le dé est mal équilibré que si S se situe dans les grandes valeurs improbables. Les valeurs trop petites de S signifient que les résultats étaient *trop* exacts. Imaginons un expérimentateur qui fraude; il annonce comme résultats de mesure des résultats inventés, c'est-à-dire calculés d'après ce qu'il souhaite prouver frauduleusement. Si V est alors la variance des erreurs de mesures (qui est donc un paramètre caractéristique des appareils utilisés), cet expérimentateur devra veiller à inventer également des fluctuations autour des résultats inventés, de telle

sorte que la somme des carrés de ces fluctuations, divisée par V , corresponde à un maximum de la densité χ^2 (avec le nombre convenable de degrés de liberté). S'il ne prend pas cette précaution, les experts appelés par des collègues soupçonneux ne manqueront pas d'invoquer un test du χ^2 à sa charge. Dans ce cas, le test du χ^2 portera sur les petites valeurs de S et non sur les grandes, et servira à conclure qu'une accumulation de résultats trop exacts est anormale.

On pourra donc retenir en conclusion que le test du χ^2 peut servir à estimer si des fluctuations sont trop grandes, mais aussi trop petites. Bien entendu l'interprétation du test ne sera pas du tout la même dans les deux cas. En revanche le principe du test est toujours le même; on teste une hypothèse. Le raisonnement est le suivant: si l'hypothèse est vraie, le résultat observé est improbable, donc on conclut que, l'événement improbable *ayant eu lieu*, c'est l'hypothèse qui est probablement fausse; ou inversement: si le test conclut que le résultat observé était probable, il n'y a aucune incompatibilité entre l'hypothèse et l'observation. Un tel test permet une quantification précise et objective des seuils de certitude, mais cela ne protège évidemment pas contre la légèreté dans l'interprétation.

XI. 3. Comment tester une hypothèse.

Toute la discussion de la section précédente concerne un exemple (le dé). Mais la méthode du test peut s'appliquer de manière bien plus générale.

Il se trouve que l'hypothèse "le dé est correctement équilibré" se traduit mathématiquement par "les probabilités des six faces sont toutes égales à $\frac{1}{6}$ ". Autrement dit, l'hypothèse se traduit mathématiquement par la donnée d'une loi de probabilité. Imaginons qu'après un test négatif, c'est-à-dire un test ayant donné un résultat très peu probable dans l'hypothèse où le dé est correctement équilibré, nous souhaitons trouver la loi de probabilité réelle (et non uniforme) du dé. Le test ayant consisté à lancer 6 000 fois le dé, on peut prendre les fréquences relatives de chaque face comme un première indication. Mettons pour fixer les idées que les résultats obtenus, au lieu d'être ceux de (XI.1.) soient les suivants

	980 fois		993 fois	
	812 fois		1133 fois	(XI.9.)



1019 fois



1063 fois

Il saute aux yeux que les résultats anormaux sont le deux qui ne sort que 812 fois et le cinq qui sort 1133 fois. À l'aide de la loi gaussienne (cette fois il est préférable de ne pas utiliser le test du χ^2 , puisqu'on veut analyser les résultats pour la face deux et la face cinq, et non globalement) on peut voir que la probabilité d'avoir plus de 1100 fois le cinq sur 6000 lancers (dans l'hypothèse d'un dé correctement équilibré) est 0.0008; la probabilité d'avoir moins de 850 fois le deux est inférieure à 10^{-4} . Comme le premier coup d'oeil le laissait pressentir, le test est donc négatif, et on est conduit à conclure que la probabilité du cinq est en réalité supérieure à $\frac{1}{6}$ tandis que la probabilité du deux est inférieure à $\frac{1}{6}$. On peut évaluer ces probabilités par les fréquences observées dans (XI.9.) qui seraient donc

$$\frac{980}{6000}, \quad \frac{812}{6000}, \quad \frac{1019}{6000}, \quad \frac{993}{6000}, \quad \frac{1133}{6000}, \quad \frac{1063}{6000},$$

mais il serait absurde de les évaluer avec une telle précision puisque nous savons que les fluctuations normales autour de ces valeurs sont de l'ordre de $\sqrt{1000}/6000 \simeq 0.005$. Donc le résultat observé pour le un, à savoir $980/6000$, ne doit pas être tenu pour significativement différent de $1/6$. On peut alors faire la *nouvelle* hypothèse que les probabilités sont $\frac{1}{6}$, 0.13, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, 0.20, 0.17. Telles qu'elles sont choisies, ces valeurs donneront évidemment un test positif (les fluctuations autour de ces valeurs sont petites puisqu'elles ont été choisies pour cela). Toutefois il serait prudent de tester la nouvelle hypothèse indépendamment en lançant à nouveau le dé 6000 fois (cela coûte évidemment du temps et de l'argent, mais comme toutes les bonnes choses, la certitude se paie).

Si avec la nouvelle hypothèse on veut effectuer le second test pour la somme des carrés (c'est-à-dire globalement et non pour une ou plusieurs faces particulières), il faudra tenir compte d'un fait nouveau par rapport à la loi uniforme: les fluctuations X_j n'ont pas toutes le même écart-type; en effet si les probabilités ne sont pas toutes les six égales à $\frac{1}{6}$, mais ont des valeurs différentes p_j , les écarts-types correspondants vaudront $\sqrt{6000 p_j}$ au lieu de $\sqrt{1000}$. Dans ce cas il serait erroné de calculer la somme des carrés des fluctuations, de la diviser par 1000, puis de la situer par rapport à la répartition χ_5^2 , car la densité χ_5^2 est celle de la somme de six fluctuations (de somme nulle) ayant *chacune* un écart-type égal à 1. La loi de la variable

Tests statistiques

aléatoire “somme des carrés” n’a pas pour densité χ_5^2 et il convient de la remplacer par la variable aléatoire

$$S = \left(\frac{X_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{X_3}{\sigma_3}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma_4}\right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma_5}\right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma_6}\right)^2$$

qui est la somme des carrés des variables aléatoires $X'_j = X_j/\sigma_j$, qui, elles, ont bien un écart-type égal à 1. On pourrait objecter ici que les variables aléatoires X'_j ont certes chacune un écart-type égal à 1, mais que leur somme n’est pas nulle, car c’est la somme des X_j qui est nulle. Or d’après le théorème énoncé à la section **2**, si six variables aléatoires ont chacune un écart-type égal à 1 et une somme nulle, alors la somme de leurs carrés a une loi de densité χ_5^2 . Cela résultait de la propriété typique que la densité gaussienne à six dimensions, $\exp\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)\}$, est invariante par rotation et que sa trace sur un sous-espace de dimension cinq est une densité gaussienne à cinq dimensions. Mais cela aurait été vrai pour *n’importe quel* sous-espace de dimension cinq, à cause justement de l’invariance par rotation. Ce serait donc tout aussi vrai pour l’hyperplan d’équation $\sigma_1 X'_1 + \sigma_2 X'_2 + \sigma_3 X'_3 + \sigma_4 X'_4 + \sigma_5 X'_5 + \sigma_6 X'_6 = 0$ que pour l’hyperplan d’équation $X'_1 + X'_2 + X'_3 + X'_4 + X'_5 + X'_6 = 0$. Donc malgré la modification, il demeure que la loi de la variable aléatoire $S = \sum X_j'^2$ a bien la densité χ_5^2 .

Si on refait alors le test avec la nouvelle hypothèse que les six faces ne sont pas équiprobables, mais ont les probabilités $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = 0.13$, $p_3 = \frac{1}{6}$, $p_4 = \frac{1}{6}$, $p_5 = 0.20$, $p_6 = 0.17$, et qu’on trouve sur N lancers N_1 fois la face 1, N_2 fois la face 2, etc. on calculera la grandeur

$$S = \frac{(N_1 - p_1 N)^2}{p_1 N} + \frac{(N_2 - p_2 N)^2}{p_2 N} + \frac{(N_3 - p_3 N)^2}{p_3 N} + \frac{(N_4 - p_4 N)^2}{p_4 N} + \frac{(N_5 - p_5 N)^2}{p_5 N} + \frac{(N_6 - p_6 N)^2}{p_6 N} \quad (XI.10)$$

C’est donc sur ce modèle que sont pratiqués les tests d’hypothèse dits “du χ^2 ”. L’hypothèse est une loi de probabilité qu’on postule a priori soit parce qu’on y est conduit par des considérations théoriques (par exemple que les six faces d’un dé sont équiprobables), soit par une observation préalable, soit par un cahier des charges (si on veut détecter des défauts sur une chaîne de fabrication) ou pour toute autre raison. Ce que nous venons de voir montre que l’hypothèse faite ne comprend pas seulement la loi de probabilité, mais également les écarts-types (ou les variances) des fluctuations. En effet, le calcul de la grandeur S dans (XI.10) fait appel non seulement à la donnée des probabilités p_j , mais *aussi* à la donnée des écarts-types σ_j des fluctuations. On n’est donc pas en mesure d’appliquer un test du χ^2 si on n’a

pas une idée préconçue sur l'écart-type de chaque fluctuation. On peut très bien avoir postulé une loi de probabilité p_j correcte, et cependant avoir un test négatif parce qu'on s'est trompé sur les écarts-types. Les écarts-types retenus dans (XI.10) sont ceux de la loi multinômiale ("sextinômiale" pour être précis), puisque c'est cette loi qui régit les lancers de dés. Donc on ne connaît pas a priori les probabilités p_j car les dés ont un défaut non contrôlé d'équilibrage, mais on est sûr dès le départ que les résultats d'un grand nombre de lancers sont soumis à la loi multinômiale, et les écarts-types sont alors une fonction connue des p_j . Il suffit de faire une hypothèse sur les p_j et de calculer ensuite S selon (XI.10).

Toutes les explications précédentes ont été développées à propos d'une expérience de dé qu'on lance six mille fois. Il est bien entendu que cette expérience de pensée n'était ici qu'un support didactique, permettant de mieux comprendre la *signification* du test.

En pratique le test du χ^2 est souvent utilisé dans des situations où la nature gaussienne des fluctuations n'est pas assurée à l'avance avec autant de rigueur. Toutefois l'expérience de pensée du dé reste un *modèle* ou un *idéal*. Il représente l'*esprit des sciences exactes* dans des contextes expérimentaux où cet esprit n'est qu'un idéal inaccessible.

Voici un type d'expérience très simple sur des souris qui est typique des applications possibles de tests statistiques en biologie ou psychologie expérimentale. Quoique de nos jours la sophistication des méthodes statistiques dépasse presque toujours celle de cet exemple scolaire, il n'y a rien de nouveau quant au principe. Nous discuterons cette expérience afin d'en montrer les limites.

La figure 48 montre un dispositif destiné à étudier l'apprentissage (ou toute autre faculté, sens de l'orientation inné, etc.) chez les souris. Sur une arène centrale débouchent n couloirs (ici $n = 8$) absolument identiques, numérotés de 1 à 8 sur la figure. On veut tester si les souris sont capables de reconnaître le numéro en leur offrant par exemple, pendant une période d'apprentissage, dix fois de suite de la nourriture dans le couloir $N^\circ 7$. Après cette période d'apprentissage, on veut savoir si les souris se dirigeront préférentiellement du premier coup dans le couloir $N^\circ 7$, ou si au contraire, comme la toute première fois, elles choisiront au hasard ("au hasard" voulant dire que les n couloirs sont équiprobables). On peut aussi tester leur sens de l'orientation en plaçant la nourriture dans un couloir dont le numéro change aléatoirement, mais qui reste toujours celui qui va vers le nord. Avec ce procédé, on peut tester toutes sortes de facultés sensorielles.

Après la période d'apprentissage, on place successivement disons deux

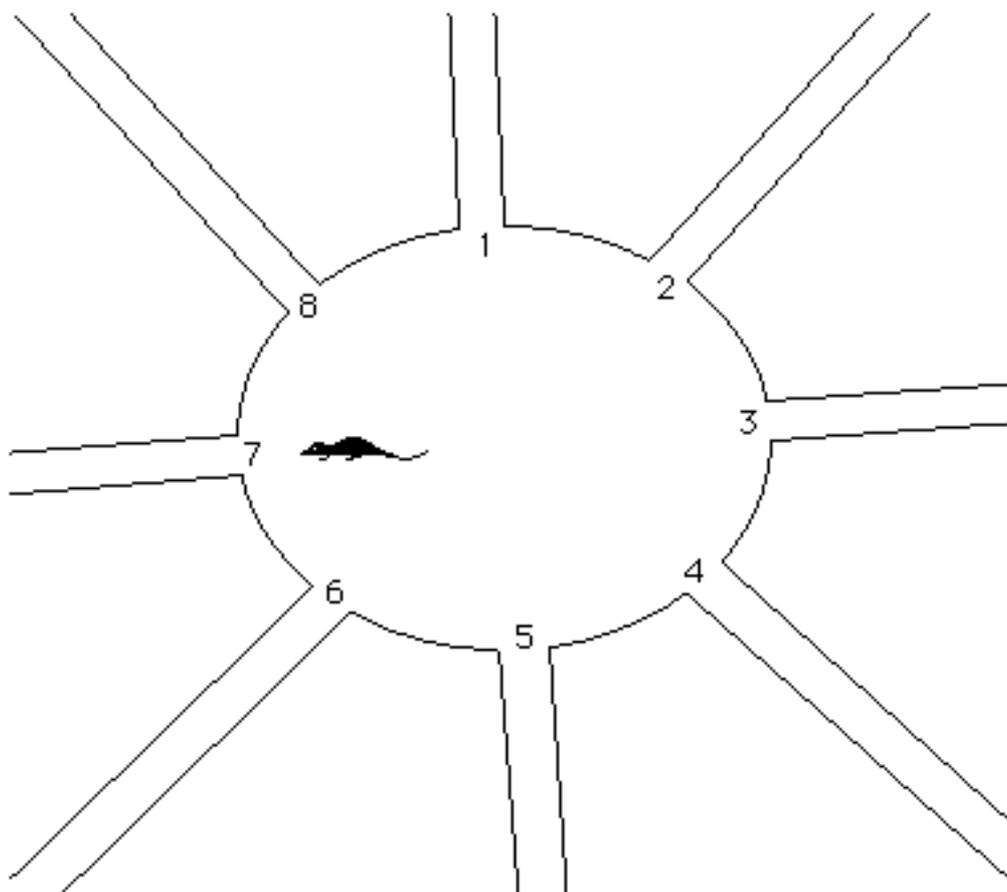


figure 48

cents souris dans l'arène et on répète exactement les conditions qui ont régné durant l'apprentissage; par exemple, si l'arrivée de nourriture était annoncée par un son, on produira ce même son. Puis on note pour chaque souris le numéro du couloir qu'elle choisit *en premier*. On obtient alors une distribution statistique: pour chacun des huit couloirs, le nombre de souris l'ayant choisi.

Si toutes les deux cents souris (ou presque, par exemple cent quatre-vingt-dix-sept) choisissent le bon tunnel, point n'est besoin de test et la conclusion est claire. Mais en général, dans ce genre d'expériences, les résultats sont loin d'être aussi tranchés. Il faudra alors savoir si une légère préférence pour le bon couloir peut être l'effet du hasard (donc une fluctuation normale), ou bien si, sous l'hypothèse de l'équiprobabilité des huit choix, il est peu vraisemblable que la préférence soit due au hasard.

Il y a une analogie avec le problème longuement discuté ci-dessus du dé. Toutefois des différences sautent aux yeux : avec le dé on savait que les fluctuations seraient gaussiennes et on en connaissait les écarts-types, car on avait la loi binômiale qui résultait des symétries du dé. On ne peut avoir de telles certitudes avec des organismes vivants. Il était raisonnable d'admettre que les lancers successifs du dé étaient stochastiquement indépendants : le dé n'est pas influencé par ce qui s'est passé avant. Mais qui nous prouve que le couloir choisi par la première souris ne garde pas une trace (une odeur par exemple) qui poussera les souris suivantes à emprunter le même couloir ? Si on *veut* tenir compte d'un tel effet, on *peut* améliorer le protocole de l'expérience pour éliminer ce facteur : par exemple permuter aléatoirement les numéros des couloirs, de sorte que la nourriture ne soit pas toujours dans le même couloir, mais toujours au $N^{\circ}7$. Cependant on n'est jamais à l'abri de facteurs insoupçonnés ; on aura pensé à l'odorat, mais on ne sait pas tout sur la vie des souris.

Une autre différence est aussi le nombre : en répétant six mille fois, les résultats sont bien plus concluants qu'avec deux cents. Mais on peut aussi y remédier en prenant six mille souris. C'est le sens des expériences médico-pharmacologiques à très grande échelle, comme celle qui est citée du journal *The Lancet* au chapitre **X**.

Une différence plus subtile est la suivante : supposons que l'on ait utilisé six mille souris, ou même un million si vous voulez ; le test du χ^2 suppose que, comme pour le dé, les écarts-types des huit fluctuations soient ceux de la loi multinômiale. Cela est nécessairement le cas si l'expérience est *parfaitement reproductible* : quelles que soient les probabilités a priori p_j pour que chaque souris prenne le couloir $N^{\circ}j$, la répétition de l'expérience conduira forcément à la loi multinômiale et l'expression *XI.10* (pour huit possibilités au lieu de six) suivra la loi χ^2 à sept degrés de liberté. Mais l'expérience est-elle exactement reproductible ? On retrouve ici la discussion du chapitre **X**. Des êtres vivants aussi évolués que les souris ne pourraient-ils pas être influencés par des détails perceptifs insignifiants pour l'expérimentateur, qui conduiraient à augmenter l'écart-type du quatrième couloir et à reserrer celui du sixième, par exemple ? Imaginons que pendant l'apprentissage le couloir $N^{\circ}7$ où était disposée la nourriture était trop souvent au nord, l'expérimentateur *n'ayant pas songé* à ce détail. L'expérimentateur croit que seul le numéro distingue les couloirs. Mais essayez de vous mettre à la place d'une de ces souris (elles sont des mammifères comme vous et moi, et ont une certaine forme de pensée) : elles ont faim, et pour manger doivent deviner le bon couloir. Pourquoi penseraient-elles d'abord au numéro, qui pour elles est bien plus abstrait et éloigné de leur mode de perception que par exemple

Tests statistiques

l'orientation (peu importe ici de savoir comment elles arrivent à s'orienter). On observerait alors des effets différents selon que les deux critères, le numéro *et* l'orientation, se conjuguent ou s'opposent. Si les deux critères se conjuguent, les deux catégories de souris, d'une part les intellectuelles qui pensent d'abord au numéro, et d'autre part les instinctives qui pensent d'abord à l'orientation, vont agir de même et "préférer" le couloir N°7. Si au contraire les deux critères s'opposent, les souris ayant d'abord pensé à l'orientation choisiront un autre couloir que le N°7 et le résultat statistique sera une augmentation de l'écart-type.

Si l'expérimentateur pense à randomiser soigneusement l'orientation, il évitera l'artefact correspondant. Mais nos connaissances sur les souris sont beaucoup moins complètes que nos connaissances sur les dés. Combien restera-t-il de facteurs ignorés ? Nul ne le sait. Donc l'hypothèse que les huit écarts-types sont ceux de la loi multinômiale est peut-être systématiquement fausse.

Les mammifères sont plus proches de l'homme que du dé. On peut mieux comprendre les souris en mettant un enfant humain à leur place qu'en mettant un dé à leur place. C'est pourquoi on pourra méditer l'exemple suivant ⁽¹⁾. Des élèves du primaire sont confrontés au problème mathématique : "calculer (10×7) , puis (3×7) ; en déduire 13×7 ." Un des élèves répond respectivement "70, 21, et 0". Le maître *n'avait pas pensé* que l'expression "en déduire" avait deux sens différents en français et conclut que l'élève n'a pas compris. Si l'énoncé précédent figure dans un questionnaire dont les résultats seront traités statistiquement, le mot ambigu aura pour effet d'augmenter l'écart-type des notes (et de baisser leur moyenne). On peut réaliser des expériences consistant à donner des énoncés différents du même problème mathématique; s'ils sont donnés successivement aux mêmes élèves, ceux-ci ayant en mémoire les précédents énoncés ne répondront pas indépendamment; si on change la population, on introduit une nouvelle incertitude (les nouveaux élèves, venant peut-être d'un milieu social différent, n'ayant pas forcément la même perception de la langue que les précédents).

Lorsqu'on publie des résultats expérimentaux sur les animaux de laboratoire, les revues spécialisées exigent des tests quantitatifs. La raison en est que même avec les limites indiquées ci-dessus, la présence de statistiques quantifiées dans une publication scientifique permet une comparaison plus objective : même si le test du χ^2 est fallacieux pour une des raisons indiquées, il permet dans une certaine mesure de comparer des résultats obtenus par une équipe japonaise à ceux obtenus par une équipe danoise.

⁽¹⁾ Exemple emprunté à Stella Baruk, mais je ne sais plus dans quel livre.

Une telle comparaison des résultats est relativement sensée, plus parce que les erreurs commises dans la manipulation du test sont partout les mêmes (par exemple, que les “facteurs ignorés” sont les mêmes pour l’équipe japonaise que pour l’équipe danoise), que parce que le test est bien appliqué dans son principe.

XI.4. Le test de Student.

Le test du χ^2 , comme nous avons vu, convient pour tester l’hypothèse que plusieurs possibilités sont équiprobables, ou plus généralement que ces possibilités obéissent à une loi de probabilité supposée (et qu’il s’agit justement de tester), mais à condition de connaître les écarts-types.

Le test dit *de Student* (inventé en fait par le statisticien anglais GOSSET \sim 1900) que nous allons étudier maintenant, est généralement utilisé pour tester des moyennes empiriques, sans connaître l’écart-type.

Afin de bien comprendre l’*idée* du test de Student, imaginons une expérience reproductible modélisée par une variable aléatoire X dont la loi est approximativement gaussienne. Pour fixer les idées on peut imaginer que X représente les fluctuations de la mesure d’une grandeur. Si on mesure un très grand nombre de fois une grandeur (supposée évidemment reproductible), on retient généralement la moyenne empirique des résultats comme étant la vraie valeur; mais supposons que, par exemple à la suite d’une prédiction théorique, on ait déjà une bonne raison de penser que la valeur de la grandeur soit m . La moyenne empirique M obtenue par les mesures ne sera pas forcément égale à m , mais comment savoir si la différence est significative et n’est pas une fluctuation due au hasard? Dans le test du χ^2 on voulait tester si (un dé étant lancé six mille fois, ou des souris étant lâchées huit cents fois) la différence entre les probabilités mesurées et les probabilités supposées est due au hasard ou non. Maintenant nous voudrions tester si la différence entre la moyenne mesurée et la moyenne supposée est due au hasard ou non. On ne peut pas utiliser le test du χ^2 pour cela. Ou plutôt, on pourrait l’utiliser si on connaissait l’écart-type des erreurs de mesure (c’est-à-dire l’écart-type de la variable aléatoire X): il suffirait alors de calculer la somme normalisée des carrés des écarts par rapport à m . En effet, une valeur fautive de m rendrait cette somme trop grande et le test du χ^2 serait négatif. Mais pour calculer la somme *normalisée* des carrés des écarts, il faut diviser par l’écart-type; si celui-ci n’est pas connu, on ne peut pas procéder ainsi.

Dans le cas d’une expérience reproductible avec un nombre plutôt petit de possibilités (six pour les dés, huit pour les souris, etc.) on pouvait déduire l’écart-type de la loi multinômiale (cf. IX.10). Mais ici nous avons des

Tests statistiques

erreurs de mesure dont nous ne connaissons pas l'origine ; il est raisonnable de les supposer gaussiennes, mais rien de raisonnable ne permet de deviner leur écart-type. Il faut donc un test indépendant de cet écart-type. C'est le test de Student.

Pour l'analyse mathématique du problème, appelons m la moyenne de X et σ son écart-type. Cela signifie qu'en répétant l'expérience on obtient des résultats x_1, x_2, \dots, x_n qui ont chaque fois une probabilité a priori $\mathcal{P}(X = x_j)$ de se produire, ou, en termes de densité, que la probabilité pour que x_j soit compris entre $x_j - \varepsilon$ et $x_j + \varepsilon$ est égale à

$$\mathcal{P}(x_j - \varepsilon < X < x_j + \varepsilon) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_j - \varepsilon}^{x_j + \varepsilon} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

La répétition à l'identique de l'expérience implique que les résultats successifs x_j sont stochastiquement indépendants et tous distribués selon la loi de X ; autrement dit, les variables aléatoires $(x_j - m)/\sigma$ sont indépendantes et de densité $e^{-x^2/2}$. Par conséquent la somme de leurs carrés, soit

$$S_0 = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{(x_j - m)^2}{\sigma^2}$$

obéit à la loi du χ^2 à n degrés de libertés. Mais ici nous ne connaissons pas forcément σ , qui est l'écart-type *théorique*.

Remarquons à ce propos que, si pour le test du χ^2 la connaissance a priori de l'écart-type est nécessaire, celle de la moyenne théorique en revanche ne l'est pas. Lorsque la moyenne théorique m est inconnue, on peut la remplacer par la moyenne *empirique* $M = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$. Au lieu de calculer la somme S_0 , on calculera

$$S_1 = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{(x_j - M)^2}{\sigma^2}$$

La différence essentielle avec S_0 est que les variables aléatoires $x_j - M$ ne sont plus stochastiquement indépendantes, puisque M dépend de chacune d'elles. Toutefois il est clair que la somme des $x_j - M$ est nulle ; on est donc dans la situation du théorème de la section précédente **IX.2** : les variables aléatoires x_j sont indépendantes, mais la somme des $x_j - M$ est nulle. D'après le théorème, la somme S_1 obéit à la loi χ^2 , mais avec $n - 1$ degrés de liberté. La contrainte que la somme est nulle fait baisser d'une unité le nombre de degrés de liberté. Que cet abaissement ne modifie pas le caractère gaussien de la loi est une propriété spéciale de la loi gaussienne, voir **XI.2**. Toujours

est-il que la somme *normalisée* S_0 ou S_1 des carrés des écarts par rapport à m ou M ne peut être calculée à partir des mesures x_1, x_2, \dots, x_n que si on connaît a priori l'écart-type σ .

Pour faire disparaître le paramètre σ , l'idée du test de Student consiste alors à considérer la variance empirique ⁽¹⁾

$$V_{\text{emp}} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{j=n} (x_j - M)^2$$

et d'étudier la loi de probabilité (ou plutôt la densité) du quotient

$$S = \frac{1}{\sqrt{V_{\text{emp}}}} \sum_{j=1}^{j=n} (x_j - m)$$

Pour calculer la loi de ce quotient nous commençons par chercher celle de la grandeur V_{emp}/σ^2 . Chacune des valeurs x_j peut fluctuer autour de sa moyenne m selon une loi gaussienne d'écart-type inconnu σ . Donc la grandeur V_{emp}/σ^2 , qui est la somme *normalisée* des carrés des écarts par rapport à M , obéit à la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté, qui ne fait pas intervenir σ . D'autre part la grandeur $\frac{1}{\sigma} \sum_j (x_j - m)$, qui est la somme normalisée des écarts par rapport à m , obéit à la loi gaussienne centrée et normalisée à n degrés de liberté $\frac{1}{2\pi} \exp\{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)/2\}$ qui ne fait pas non plus intervenir σ . Or S est le quotient des deux, dans lequel les σ inconnus se simplifient :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt{V_{\text{emp}}}} \sum_{j=1}^{j=n} (x_j - m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V_{\text{emp}}/\sigma^2}} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{j=n} (x_j - m)}{\sigma} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que la loi de probabilité de S est celle d'un quotient de la forme Y/\sqrt{Z} où Y est une variable aléatoire qui suit la loi gaussienne centrée et normalisée $\frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2}$ et Z une autre variable aléatoire, indépendante de Y , qui suit la loi χ^2 à $n-1$ degrés de liberté. Aucune de ces deux lois ne fait intervenir σ , donc la loi de S est indifférente à la quantité inconnue σ . C'est là le principe du test de Student.

⁽¹⁾ on notera que dans l'expression de V_{emp} la somme des carrés des écarts est divisée par $n-1$ et non par n . La raison de ce choix est expliquée au chapitre suivant (**XII.2**).

Tests statistiques

Il ne reste plus qu'à calculer la densité de Student elle-même. Nous procédons comme au chapitre **IX** pour calculer la densité de Cauchy ou au paragraphe **XI.1** pour calculer celle du χ^2 . La densité sera en effet donnée par les probabilités $\mathcal{P}(a < S < b)$ lorsqu'on les aura exprimées sous la forme d'une intégrale entre les bornes a et b . Puisque $S = Y/\sqrt{Z}$ l'événement $\{a < S < b\}$ est identique à l'événement $\{a\sqrt{Z} < Y < b\sqrt{Z}\}$, et on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a < S < b) &\simeq \int_{a\sqrt{z} < y < b\sqrt{z}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \chi_{n-1}^2(z) dy dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} \int_{a\sqrt{z} < y < b\sqrt{z}} \int e^{-\frac{y^2}{2}} z^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} dy dz \end{aligned}$$

Nous avons simplement reporté ici l'expression *XI.5* de la densité χ_r^2 à r degrés de liberté. Dans le présent contexte, $r = n - 1$, mais nous oublions l'entier n pour la durée du calcul.

Effectuons maintenant le changement de variable $s = y/\sqrt{z}$, de manière à passer des variables y, z aux variables s, z . Le jacobien de la transformation est \sqrt{z} , de sorte que notre intégrale devient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a < S < b) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} \int_{a < s < b} \int e^{-\frac{zs^2}{2}} z^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{z}{2}} ds dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} \int_a^b \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{s^2+1}{2}z} z^{\frac{r-1}{2}} dz \right\} ds \end{aligned}$$

Ceci montre déjà que la densité cherchée sera l'expression entre accolades (multipliée par le coefficient), qui est une intégrale eulérienne connue. En effet, puisque

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz$$

on voit que notre densité sera

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2+1}{2}z} z^{\frac{r-1}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{(\frac{s^2+1}{2})^{\frac{r+1}{2}}}$$

En regroupant toutes les puissances de 2 éparpillées dans cette dernière expression, on peut simplifier : $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{r}{2}} \cdot 2^{-\frac{r+1}{2}} = 1$; d'où

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})} \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{(s^2 + 1)^{\frac{r+1}{2}}} \quad (XI.11)$$

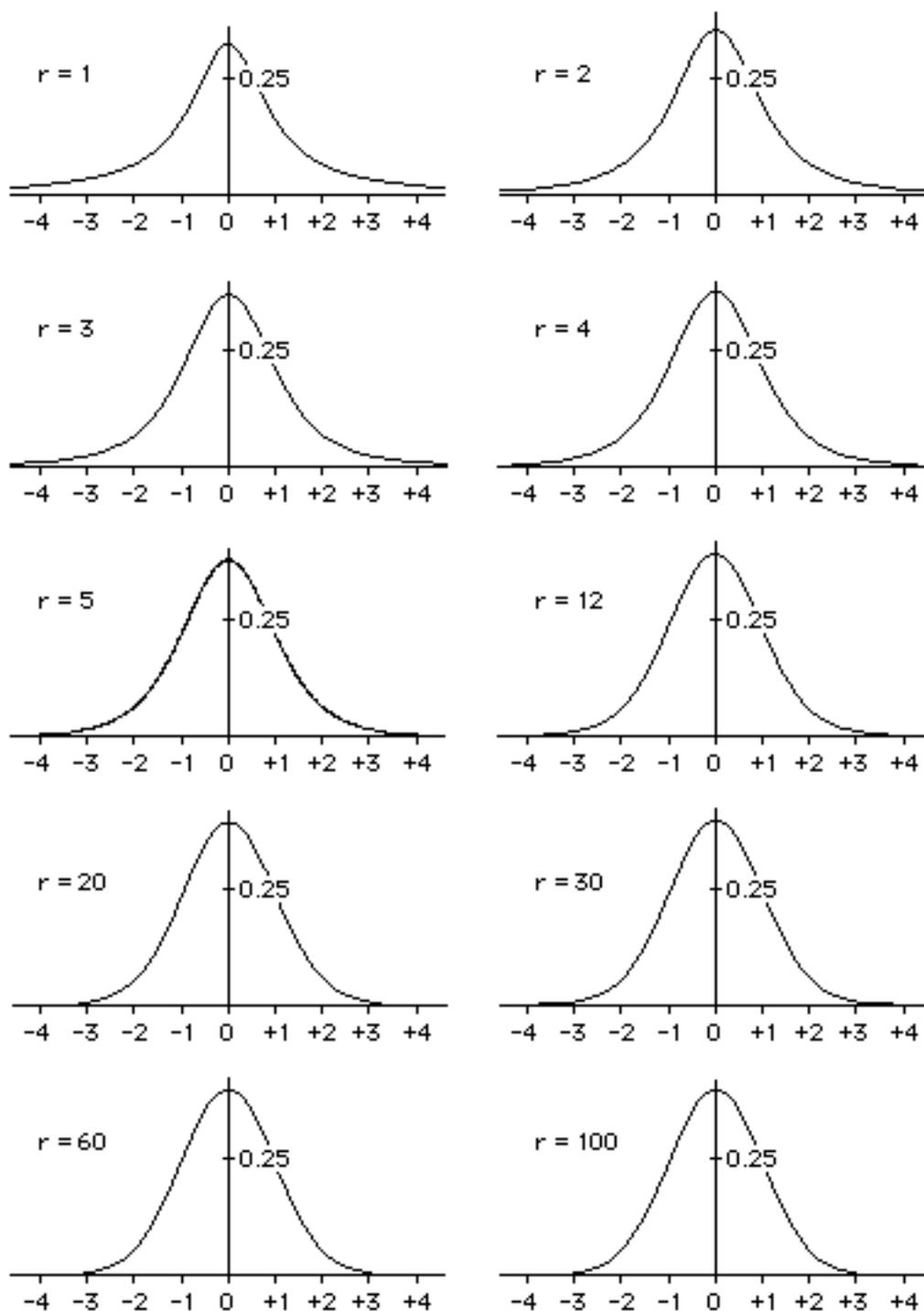


figure 49: Les graphiques ci-dessus sont ceux des densités de Student à r degrés de liberté pour $r = 1, 2, 3, 4, 5, 12, 20, 30, 60, 100$. Les derniers ne se distinguent pratiquement plus de leur limite gaussienne.

Tests statistiques

Rappelons que dans ces calculs $r = n - 1$. La variable Z est ici la somme des carrés des écarts par rapport à la moyenne théorique m supposée connue. Mais la variance empirique est égale à $Z/(n-1)$ (cf. chapitre suivant *XII.6*). Pour *pratiquer* le test de Student on peut indifféremment considérer Y/\sqrt{Z} ou bien $Y/\sqrt{Z/(n-1)} = \sqrt{n-1} \cdot Y/\sqrt{Z}$. Toutefois la convention communément admise est de considérer $Y/\sqrt{Z/(n-1)}$. La loi de Student (ou plutôt la *densité* de Student) est celle de $Y/\sqrt{Z/(n-1)}$ et non celle de Y/\sqrt{Z} . Ce n'est qu'une convention, mais étant donné que tous les logiciels de statistique la respectent, on doit la respecter aussi si on veut employer ces derniers tels qu'ils sont livrés au client. La relation entre les deux densités est simple: c'est la relation entre les densités de deux variables aléatoires proportionnelles: si $f(t)$ est la densité d'une variable aléatoire X , et $g(t)$ celle de αX , on a bien sûr

$$\mathcal{P}(a < X < b) \simeq \int_a^b f(t) dt$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) dt &\simeq \mathcal{P}(a < \alpha X < b) = \mathcal{P}\left(\frac{a}{\alpha} < X < \frac{b}{\alpha}\right) \\ &\simeq \int_{a/\alpha}^{b/\alpha} f(t) dt = \int_a^b f\left(\frac{s}{\alpha}\right) \frac{1}{\alpha} ds \end{aligned}$$

où la dernière égalité s'obtient par le changement de variable $s = \alpha t$. Pour faire apparaître la densité d'une variable aléatoire W , il suffit d'exprimer la probabilité $\mathcal{P}(a < W < b)$ sous la forme d'une intégrale dont les bornes sont a et b , ce qui est le cas ci-dessus. Par conséquent

$$g(t) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \tag{XI.12}$$

formule qui permet de calculer très facilement la densité de αX à partir de celle de X . Or la densité de Student est celle de $\sqrt{n-1} \cdot Y/\sqrt{Z}$, il suffit donc de prendre $\alpha = \sqrt{n-1} = \sqrt{r}$ dans *XI.12*: la densité $f(t)$ de Y/\sqrt{Z} étant donnée par *XI.11*, on obtient pour la densité de Student

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \frac{1}{\left(\frac{t^2}{r} + 1\right)^{\frac{r+1}{2}}} \tag{XI.13}$$

On l'appelle densité de Student à r *degrés de liberté*. Mais r est égal à $n - 1$, car, tout comme pour la densité χ^2 , les n variables aléatoires gaussiennes dont la somme des carrés est Z (les n fluctuations autour de m) ont une somme nulle, ce qui diminue d'une unité leurs degrés de liberté.

Lorsque r tend vers l'infini, cette densité de Student tend vers une limite. En effet, on sait que le quotient $\Gamma(x + \frac{1}{2})/\Gamma(x)$ est équivalent à $x^{\frac{1}{2}}$ lorsque x tend vers l'infini (ici $x = r/2$) et que $(1 + t^2/r)^{-\frac{r+1}{2}}$ tend vers $e^{-\frac{t^2}{2}}$, donc la densité limite sera $(1/\sqrt{2\pi})e^{-\frac{t^2}{2}}$, c'est-à-dire la densité gaussienne normalisée. En pratique, pour les exigences de précision courantes, cette limite est déjà atteinte pour $r = 20$ (voir figure 49).

Une fois connue la densité de $S = Y/\sqrt{Z}$ ou de $S' = Y/\sqrt{Z/(n-1)}$ on pourra effectuer un test d'hypothèse: on calcule à partir de la valeur a priori m et des données statistiques la valeur *observée* de la variable aléatoire S ci-dessus. Si elle dépasse un seuil déterminé, on conclura que, *indépendamment de la valeur inconnue de σ* , les écarts par rapport à la moyenne sont trop forts pour que l'hypothèse d'équiprobabilité puisse être retenue comme plausible. Pour la détermination de ce seuil on procédera comme pour le test du χ^2 : il sera tel que la probabilité de le dépasser soit inférieure à une norme de certitude conventionnelle, par exemple 0.05 ou 0.01.

Ainsi le test du χ^2 doit être utilisé lorsqu'on connaît a priori les écarts-types: on forme alors la somme normalisée des carrés des écarts par rapport à la moyenne empirique. En revanche le test de Student sera utilisé lorsqu'on connaît la moyenne théorique m a priori, et qu'on sait également a priori (par des considérations de symétrie et d'invariance) que les écarts par rapport à m ont tous le même écart-type σ , mais que ce dernier est inconnu.

Il est essentiel, lorsqu'on recourt à ces tests, de les employer à *bon escient*. Des tests pharmaceutiques effectués en clinique (par exemple l'observation sur un groupe de cinquante personnes recevant un médicament hypotenseur, comme nous en avons discuté au chapitre **X**) ne s'apparentent pas à l'expérience avec les dés, même si on n'en conteste pas la reproductibilité. En effet les fluctuations de la tension dans un groupe (ou au cours du temps chez une même personne) n'ont aucune raison d'obéir à la loi multinômiale; d'ailleurs, la tension ne prend pas que six ou huit valeurs, c'est un paramètre pratiquement continu. Il est raisonnable de considérer les fluctuations de tension comme gaussiennes, mais on en ignore l'écart-type.

On a établi empiriquement avec une précision assez poussée que la répartition des $Q.I.$ (quotient intellectuel) dans une très grande population est gaussienne, car on a pu disposer de données assez nombreuses. Le $Q.I.$ semble en effet suffisamment passionner les décideurs pour que des expériences à grande échelle puissent trouver un financement. Mais l'écart-type varie beaucoup selon les populations; il n'y a pas pour le $Q.I.$ un écart-type universel.

Tests statistiques

Les mécanismes moléculaires de l'hérédité obéissent à une causalité spatio-temporelle simple qui permettent de cerner "le niveau où intervient le hasard pur". Si par déduction a priori on établit une loi multinômiale pour la combinaison de certains gènes, et qu'on souhaite tester sur un échantillon une hypothèse sur les effets observables de cette combinaison, le test du χ^2 prend tout son sens, comme dans l'exemple du dé. En revanche, le métabolisme d'un organisme vivant complexe, ou la psychologie animale, ne sont pas réductibles à une causalité spatio-temporelle simple (plus exactement : même si cette réduction est possible, nous ne savons pas l'effectuer) ; les tests ne reposent alors que sur des extrapolations plausibles. Dans la plupart des cas qui concernent le vivant, l'hypothèse des fluctuations gaussiennes est simplement plausible.

Le choix du test pertinent ne doit donc jamais être laissé au hasard. Lorsque ce choix est dûment motivé, il exprime toujours une hypothèse sur le rôle joué par le hasard dans le phénomène testé. Ces hypothèses devraient — selon le véritable esprit scientifique — être formulées explicitement et discutées, mais c'est rarement le cas dans la pratique.

Bien entendu il existe d'innombrables autres tests statistiques que les deux que nous venons d'étudier, mais ce n'est pas l'ambition de cet ouvrage de présenter un exposé exhaustif de tous les tests. Et bien entendu, on peut rencontrer des situations où *aucun* des deux tests étudiés ne convient ; c'est pourquoi les statisticiens en ont créé d'autres. Mais tout test, aussi sophistiqué qu'il soit, repose sur des hypothèses implicites.

XII. ANALYSE STATISTIQUE DES DÉPENDANCES.

XII. 1. Corrélation de deux variables aléatoires.

Au chapitre VI (variables aléatoires), nous avons introduit une grandeur appelée la *covariance* de deux variables aléatoires. Nous avons vu alors que, lorsque deux variables aléatoires X et Y sont stochastiquement indépendantes, leur covariance est nulle, mais que la covariance peut être nulle aussi pour des variables dépendant l'une de l'autre. Les trois tableaux du chapitre VI montrent trois possibilités pour la loi conjointe de deux variables aléatoires : (1) elles sont stochastiquement indépendantes ; (2) l'une est fonction de l'autre ; (3) elles ne sont pas stochastiquement indépendantes, et ne sont pas non plus fonction l'une de l'autre. Les trois exemples avaient été choisis de sorte que dans les trois cas, la covariance soit nulle. Ceci afin de bien montrer que la covariance n'est pas une mesure de la dépendance, qu'elle serait d'autant plus grande que la dépendance entre les deux variables serait plus forte (si tel était le cas, la covariance serait nulle pour le tableau 1 seulement ; elle serait maximum pour le tableau 2 et entre les deux pour le tableau 3). En examinant les choses de près, il apparaît que la covariance ne mesure pas la dépendance en général, mais seulement la dépendance *linéaire*, ou plus exactement la dépendance *affine*. Dans le tableau 2 du chapitre VI, Y dépend de X , mais pas linéairement : $Y = X^2$, donc Y est bien fonction de X , mais à une valeur donnée de Y correspondent deux valeurs opposées de X , qui s'annulent mutuellement dans le calcul de la covariance. On peut vérifier que si Y était une fonction linéaire (ou affine) de X , la covariance serait maximum. Si au lieu d'une dépendance linéaire rigoureuse, on avait une dépendance "floue" (mais linéaire), la covariance serait intermédiaire entre zéro et le maximum.

Afin de voir cela en détail, le mieux est d'introduire une troisième variable aléatoire $Z_\lambda = Y - \lambda X$, où λ est un paramètre réel fixé. Si la loi conjointe de X et Y est donnée, elle permet bien sûr de calculer la loi de Z_λ . Si par exemple la variance de Z_λ est nulle, cela signifie que Z_λ est, avec probabilité 1, c'est-à-dire avec certitude, égale à sa moyenne $m = \mathbf{E}(Z_\lambda)$. Mais comme $Z_\lambda = Y - \lambda X$, cela signifierait aussi que Y est avec certitude égale à $\lambda X + m$, donc que Y est une fonction affine, de pente λ , de X . Si la variance de Z_λ

Analyse statistique des dépendances

n'est pas nulle, mais petite, cela signifie que Z_λ s'écarte peu, ou ne s'écarte qu'avec une faible probabilité, de sa moyenne m , et cela revient à dire que Y s'écarte peu, ou avec une faible probabilité, de $\lambda X + m$, ou encore, que la dépendance de Y par rapport à X est floue (comme dans le tableau 3), mais affine de pente λ . On peut donc dire que la variance de Z_λ est une mesure du degré de dépendance affine, pour une pente λ donnée, de Y par rapport à X . Voyons maintenant comment interpréter la covariance de X et Y dans ce contexte.

Désignons par $r_{j,k} = \mathcal{P}(X = x_j ; Y = y_k)$ la loi conjointe de X et de Y , par $a = \sum_{j,k} r_{j,k} x_j$ la moyenne de X , et par $b = \sum_{j,k} r_{j,k} y_k$ la moyenne de Y . Si on calcule la variance de Z_λ à partir de ces ingrédients, on obtient ceci :

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(Z_\lambda) &= \sum_{j,k} r_{j,k} [y_k - b - \lambda(x_j - a)]^2 \\ &= \sum_{j,k} r_{j,k} [(y_k - b)^2 - 2\lambda(x_j - a)(y_k - b) + \lambda^2(x_j - a)^2] \\ &= \mathbf{Var}(Y) - 2\lambda \mathbf{Cov}(X, Y) + \lambda^2 \mathbf{Var}(X) \end{aligned}$$

Or la variance est une grandeur qui est par nature positive, de sorte que, quelle que soit la valeur de λ , on aura toujours $\mathbf{Var}(Z_\lambda) \geq 0$; d'après ce qui précède, cela a pour conséquence que

$$\mathbf{Var}(Y) - 2\lambda \mathbf{Cov}(X, Y) + \lambda^2 \mathbf{Var}(X) \geq 0$$

Cette inégalité étant vraie quel que soit λ , on en déduit que nécessairement, dans tous les cas

$$\mathbf{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{\mathbf{Var}(X) \cdot \mathbf{Var}(Y)} \quad (XII.1.)$$

en outre, on peut dire que, pour que $\mathbf{Var}(Z_\lambda) = 0$, il faut et il suffit que

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \sqrt{\mathbf{Var}(X) \cdot \mathbf{Var}(Y)} \quad (XII.2.)$$

et que

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mathbf{Var}(Y)}{\mathbf{Var}(X)}} \quad (XII.3.)$$

Ainsi, $\mathbf{Cov}(X, Y)$ est maximum lorsque $\mathbf{Var}(Z_\lambda) = 0$, λ^2 étant égal à $\mathbf{Var}(Y)/\mathbf{Var}(X)$.

On peut donc résumer les choses ainsi : dans tous les cas la covariance de X et Y peut au maximum être égale à $\sqrt{\mathbf{Var}(X) \cdot \mathbf{Var}(Y)}$; elle *atteint*

ce maximum lorsque Y est une fonction affine de X de pente (*XII.3*). Lorsque la corrélation n'est pas égale à ce maximum, mais en est proche, Y est approximativement égale à $\lambda X + m$, ce qui veut dire que Y ne s'écarte sensiblement de $\lambda X + m$ qu'avec une faible probabilité (dépendance "floue").

. .



. .
.

figure 50

Ce graphique représente les valeurs prises par les deux variables aléatoires X et Y du tableau 2 du chapitre **VI** (les valeurs de X sont les abscisses des points et les valeurs de Y sont les ordonnées des points). Chaque point est affecté du poids correspondant à sa probabilité, donnée par la loi conjointe de X et Y : le point de coordonnées x_j, y_k a le poids $\mathcal{P}(X = x_j; Y = y_k)$ (mais les poids ne se voient pas sur le graphique). La droite de régression est représentée: c'est la droite la plus proche possible (en un certain sens, défini dans le texte) du nuage des points. Ici, bien que ce soit *la plus* proche, elle n'est pas proche car la corrélation entre les deux variables aléatoires est nulle.

La valeur maximum de la covariance donnée par (*XII.2*) dépend des variances de X et Y ; la covariance n'est donc pas la pure mesure du degré de dépendance linéaire entre X et Y , mais inclut aussi une mesure de leurs variances. Afin de séparer les deux, il est commode d'introduire la grandeur

$$\rho = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{Var}(X) \cdot \mathbf{Var}(Y)}} \quad (\text{XII.4.})$$

qu'on appelle le coefficient de corrélation de X et Y ; celui-ci est nécessairement compris entre -1 et $+1$, et il est égal à $+1$ si, et seulement si, l'égalité

(XIII.2.) est satisfaite, c'est-à-dire lorsque Y est une fonction affine de X . Le coefficient de corrélation mesure donc le degré de dépendance affine entre X et Y , indépendamment de leurs variances respectives et sans préjuger de la pente λ . Ce degré est de 100% lorsque Y est une fonction affine de X , et est proche de 100% si Y est proche d'une fonction affine de X , ou du moins si Y ne s'écarte qu'avec une faible probabilité d'une fonction affine de X . Dans le cas du couple X, Y décrit sur le tableau 2 du chapitre VI, on a $Y = X^2$, c'est-à-dire que Y est fonction de X , mais le degré de dépendance *linéaire* de Y par rapport à X est nul. Cela peut se comprendre aisément : si on représente les valeurs que peut prendre (avec une probabilité non nulle) le couple X, Y par des points du plan ayant ces valeurs comme coordonnées, on obtient des points situés sur une parabole (voir figure 50) ; si Y était une fonction affine de X , les points seraient sur une droite. On peut dire que le degré de dépendance linéaire de Y par rapport à X est élevé si l'ensemble des points reste proche d'une certaine droite (par exemple sur la figure 51). Pour les points de la figure 50, aucune droite ne peut approcher correctement la parabole, et toutes les droites possibles sont également peu satisfaisantes ; c'est pourquoi on peut dire que le degré de dépendance linéaire de Y par rapport à X est nul.

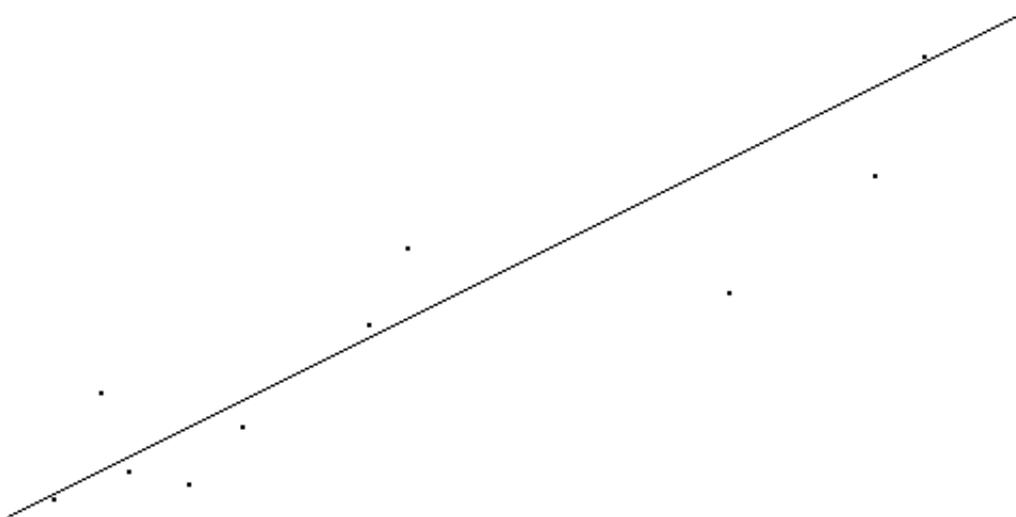


figure 51

Ce graphique montre un nuage de points correspondant aux valeurs qui seraient prises par deux variables aléatoires fortement corrélées (c'est-à-dire dont le coefficient de corrélation est proche de 1). Ici, contrairement à la figure 50, la droite de régression est réellement proche du nuage des points.

En général, pour un couple quelconque X, Y de variables aléatoires, il

existe une valeur de λ qui rend minimum l'expression (XII.1.), c'est-à-dire qui rend minimum la variance de $Z_\lambda = Y - \lambda X$; la droite d'équation $y = \lambda x + \mathbf{E}(Z_\lambda)$, correspondant à ce minimum, est appelée la *droite de régression* de Y par rapport à X . En interprétant la variance de Z_λ comme la somme des carrés des écarts des points par rapport à la droite (pondérés par les probabilités correspondantes), on peut dire que la droite de régression est la droite des "moindres carrés". Si on calcule la valeur de λ correspondant à ce minimum, on obtient

$$\lambda = \rho \sqrt{\frac{\mathbf{Var}(Y)}{\mathbf{Var}(X)}}$$

ce qui redonne (XII.3) lorsque $\rho = 1$. L'ordonnée à l'origine de la droite de régression est simplement $\mathbf{E}(Z_\lambda) = \mathbf{E}(Y) - \lambda \mathbf{E}(X)$.

Il faut bien comprendre ceci: on peut toujours calculer la droite de régression, sauf si la variance de X est nulle. Par exemple, dans le cas du tableau 2 du chapitre VI, la droite de régression existe (elle est représentée sur la figure 50): c'est la droite de pente 0 et d'ordonnée à l'origine 2. En effet $\lambda = \rho \sqrt{\mathbf{Var}(Y)/\mathbf{Var}(X)} = 0$ et $\mathbf{E}(Y) - \lambda \mathbf{E}(X) = 2$. Mais bien que cette droite existe, elle n'est pas proche de la parabole, de sorte qu'elle n'a rien à voir avec la dépendance de Y par rapport à X : elle minimise bien la somme des carrés des écarts, mais ce minimum n'est pas petit. Ainsi, pour n'importe quel couple X, Y de variables aléatoires (sauf si $\mathbf{Var}(X) = 0$), on peut trouver une fonction affine des moindres carrés, mais celle-ci ne représentera correctement la dépendance de Y par rapport à X que si le coefficient de corrélation est assez proche de 1.

Dans le cas du tableau 2 du chapitre VI, on devrait pouvoir dire que le degré de dépendance linéaire de Y par rapport à X est 0, mais qu'en revanche le degré de dépendance "quadratique" de Y par rapport à X est de 100%. Peut-on introduire des paramètres liés aux variables aléatoires X et Y , qui joueraient un rôle analogue à la covariance et au coefficient de corrélation, et qui permettraient de calculer quantitativement le degré de dépendance "quadratique" de Y par rapport à X ? La réponse est oui, mais il n'existe pas pour des fonctions non linéaires de procédé aussi simple que pour le cas linéaire. Nous reprendrons cela plus loin, dans la section 4 ("régression non linéaire").

XII. 2. Moyenne, variance, et covariance empiriques.

Dans le Calcul des probabilités, on calcule des probabilités à partir d'une invariance postulée. Les probabilités que l'on déduit ainsi par le calcul, sont

Analyse statistique des dépendances

appelées des *probabilités a priori*. Leurs valeurs sont exactes : par exemple on trouvera que la probabilité de tel ou tel événement est $\frac{31}{73}$ et non un nombre approximativement égal à $\frac{3}{7}$, 0.42 ou 0.425.

À l'inverse du Calcul des probabilités, la Statistique ne traite pas de probabilités a priori. Elle ne fait que mesurer sur des échantillons. Nous avons déjà discuté au chapitre **X** ce qu'elle mesure. Soit, par prélèvement d'un échantillon sur une population, elle permet (c'est la méthode du sondage) de mesurer approximativement les proportions exactes sur la population totale ; soit elle permet, en répétant un grand nombre de fois une expérience reproductible (par exemple le lancer d'une pièce de monnaie) de mesurer approximativement les probabilités a priori de l'expérience. Si par exemple on a une pièce de monnaie non équilibrée, qui a un peu plus de chances de tomber sur pile que sur face, on peut difficilement trouver le "niveau où intervient le hasard pur" (celui-ci était facile à trouver si la pièce est symétrique, car justement la symétrie conduit à des invariances, mais sans symétrie, on ne peut plus). Dans ce cas on peut cependant mesurer a posteriori la probabilité de pile en lançant un grand nombre de fois la pièce et en comptant combien de fois la pièce est tombée sur pile. Pour connaître les fréquences moyennes d'accidents (et cette connaissance est nécessaire pour organiser des services d'assistance ou calculer le montant des primes d'assurance) on ne peut pas procéder autrement, car on est incapable de trouver une invariance a priori. Il en va de même lorsqu'on explore un domaine entièrement nouveau, où il existe une invariance sous-jacente, mais inconnue. Par exemple pour la statistique de Bose – Einstein, on ignorait au départ le principe d'invariance sous-jacent ("indiscernabilité des particules"). Celui-ci n'a pas été deviné à partir de rien par la seule logique : il a été déduit par induction à partir de résultats *statistiques* expérimentaux.

Ainsi la Statistique traite des données brutes, à travers lesquelles on cherche à détecter l'effet de probabilités inconnues. Les données brutes sont mesurées sur des objets, et un ensemble de données est mesuré sur un ensemble d'objets appelé un *échantillon* : les données sont des grandeurs se rapportant aux objets de l'échantillon. Par exemple l'échantillon est un ensemble de pièces manufacturées, disons pour fixer les idées cent cinquante cylindres en acier inoxydable. On peut mesurer les longueurs de ces cylindres, les diamètres, et les poids. Si on numérote (ne serait-ce que par la pensée) les cylindres de 1 à 150, appelons par exemple x_i la longueur du i^{e} cylindre, y_i son poids, et z_i son diamètre. Les trois grandeurs x_i , y_i , et z_i viennent donc du même objet $N^{\circ}i$.

On distinguera donc l'ensemble des *objets*, appelé échantillon, et les

données numériques qui s'y rapportent, qui sont les *variables d'échantillon* ou *grandeurs empiriques*. Ainsi la longueur x , le poids y , et le diamètre z de l'exemple précédent sont trois variables empiriques relatives au même échantillon. De même que le Calcul des probabilités traite essentiellement de variables aléatoires, la Statistique traite de variables d'échantillon. Au paragraphe 1 ci-dessus, nous avons vu comment la covariance de deux variables aléatoires permettait d'évaluer leur degré de dépendance linéaire mutuelle. Si on souhaite détecter sur un échantillon les effets d'une relation linéaire inconnue entre deux paramètres, on ne peut pas utiliser les grandeurs introduites au paragraphe 1, à savoir la covariance ou le coefficient de corrélation, puisque nous ne connaissons pas de probabilités a priori. C'est pourquoi la Statistique fait appel à des grandeurs de nature différente, liées à l'échantillon et non à des probabilités a priori (mais ayant un rapport avec les précédentes, que nous allons élucider), et qui sont la moyenne, la variance, ou la covariance *d'échantillon*. On dit aussi moyenne, variance, ou covariance *empiriques*. Par opposition, on appellera moyenne, variance, ou covariance *théorique* la moyenne, variance, ou covariance d'une variable aléatoire (telles qu'elles sont définies au paragraphe 1).

Pour un échantillon comportant n objets, la moyenne d'une variable d'échantillon x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) est définie comme suit

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \quad (XII.5.)$$

Ceci est très facile à comprendre puisque c'est ainsi qu'on calcule les moyennes aux examens (l'échantillon est alors l'ensemble des copies). La variance d'échantillon de la variable x_i sera

$$P = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2 \quad (XII.6.)$$

où $\bar{x} = M$ est la moyenne de la même variable. Notez bien le facteur $1/(n-1)$ et non $1/n$). La covariance d'échantillon de deux variables x_i et y_i se rapportant au *même* échantillon est

$$Q = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (XII.7.)$$

où \bar{x} est la moyenne des x_i et \bar{y} celle des y_i . La covariance entre deux variables ne se rapportant pas au même échantillon n'a généralement pas de signification.

Analyse statistique des dépendances

On notera tout particulièrement le coefficient $\frac{1}{n}$ pour les moyennes, mais $\frac{1}{n-1}$ pour les variances ou la covariance. Nous donnerons plus loin l'explication de ce choix qui au premier abord peut sembler bizarre.

La variance (théorique) d'une variable aléatoire et la variance (empirique) d'une variable d'échantillon sont des concepts différents, quoique apparentés. De même pour les moyennes ou les covariances. Du point de vue mathématique, d'abord, le calcul de la moyenne ou de la variance d'une variable aléatoire s'effectue en affectant à chaque valeur de la variable un *poids* égal à la probabilité de cette valeur ; par contre lorsqu'on calcule la moyenne ou la variance d'un échantillon, tous les points (ou coordonnées) de l'échantillon ont le même poids (par exemple $\frac{1}{n-1}$ pour la variance et $\frac{1}{n}$ pour la moyenne). Du point de vue pratique, ensuite, la variance d'une variable aléatoire se calcule d'après des probabilités a priori, tandis que la variance d'un échantillon se calcule d'après des résultats qui se sont produits, qui n'ont donc pas ou qui n'ont plus de probabilité.

Lorsqu'on dispose de données statistiques sur une population (par exemple la tension artérielle pour chaque personne d'un groupe de cent), on peut calculer la moyenne ou la variance de la tension artérielle pour cet échantillon. Il suffit d'appliquer une formule, et cela peut se faire sans se poser aucune question. Les problèmes commencent lorsqu'on se demande ce que représentent exactement les grandeurs ainsi calculées : quel est leur sens, quelle information peut-on en tirer concernant l'échantillon ? Et aussi : pourquoi la variance doit-elle être calculée avec le coefficient $\frac{1}{n-1}$ alors que la moyenne l'est avec le coefficient $\frac{1}{n}$?

Pour éclaircir ces mystères, il faut revenir à une remarque faite au chapitre **X** : à propos de l'expérience consistant à tester l'effet d'un médicament sur un groupe, nous avons distingué soigneusement, d'une part la probabilité a priori pour que le médicament agisse sur une personne donnée (cette probabilité résulte du hasard créé par le chaos des mécanismes moléculaires), et d'autre part la distribution des effets parmi les différentes personnes d'un groupe. On peut enregistrer les effets du médicament sur le groupe en notant pour chaque personne la baisse de tension sur les 24 heures qui suivent l'administration du médicament ; l'ensemble de ces données chiffrées constitue alors une variable d'échantillon : on pourra calculer la moyenne d'échantillon et la variance d'échantillon.

Par ailleurs, on peut imaginer *pour chaque personne considérée séparément*, la variable aléatoire dont les valeurs sont les baisses de tension possibles avec les probabilités a priori correspondantes (ces probabilités sont évidemment difficiles à mesurer et impossibles à calculer a priori, et en outre dépendent du temps, mais cela importe peu pour comprendre

le principe). On peut alors imaginer aussi ce que signifie la moyenne (ou espérance mathématique) de cette variable aléatoire, ou sa variance, et comprendre que ces grandeurs n'ont aucun rapport avec la moyenne ou la variance d'échantillon calculée sur le groupe. Comme nous l'avons souligné au chapitre **X**, il n'y a aucune raison que la moyenne d'échantillon calculée sur le groupe soit égale à la moyenne de la variable aléatoire liée à une personne particulière, et de même pour la variance: cela provient de ce que les phénomènes se produisant dans le métabolisme d'une personne particulière ne peuvent pas influencer sur ce qui se passera dans le métabolisme des autres. Il s'agit de deux grandeurs qui n'ont aucun rapport entre elles. On peut même affirmer, en l'absence de phénomènes tels que la contagion ou des comportements de groupe avec incidences biologiques (tabagisme, alcoolisme, habitudes alimentaires, etc.) que certaines variables aléatoires liées au métabolisme d'individus différents sont stochastiquement indépendantes.

Il en va tout différemment si on considère un échantillon provenant de la répétition d'une *expérience reproductible*. Si la variable aléatoire (appelons-la X) est le résultat d'une expérience reproductible, elle aura une moyenne $m = \mathbf{E}(X)$ et une variance $v = \mathbf{Var}(X)$ (dites *théoriques*). Par exemple pour le jeu de pile ou face, X vaudrait 0 pour face et 1 pour pile, avec probabilité $\frac{1}{2}$, ce qui donnerait $m = \frac{1}{2}$ et $v = \frac{1}{4}$. Si on reproduit l'expérience un grand nombre de fois, la loi des grands nombres aura pour effet que la proportion de chacun des résultats possibles sera proche de la probabilité a priori; par exemple, si on lance mille fois la pièce, on obtiendra environ 500 pile et 500 face (avec, comme nous l'avons déjà vu, une incertitude de l'ordre de ± 30). Si on considère les 1000 résultats comme un échantillon statistique, et qu'on calcule la moyenne et la variance *empiriques* pour cet échantillon, alors elles seront proches de la moyenne et de la variance théoriques de la variable aléatoire; si on poursuit le lancement de la pièce, 2000 fois, 10 000 fois, 100 000 fois, etc., la taille de l'échantillon augmentera et la moyenne empirique sera de plus en plus proche de l'espérance mathématique m de la variable aléatoire X (respectivement: la variance empirique sera de plus en plus proche de la variance théorique v).

On peut donc dire ceci: la moyenne (resp. la variance) d'une grandeur empirique sur un échantillon \mathcal{A} et la moyenne (resp: la variance) théorique d'une variable aléatoire X qui représente le résultat possible d'une expérience reproductible \mathcal{E} , sont deux grandeurs pratiquement identiques **lorsque l'échantillon \mathcal{A} est constitué par la répétition d'un grand nombre de fois l'expérience \mathcal{E}** (ou encore: les grandeurs empiriques tendent vers les valeurs théoriques lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini).

Analyse statistique des dépendances

Mais cette équivalence entre les grandeurs empiriques et théoriques n'est valable que pour des expériences reproductibles. Lorsqu'on fait appel à cette équivalence pour interpréter des données relatives à des organismes vivants, par exemple, il faut s'assurer que l'hypothèse de reproductibilité est à peu près légitime.

Les définitions des grandeurs empiriques données en (XII.5.) et (XII.6.) ont été convenues délibérément de manière à satisfaire cette équivalence. En particulier, le mystérieux facteur $\frac{1}{n-1}$ qui apparaît dans ces expressions de la variance (ou de la covariance) empirique, n'a pas d'autre justification que d'être le facteur qui rend la grandeur empirique le plus proche possible de la grandeur théorique correspondante *dans le cas où cette équivalence s'applique*. Si on avait pris le facteur $\frac{1}{n}$ dans la variance, au lieu du facteur $\frac{1}{n-1}$, la grandeur empirique coïnciderait moins bien avec la grandeur théorique. Tout cela s'explique mathématiquement comme suit.

Ayant en vue le principe d'équivalence énoncé ci-dessus, considérons l'échantillon comme résultant de la répétition d'une même expérience, pour laquelle des probabilités a priori existent. Soit donc la variable aléatoire X dont les r valeurs x_j ($j = 1, 2, \dots, r$) sont prises avec probabilité p_j . Si on répète n fois l'expérience décrite par X , on obtiendra un certain nombre n_j de fois la valeur x_j , de sorte que $\sum_j n_j = n$. On peut alors former les grandeurs

$$S_0 = \sum_{j=1}^{j=r} n_j (x_j - m)^2$$

où m est l'espérance mathématique de la variable X , c'est-à-dire la moyenne théorique a priori, et

$$S_1 = \sum_{j=1}^{j=r} n_j (x_j - M)^2$$

où $M = \frac{1}{n} \sum n_j x_j$ est la moyenne empirique de l'échantillon. Si on part du principe que les résultats x_j sont tous des réalisations d'une même expérience reproductible, cela signifie que S_0 et S_1 sont des variables aléatoires qu'on peut écrire

$$S_0 = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - m)^2$$
$$S_1 = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - M)^2$$

où les X_i sont n variables aléatoires stochastiquement indépendantes et de même loi (celle de X), et où $M = \frac{1}{n} \sum_i X_i$. Cela n'est que l'expression

mathématique de l'hypothèse que l'expérience est reproductible, et signifie simplement qu'on reproduit n fois, *indépendamment* et *à l'identique* la variable aléatoire X .

La différence essentielle entre S_0 et S_1 est que les variables aléatoires $X_i - m$ sont stochastiquement indépendantes, alors que les $X_i - M$ sont liées par la relation que leur somme est nulle. Entre S_0 et S_1 on a l'identité

$$S_0 - S_1 = n(M - m)^2 \quad (XII.8)$$

Cela est facile à établir, il suffit de développer les expressions de S_0 et S_1 . Pour la première :

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - m)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - 2m \sum_{i=1}^{i=n} X_i + n m^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - 2n m M + n m^2 \end{aligned}$$

Pour la seconde :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - M)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - 2M \sum_{i=1}^{i=n} X_i + n M^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - 2n M^2 + n M^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - n M^2 \end{aligned}$$

On voit en soustrayant membre à membre que les termes $\sum X_i^2$ s'annulent et il reste

$$S_0 - S_1 = -2n m M + n m^2 + n M^2 = n(M - m)^2$$

ce qui montre bien (XII.8).

L'espérance mathématique de S_0 est par définition $n \mathbf{Var}(X)$, donc celle de S_1 , $\mathbf{E}(S_1)$, est égale à $n \mathbf{Var}(X) - \mathbf{E}(n[M - m]^2)$.

Il est facile de calculer $\mathbf{E}([M - m]^2)$:

$$\mathbf{E}([M - m]^2) = \mathbf{E}\left(\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - m)^2\right]\right) = \frac{1}{n} \mathbf{Var}(X)$$

Par conséquent $\mathbf{E}(S_1) = (n - 1) \mathbf{Var}(X)$, alors que $\mathbf{E}(S_0) = n \mathbf{Var}(X)$. On comprend ainsi pourquoi on a introduit le coefficient $1 / (n - 1)$ dans *XII.6*: d'après la loi des grands nombres appliquée à l'expérience reproductible, si n est grand, les valeurs de S_1 fluctueront autour de leur moyenne $\mathbf{E}(S_1) = (n - 1) \mathbf{Var}(X)$, avec des écarts de l'ordre de \sqrt{n} . La différence entre $\mathbf{E}(S_1)$ et $\mathbf{E}(S_0)$, égale à $\mathbf{Var}(X)$, est certes faible comparée à \sqrt{n} (amplitude moyenne des fluctuations), mais introduit un décalage systématique ou *biais*. La valeur $\frac{1}{n-1} \mathbf{E}(S_1)$ est une meilleure estimation de $\mathbf{Var}(X)$ que $\frac{1}{n} \mathbf{E}(S_1)$, parce qu'elle est basée sur le centre exact des fluctuations de la variable S_1 .

Il faut bien noter que le choix du coefficient $\frac{1}{n-1}$ repose sur une idée préconçue de la "vraie" variance, à savoir que la "vraie" variance est $\mathbf{Var}(X)$. Cette idée préconçue n'a de sens que par le principe de l'équivalence entre grandeurs théoriques et grandeurs empiriques pour les expériences reproductibles. Le coefficient $\frac{1}{n-1}$ ne sert qu'à ajuster la variance empirique à la variance théorique, de manière à satisfaire au plus juste l'équivalence.

Si on étudie une répartition statistique qui ne provient pas d'une expérience reproductible, par exemple dans l'étude de l'effet d'un médicament sur différentes personnes (cf chapitre **X**), il n'est plus possible d'avoir une idée préconçue de la "vraie" variance. Dans ce cas n'importe quel coefficient autre que $\frac{1}{n-1}$ est tout aussi bon, car la variance empirique (qui seule existe) ne peut servir qu'à comparer les dispersions statistiques sur différents groupes; bien sûr, pour que la comparaison d'études provenant de pays différents soit possible et sensée, il faut une norme internationale (par exemple, que *par convention* tout le monde adopte la somme S_1 des carrés des écarts, ou $\frac{1}{n} S_1$, ou encore $\frac{1}{n-1} S_1$), mais la définition *XII.6*, c'est-à-dire $\frac{1}{n-1} S_1$, n'est alors pas plus juste qu'une autre.

La norme internationale qui a été adoptée est celle de la définition *XII.6*, par analogie avec les expériences reproductibles. Mais en dehors de ces dernières, ce n'est qu'une convention. Il ne faut donc pas en être dupe.

XII. 3. Corrélation statistique.

Nous avons vu au paragraphe 1 que la corrélation était la dépendance linéaire (mesurée par le coefficient de corrélation). Mais cela a été traité pour des variables aléatoires, dont la loi conjointe est connue. De même qu'on a pu, dans la section **XII.1**, dériver la corrélation de deux variables aléatoires de leur covariance et de leurs variances, on doit pouvoir dériver une corrélation empirique de la covariance et de la variance empiriques d'un échantillon. Formellement, cela ne pose aucun problème; mais il faudra en interpréter la signification.

Considérons l'exemple suivant. Dans un groupe de cent personnes (numérotées de $i = 1$ à $i = 100$ par randomisation), on relève la tension artérielle. On représente celle-ci sur un graphique de la manière suivante: à chaque personne i correspond un point, dont l'abscisse x_i est l'âge, et l'ordonnée y_i la tension (disons la tension systolique pour fixer les idées). On dispose ainsi d'un échantillon de cent points dans le plan $\{x, y\}$, mais ceux-ci ne sont pondérés par aucune loi de probabilité. Les *moyennes d'échantillon* sont alors les nombres $\bar{x} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i$ (âge moyen de l'échantillon) et $\bar{y} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} y_i$ (tension moyenne de l'échantillon). La *covariance d'échantillon* de l'âge et de la tension est la grandeur

$$Q = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{i=100} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

et de même les *variances d'échantillon* sont

$$P = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{i=100} (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{variance de l'âge})$$

$$R = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{i=100} (y_i - \bar{y})^2 \quad (\text{variance de la tension})$$

Rien n'empêche d'introduire un coefficient de corrélation empirique formellement analogue à celui du paragraphe 1 :

$$\rho = \frac{\text{covariance d'échantillon (entre la tension et l'âge)}}{\sqrt{\text{variance de l'âge} \times \text{variance de la tension}}}$$

Sur le graphique on a cent points (dont l'abscisse représente l'âge et l'ordonnée la tension). Il est facile de vérifier que si ρ était égal à ± 1 ces cent points seraient sur une droite: il n'est en effet pas nécessaire de refaire les calculs du paragraphe 1, puisque formellement la situation est la même (au paragraphe 1, les cent points avaient pour poids les probabilités a priori, ici ils ont tous le même poids $1/99$, mais les calculs effectués formellement ne sont pas affectés par la différence de signification). La pente de la droite serait égale à

$$\lambda = \begin{cases} +\sqrt{\frac{\text{variance de la tension}}{\text{variance de l'âge}}} & \text{si } \rho = +1 \\ -\sqrt{\frac{\text{variance de la tension}}{\text{variance de l'âge}}} & \text{si } \rho = -1 \end{cases}$$

Bien entendu il n'arrive jamais dans la réalité que les cent points soient sur une droite (cela signifierait que la tension serait exactement une fonction

linéaire de l'âge!). Mais ce qu'on observe, c'est que la tension est en moyenne plus élevée chez des personnes plus âgées. Sur le graphique, cela devrait avoir l'effet que les points dont l'abscisse est plus grande doivent avoir aussi ("en moyenne") une ordonnée plus grande, ce qui se traduit par un nuage de points allongé et incliné comme ceux qui sont représentés sur la figure 52; un graphique de la tension et de l'âge aurait l'aspect de la figure 52.2 ou 52.3, donc la corrélation est assez faible.

En Statistique, la connaissance de la droite de régression joue un rôle capital. Elle sert en effet à corriger des données brutes et à séparer les diverses causes qui influencent un phénomène. Supposons que nous cherchions à déterminer une corrélation entre le tabagisme et l'hypertension. Nous effectuons une étude clinique sur deux groupes de personnes, un groupe de cinquante fumeurs consommant au moins vingt cigarettes par jour, et un groupe témoin de cinquante personnes qui ne fument jamais. À première vue, il peut sembler que, pour que l'étude soit valide, il suffit de choisir ces groupes par randomisation. En effet, il s'agit de montrer que sur l'ensemble de la population (disons la population française pour fixer les idées) la tension artérielle moyenne de l'ensemble des fumeurs est nettement supérieure à la tension moyenne sur les non-fumeurs; comme il est impossible de faire une étude sur tous les fumeurs français, on utilise la méthode du sondage en prélevant des échantillons de cinquante personnes dans ces deux populations (comme on ne s'intéresse pas à connaître la tension artérielle moyenne à trois décimales près, mais seulement de vérifier que l'une est nettement supérieure à l'autre, un échantillon de taille modeste suffit). La randomisation garantira alors que les échantillons sont bien "pris au hasard", conformément à ce qui avait été dit au chapitre X.

Mais il se peut que les fumeurs ne soient pas répartis uniformément selon l'âge. Par exemple, une mode anti-tabac aurait pu, au cours des années mille-neuf-cent-quatre-vingt-dix, inciter beaucoup de jeunes à ne jamais fumer, habitude qu'ils garderont ensuite, tandis que chez leurs aînés les non-fumeurs seraient restés rares. Si des échantillons sont choisis par randomisation dans l'ensemble de la population, on aura certes un reflet de la population totale, mais comment savoir si la tension artérielle plus élevée qu'on observera dans le groupe des fumeurs provient du tabagisme et non tout simplement du seul fait que les personnes plus âgées y sont plus nombreuses que dans le groupe des non-fumeurs? Ce problème demeurerait, même si l'étude était effectuée sur la population totale, et ne peut être attribué à la taille modeste de l'échantillon.

Une solution est évidemment de réunir, non pas deux échantillons,

mais quarante répartis selon l'âge, de manière à disposer de vingt couples d'échantillons fumeurs / non-fumeurs, chacun de ces couples étant homogène quant à l'âge. Mais cette solution est beaucoup plus onéreuse. L'étude statistique des corrélations permet de s'en passer.

Il suffit en effet de représenter les résultats concernant les deux échantillons sur deux graphiques, chaque personne correspondant à un point dont l'abscisse est l'âge et l'ordonnée la tension ; on obtient ainsi deux graphiques de cinquante points chacun, l'un représente les non-fumeurs et l'autre les fumeurs. Si, comme il était à craindre, le groupe des fumeurs contient davantage de personnes âgées de plus de quarante ans que le groupe des non-fumeurs, cela se traduira sur le graphique par une inégale répartition de la densité des points : sur le graphique fumeurs, le nuage de points sera plus dense vers la droite, sur le graphique non-fumeurs, il sera plus dense vers la gauche. Mais la droite de régression n'est pas affectée par ces différences de densité. Bien sûr si on prend un autre échantillon, on peut observer une droite de régression un peu différente, et une répartition de densité également différente, mais ce ne sont que des fluctuations par rapport à une valeur moyenne. Ce qui intéresse alors le clinicien n'est pas la répartition, inégale, de la densité selon l'âge, mais la droite de régression : si $y = ax + b$ est la droite de régression des non-fumeurs, et $y = cx + d$ celle des fumeurs, l'influence du tabagisme sur la tension artérielle sera considérée comme établie si **pour tout x , $cx + d$ est supérieur à $ax + b$** . On comprend que, si la corrélation est forte, (c'est-à-dire si le nuage de points ne s'écarte pas beaucoup de la droite), le fait que pour une certaine valeur de x on ait $cx + d > ax + b$ signifie que parmi les personnes d'âge x , la tension artérielle est plus élevée chez les fumeurs que chez les non-fumeurs. Si cette inégalité a lieu pour tout x , cela signifie qu'indépendamment de l'âge, la tension est plus élevée chez les fumeurs que chez les non-fumeurs. Toutefois, pour que cette conclusion soit fondée, certaines conditions doivent être réunies, qui sont les trois suivantes.

1. Si $cx + d - ax - b$, quoique formellement positif, est nettement plus petit que la largeur (mesurée par la variance de $y - ax$) du nuage de points, la signification du résultat est nulle, car la valeur moyenne de $cx + d - ax - b$ pourrait être 0 et la valeur positive trouvée une fluctuation pratiquement aussi fréquente que la valeur 0 elle-même ; en particulier, si le nuage de points est très large (donc si le coefficient de corrélation est petit), il est pratiquement impossible de fonder la conclusion. Si on veut estimer quantitativement la signification du résultat, autrement dit décider si la valeur positive est significative ou au contraire due à des fluctuations normales, on effectuera un test du χ^2 ou apparenté.

Analyse statistique des dépendances

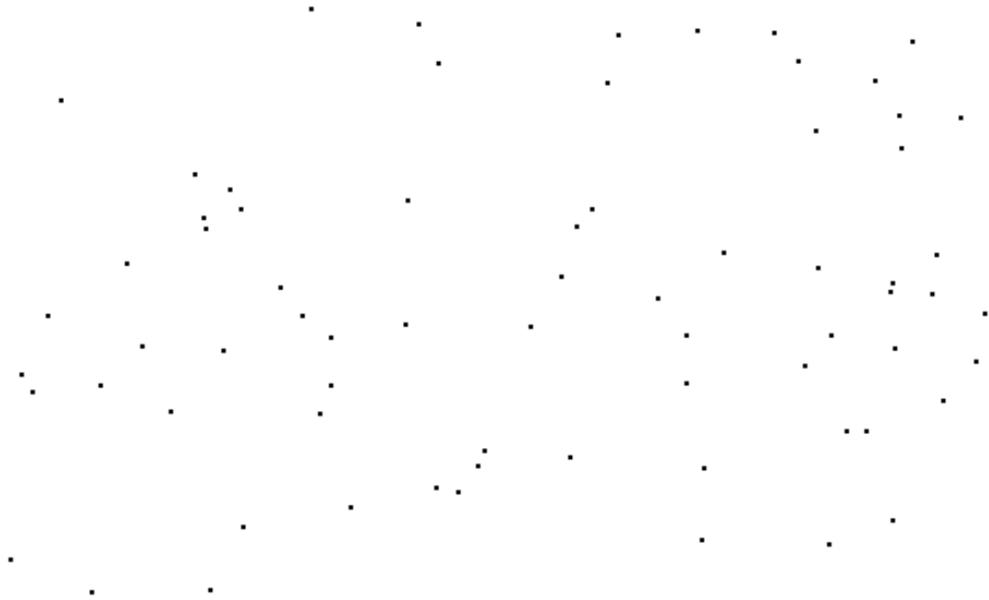


figure 52.1



figure 52.2

Nuages de points faiblement corrélés



figure 52.3

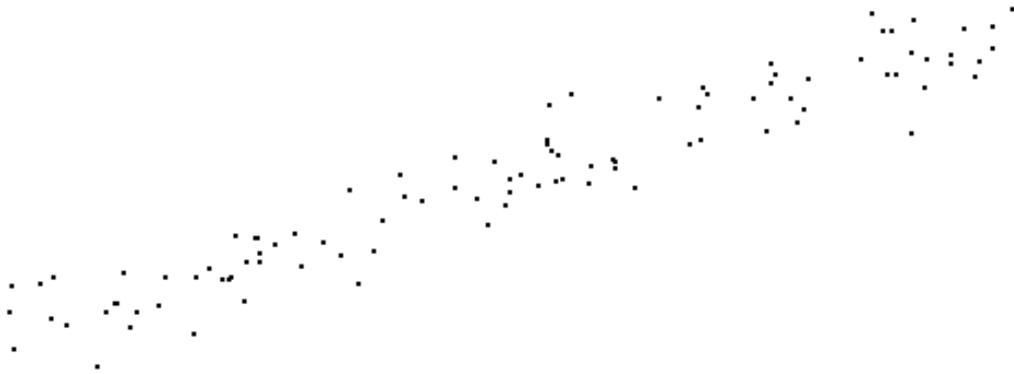


figure 52.4

Ici, la corrélation est plus grande qu'à la page précédente (en fait le coefficient de corrélation ρ dans les différentes figures est tel que d'une figure à la figure suivante $\sqrt{1 - \rho^2}$ est diminué de moitié).

Analyse statistique des dépendances

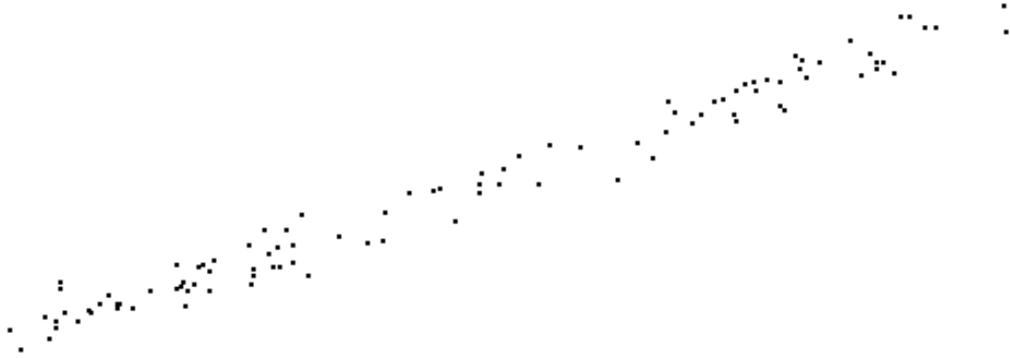


figure 52.5



figure 52.6

Les nuages de points sont maintenant très nettement distribués à proximité de leur droite de régression. On peut dire que celle-ci a une véritable signification.

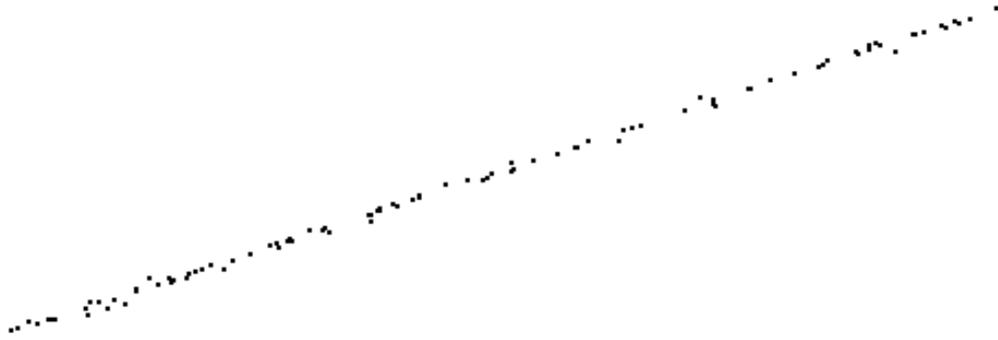


figure 52.7

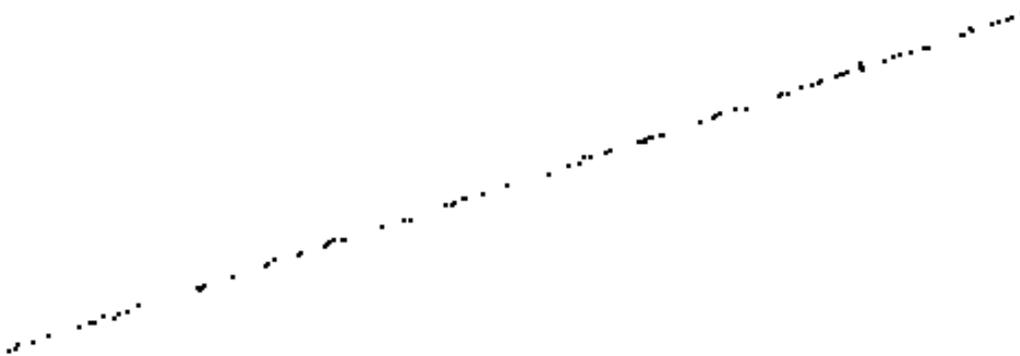


figure 52.8

Enfin, voici l'aspect pris par le nuage de points lorsque la corrélation est vraiment très forte. Sur 52.8, $1 - \rho^2$ est 4000 fois plus petit qu'en 52.1, ce qui veut dire que ρ est pratiquement égal à 1. Dans ce cas on peut dire que l'ordonnée est pratiquement une fonction linéaire de l'abscisse.

Analyse statistique des dépendances

2. L'étude de la régression a été rendue nécessaire (au lieu que nous nous contentions d'un simple calcul de moyenne) par le soupçon d'une corrélation entre le tabagisme et l'âge, corrélation qui se superposerait à la corrélation cherchée entre le tabagisme et l'hypertension et fausserait ainsi les observations. Mais qui nous prouve qu'il n'existe pas d'autres corrélations, que nous ne soupçonnons pas, et qui viendraient fausser également les résultats? Il existe par exemple une corrélation entre la tension et le poids (les obèses sont davantage hypertendus), or fumer agit *négativement* sur le poids. Il faudrait alors, en toute rigueur, étudier aussi la régression tension / poids dans les deux groupes, et effectuer une nouvelle comparaison. Il faudrait refaire la même opération pour *toutes* les corrélations possibles (du moins celles qui sont suffisamment fortes et par conséquent non négligeables), et pouvoir s'assurer qu'on n'en ignore aucune.

3. Enfin, toutes ces études de régression sont valables tant qu'il s'agit de dépendances linéaires; la corrélation entre la tension et l'âge est suffisamment nette pour qu'on puisse dire — avec la précision correspondante — que la tension augmente en moyenne linéairement avec l'âge. Mais si la corrélation est nulle, qu'il existe cependant une nette dépendance non linéaire (comme cela a été illustré sur la figure 50), les droites de régression ne nous apprennent plus rien et ne nous permettent plus de corriger les données statistiques. Il faut alors faire appel à la régression non linéaire (voir section suivante). On peut donc avoir calculé soigneusement toutes les corrélations possibles et effectué les corrections correspondantes, mais aboutir à des conclusions fausses simplement parce qu'une dépendance non linéaire très forte aura échappé à toutes ces précautions.

Toutes ces réserves sont nécessaires pour montrer les limites de l'analyse statistique. Dans beaucoup de situations pratiques on rencontre suffisamment peu de corrélations ou de dépendances pour que ces méthodes aient néanmoins une valeur empirique correcte. Mais il est bien clair que tous les abus (pressentis et dénoncés par le bon sens populaire) proviennent du non-respect de ces réserves. Aucune méthode mathématique ne permet d'en faire l'économie: on peut corriger des données par des calculs de régression (linéaire ou non linéaire), mais les résultats ne sont pleinement corrigés que si l'ensemble des dépendances a été pris en compte; il est légitime de négliger les influences faiblement corrélées avec le paramètre étudié, mais il suffit d'avoir ignoré un seul facteur fortement corrélé avec le paramètre étudié pour que la conclusion perde toute validité. Il est vain d'appliquer des méthodes mathématiques, aussi sophistiquées soient-elles: en aucun cas on ne pourra ainsi compenser l'omission des facteurs occultes.

XII. 4. Régression non linéaire.

La recherche de la droite de régression d'une variable Y par rapport à une variable X se ramenait à un problème de moindres carrés: trouver, pour un nuage de points donné (avec ou sans poids) la fonction affine $Y = f(X) = aX + b$ qui *minimise* les écarts aléatoires. Il va de soi que cette opération est possible pour n'importe quelle fonction $Y = f(a, b; X)$ dépendant de deux paramètres a et b (ou plus). On aurait pu chercher la *parabole des moindres carrés* pour les nuages de points des figures 52. Mais on comprend bien que cette parabole n'aurait aucune pertinence: c'est flagrant pour la figure 52.8, quoiqu'il puisse y avoir un doute pour la figure 52.1. En effet, que la parabole qui rend minimum la somme des carrés des écarts existe est une chose; que ce minimum soit petit en est une autre. C'est-à-dire que la parabole des moindres carrés a aussi peu de pertinence dans la figure 52.8 que la droite de régression n'en avait pour la figure 50.

L'idée de la régression *non* linéaire est d'effectuer cette généralisation: au lieu de chercher la droite de régression d'un nuage de points, chercher une courbe de régression. Mais il n'existe évidemment aucune recette permettant de déterminer le bon type de courbe, qu'il n'y aurait ensuite plus qu'à ajuster. Si on a une raison de penser que le nuage de points suit une parabole plutôt que n'importe quel autre type de courbe, on peut poser pour la fonction $Y = f(X) = aX^2 + bX + c$ (tout comme on avait posé $f(X) = aX + b$ pour la régression linéaire), puis déterminer les coefficients a , b , et c de manière à rendre minimum la somme des carrés des écarts. Cherchons cette parabole des moindres carrés.

La somme des carrés des écarts est

$$S = \sum_{i=1}^n p_i [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n p_i [y_i - ax_i^2 - bx_i - c]^2$$

où on a tenu compte du poids ou probabilité p_i de chaque point (x_i, y_i) : s'il s'agit de variables aléatoires X et Y , les p_i sont donnés par la loi conjointe, s'il s'agit d'un nuage empirique, on aura $p_i = 1/n$. En développant le carré et en introduisant les corrélations suivantes, qu'on peut appeler *corrélations non linéaires*:

$$M_{\alpha, \beta}(X, Y) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^\alpha y_i^\beta$$

on obtient

$$S = M_{0,2} + a^2 M_{4,0} - 2a M_{2,1} + 2ab M_{3,0} + (b^2 + 2ac) M_{2,0} - 2b M_{1,1} - 2c M_{0,1} + 2bc M_{1,0} + c^2$$

Analyse statistique des dépendances

Cette expression est minimum lorsque ses dérivées partielles par rapport à a , b , et c s'annulent. La condition (nécessaire) de minimum est donc le système de trois équations linéaires à trois inconnues a , b , c suivant :

$$\begin{aligned} a M_{4,0} + b M_{3,0} + c M_{2,0} &= M_{2,1} \\ a M_{3,0} + b M_{2,0} + c M_{1,0} &= M_{1,1} \\ a M_{2,0} + b M_{1,0} + c &= M_{0,1} \end{aligned} \quad (XII.9)$$

Si au lieu d'une parabole, on cherche la courbe de régression non linéaire sous la forme d'un graphe de polynôme de degré Q , soit $Y = P(X) = \sum a_j X^j$, on obtiendra un système de $Q + 1$ équations linéaires à $Q + 1$ inconnues a_j (les coefficients du polynôme) :

$$\sum_{j=0}^Q a_j M_{k+j,0} = M_{k,1} \quad (XII.10)$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots, Q$.

Un tel système se résoud numériquement par la *méthode du pivot* bien connue.

Rien n'impose d'ailleurs les polynômes et n'importe quelle fonction de la forme $Y = f(X) = \sum a_j \Phi_j(X)$, où les Φ_j sont des fonctions de base, conduiront à un système d'équations linéaires dont les inconnues seront les coefficients a_j . Mais la linéarité des conditions de minimum XII.9 et XII.10 provient évidemment du fait que la fonction f dépend elle-même linéairement des paramètres. Si on cherche la courbe de régression sous la forme $Y = f(X) = a e^{\alpha X}$, qui dépend des deux paramètres a et α (mais non linéairement en α), les conditions de moindre carré seront alors, et pour cause, un système de deux équations à deux inconnues, mais non linéaires.

On comprend que pour les calculs pratiques il vaut mieux chercher les courbes de régression sous une forme qui soit linéaire selon les paramètres.

Toutefois lorsqu'on a de bonnes raisons de chercher une dépendance non linéaire, il existe un procédé algorithmique efficace (du moins si le nombre de paramètres n'est pas trop élevé) connu sous le nom de *méthode de Levenberg-Marquardt*. Ce procédé est présenté dans l'annexe qui suit ce chapitre. L'algorithme de Levenberg-Marquardt est parfaitement robuste quand il n'y a que deux paramètres. Sa robustesse décroît ensuite avec le nombre de paramètres : au delà de six, l'algorithme n'est plus guère fiable, mais il est très rare que la dépendance soit non linéaire selon six paramètres ; presque toujours, on aura une dépendance linéaire par rapport à la plupart des paramètres, en sorte que seuls deux ou trois d'entre eux produiront la dépendance non linéaire. Il suffira alors d'éliminer préalablement les

premiers par la méthode linéaire du pivot, et traiter ensuite les deux ou trois paramètres restants par la méthode de Levenberg-Marquardt.

Le problème général de la dépendance n'est cependant pas résolu pour autant. Car si on peut ajuster les paramètres d'une famille de courbes, on ne sait pas comment choisir cette famille de courbes. Or la méthode de Levenberg-Marquardt ne résoud évidemment pas ce problème là; elle permet seulement de calculer les paramètres optimaux *pour une famille donnée*.

Si la régression linéaire ne donne aucun résultat, en ce sens que la *droite* de régression correspond à un minimum *qui n'est pas petit* (ce qui se produit sur la figure 50), on peut chercher une *courbe* des moindres carrés qui correspond à un minimum petit; on peut par exemple augmenter le degré du polynôme jusqu'à ce que le minimum devienne petit. En procédant ainsi, on est assuré du succès, puisqu'on sait à l'avance que pour un polynôme dont le degré est *égal* au nombre de points du nuage, la somme des carrés des écarts sera nulle (polynôme d'interpolation des points). Mais ce procédé, qui aboutira donc *forcément* au succès si le nombre de points du nuage est fini, fournira aussi une courbe de régression dépourvue de la moindre pertinence. La courbe doit représenter une loi, dont le nuage de points serait une expression bruitée; si on interpole les points du nuage, et qu'on refait une autre série de mesures qui fourniront un autre nuage, la courbe d'interpolation aura changé. Or la *loi* du phénomène observé (si elle existe) est ce qui ne change pas d'une série de mesures à l'autre, le *bruit* est ce qui change.

On peut donc préciser comme suit les conditions dans lesquelles la régression non linéaire est recommandée. La régression *linéaire* est un problème bien posé parce que les fonctions linéaires, c'est-à-dire les rapports de proportionnalité, jouent un rôle privilégié dans l'étude des grandeurs. Mathématiquement la régression *non* linéaire n'est un problème bien posé que si on choisit a priori une famille paramétrée de fonctions. Le problème formulé ainsi: "parmi toutes les fonctions possibles et imaginables, laquelle minimise la somme des carrés des écarts?" est évidemment absurde. En effet, parmi *toutes* les fonctions possibles et imaginables, il y en a forcément une, et même une infinité, qui rendent exactement nulle la somme des carrés des écarts. Si $P(x)$ est le polynôme d'interpolation des n points, pour lequel $y_i = P(x_i)$, on aura $S = \sum [y_i - P(x_i)]^2 = 0$. À partir de ce polynôme, on peut ensuite fabriquer une infinité de fonctions ayant la même propriété; soit en effet $Q(x)$ une fonction égale à 1 lorsque x est égal à l'un des x_i , mais à n'importe quoi en dehors des valeurs x_i (rien n'empêche une telle fonction d'être différentiable ou analytique). Alors toute fonction $f(x)$ de la forme $P(x) \cdot Q(x)$ remplira également les conditions requises.

Analyse statistique des dépendances

La régression non linéaire est donc une technique qui n'a de sens que lorsqu'on a déjà de bonnes raisons théoriques de postuler un type particulier de dépendance, et qu'on souhaite seulement en ajuster empiriquement les paramètres.

On appellera *modèle de dépendance* un choix particulier d'une famille paramétrée de fonctions; selon le nombre des paramètres, le modèle sera dit à n paramètres.

Mais il ne suffit pas que le problème soit *mathématiquement* bien posé grâce à la présence d'un modèle de dépendance. Il faut aussi que le modèle postulé soit pertinent. Pratiquer la régression non linéaire en utilisant la méthode de Levenberg-Marquardt, ou un logiciel qui la met en œuvre, est une simple technique. Trouver le modèle pertinent est une question d'imagination, mais surtout d'intuition et d'expérience, voire de génie. Car la difficulté n'est pas d'ajuster des paramètres pour minimiser la somme des carrés des écarts, ni de postuler un modèle plus ou moins arbitraire; la difficulté est de séparer ce qui constitue la loi du phénomène (qui reste invariable d'une série de mesures à l'autre), et ce qui constitue le bruit. On peut tester a posteriori un modèle de régression non linéaire par les deux critères suivants :

a) le modèle doit rester valide pour toutes les séries de mesures, c'est-à-dire que le minimum de la somme des carrés des écarts doit être petit pour *toutes* les séries de mesures que l'on effectue;

b) le bruit constitué par les écarts doit également conserver des caractères statistiques constants d'une série de mesures à l'autre. Par exemple si les écarts sont distribués selon une loi gaussienne (cas de loin le plus commun), et si l'écart-type empirique change notablement d'une série de mesures à l'autre, il faudrait conclure que la séparation entre loi et bruit effectuée par le modèle postulé n'était pas correcte.

Le critère b ne peut être négligé au profit du seul critère a . Imaginons par exemple qu'en étudiant la régression linéaire de deux variables X et Y , on constate que les écarts sont élevés pour X petit et deviennent de plus en plus faibles quand X augmente (voir par exemple figure 53.2). Lorsqu'on effectue des mesures il arrive bien plus souvent que les écarts augmentent proportionnellement à X au lieu de diminuer, car il est fréquent que les erreurs soient relatives plutôt qu'absolues. L'inverse est donc surprenant et devrait mettre la puce à l'oreille. Si les fluctuations sont causées (comme les résultats du chapitre VII le font soupçonner) par d'innombrables petites perturbations aléatoires indépendantes qui s'accumulent, on comprend difficilement pourquoi ces perturbations s'évanouissent lorsque X devient grand. Il s'est

donc produit un phénomène qui est intéressant par lui-même ⁽¹⁾. Si on veut analyser la situation de manière complète, la seule droite de régression ne suffit pas, il faut inclure une prédiction concernant la variation éventuelle des écarts. On appellera donc *modèle de régression* (linéaire ou non) un modèle de dépendance (famille paramétrée de fonctions) accompagné d'une prédiction concernant le bruit (par exemple que le bruit est gaussien et que son écart-type est proportionnel à X). En pratique les modèles de régression non linéaire sont rarement autres que gaussiens et incluent toujours un écart-type constant ou proportionnel à X , car les phénomènes du type de la figure 53.2 sont des artefacts, comme nous le verrons plus loin.

L'importance du critère b intervient encore sous un autre aspect. Dans des études expérimentales, on ne peut pas donner à la variable X des valeurs arbitrairement grandes ou arbitrairement petites ; les valeurs accessibles sont en effet toujours limitées par les possibilités pratiques. C'est pourquoi il n'est pas toujours facile de distinguer une dépendance exponentielle d'une dépendance polynômiale : par exemple $e^X \simeq 1 + X + \frac{1}{2}X^2$; on pourrait aisément départager l'exponentielle du polynôme, même si le nuage est très flou, si on pouvait faire tendre X vers l'infini. Mais si les valeurs mesurables de X sont limitées, on ne le peut pas. Existe-t-il alors un moyen statistique de remarquer la différence ? La réponse est oui : supposons par exemple que le bruit soit gaussien et qu'on le constate pour les petites valeurs de X ; supposons en outre que le phénomène soit exponentiel "en réalité", mais qu'on ait choisit un modèle de dépendance de la forme $a + bX + cX^2$, qui après ajustage par moindres carrés donne $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$. Alors les écarts ne seront plus exactement gaussiens pour les grandes valeurs de X , à cause d'une erreur systématique sur la moyenne. Le modèle exponentiel séparerait mieux le signal du bruit que le modèle polynômial.

Ainsi l'analyse statistique du seul bruit permet aussi de détecter si le modèle de dépendance est correct.

Ce qui implique que si l'un des deux critères a et b manque, le modèle de régression doit être revu. Mais il n'existe pas de méthode pour trouver un modèle. La Statistique ne fournit que des critères de vérification a posteriori.

Un point doit encore être précisé. Lorsque les mesures donnent des écarts faibles, c'est-à-dire que le bruit est très petit par rapport au signal, que le nuage de points est concentré au voisinage immédiat d'une courbe qui saute aux yeux, comme sur la figure 52.8, alors les techniques statistiques de régression sont évidemment superflues. Ces techniques deviennent utiles lorsque le bruit est important (ou lorsqu'il varie nettement avec l'une des

⁽¹⁾ Pour l'explication d'un tel phénomène, voir plus loin dans cette section.

variables, comme sur les figures 53 à 57), c'est-à-dire lorsque le nuage est flou, mais qu'on a de bonnes raisons de penser qu'il existe une loi noyée dans ce bruit, et qu'il s'agit de la découvrir. Comme nous avons pu le constater avec les tests statistiques (chapitre **XI**), la Statistique est un outil qui devient inutile quand les fluctuations aléatoires sont faibles. Il est inutile d'appliquer le test du χ^2 pour vérifier l'équilibre d'un dé si on peut le lancer un million de fois et donc obtenir des fluctuations de l'ordre de 0.1%; ce test ne prend son sens que si, n'ayant jeté le dé que cent fois, les fluctuations sont trop fortes pour donner un résultat flagrant. De même, les méthodes de régression ne sont utiles que si l'amplitude des fluctuations, c'est-à-dire l'épaisseur du nuage, est si grande qu'elle efface la loi du phénomène. Ces méthodes statistiques n'apportent cependant pas de certitude quant à la loi en question; elles ne doivent pas dispenser d'une étude plus exacte du phénomène (tout comme un alcootest ne doit pas dispenser d'une prise de sang), mais permettent tout au plus d'économiser du temps et des moyens en évitant de retenir pour une étude plus approfondie un modèle déjà incompatible avec les premières données.

Il faut aussi signaler que la recherche d'une *courbe* de régression se ramène le plus souvent à la régression linéaire après un changement de variable adéquat. En pratique ce procédé est infiniment plus courant que la recherche directe des moindres carrés à partir d'un modèle non linéaire: il est tout particulièrement répandu sous la forme du papier logarithmique, analogue au papier millimétré, sauf que les abscisses et les ordonnées sont toutes deux graduées logarithmiquement (ou les abscisses seulement sur papier semilogarithmique) et non arithmétiquement. Ainsi une dépendance de la forme $Y = aX^\alpha$, c'est-à-dire une fonction puissance, se traduit sur papier logarithmique par une droite de pente α et d'ordonnée à l'origine $\log(a)$, puisque les nouvelles variables $\log(X)$ et $\log(Y)$ sont liées par la dépendance linéaire $\log(Y) = \alpha \log(X) + \log(a)$. Par conséquent, au lieu de chercher une courbe de régression de la forme $Y = aX^\alpha$ en déterminant a et α par les moindres carrés (ce qui est d'autant plus difficile que le paramètre α n'intervient pas linéairement), il est bien plus pratique et plus parlant de chercher la droite de régression de $\log(Y)$ par rapport à $\log(X)$. Mais si on cherche à analyser l'écart lui-même, par exemple pour savoir si l'écart-type est constant en valeur relative ($\Delta X/X$) ou au contraire en valeur absolue (ΔX), il peut être préférable d'employer la méthode directe.

Afin d'illustrer cela, on a donné sur les figures 53 à 57 divers exemples de telles transformations non linéaires. On peut constater que si sur le nuage avant transformation, les écarts sont homogènes, soit en valeur absolue (ΔX), soit en valeur relative ($\frac{\Delta X}{X}$), il n'en est plus du tout de même après

transformation. Il est aisé de donner une description mathématique de ces transformations: supposons que $Y = f(X) + \varepsilon$, où f est une fonction non linéaire et ε une variable aléatoire représentant le bruit. Les points de coordonnées $(x_i, y_i = f(x_i) + \varepsilon_i)$ sont les points du nuage.

Représentons maintenant non plus les points (x_i, y_i) , mais les points $(x_i, g(y_i))$, où $x = g(y)$ est la fonction inverse de $y = f(x)$. Si ε reste assez petit, on peut faire un développement limité de $g(y_i) = g(f(x_i) + \varepsilon_i)$ en puissances de ε_i :

$$\begin{aligned} g(y_i) &\simeq g(f(x_i)) + g'(f(x_i)) \varepsilon_i + \frac{1}{2} g''(f(x_i)) \varepsilon_i^2 \\ &= x_i + \frac{1}{f'(x_i)} \varepsilon_i - \frac{1}{2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)^3} \varepsilon_i^2 \end{aligned}$$

On a utilisé les dérivées connues de la fonction inverse: $g'(f(x)) = 1/f'(x)$ et $g''(f(x)) = -f''(x)/f'(x)^3$. On en conclut que la dépendance non linéaire entre Y et X devient une dépendance linéaire entre $g(Y)$ et X , mais la répartition des écarts aléatoires $(1/f'(x)) \varepsilon$ (le bruit) subit une distorsion. Si l'écart-type de ε est constant, alors dans la nouvelle représentation il variera en $1/f'(X)$. Si $f'(x)$ est croissante, le nouveau nuage de points sera flou pour les petits x , mais se resserrera au voisinage de la droite de régression $y = x$ (voir figure 53.2). Si $f'(x)$ est décroissante, le nuage s'évasera pour les grandes valeurs de x . Le bruit sera réparti de façon inhomogène le long de la droite de régression.

Pour reprendre une remarque faite plus haut: si dans une série d'observations on constate un tel phénomène, on peut en déduire que les variables X et Y ne sont pas rapportées à la bonne représentation. Une transformation non linéaire adéquate des coordonnées rétablira l'ordre.

Lorsque le bruit apparaît en valeurs relatives, le même développement limité conduit à un bruit de la forme $(f(x)/f'(x)) \varepsilon$ après transformation (figures 54.1 et 54.2).

Supposons qu'on recherche par la méthode des moindres carrés sur les paramètres a et α la fonction $y = ax^\alpha$ de régression du nuage de points de la figure 53.1, puis la droite de régression du nuage de points de la figure 53.2 (ou bien la même chose pour les figures 54.1 et 54.2). Techniquement cela est plus compliqué que si le paramètre α intervenait linéairement, mais ce n'est qu'une affaire de programmation facile et sans importance pour le propos qui suit. Il n'y a aucune raison pour que la droite soit exactement la transformée de la courbe $y = ax^\alpha$ par $g(Y) = \sqrt[3]{Y}$ (toutefois elle en sera assez proche si le bruit ε est petit). C'est-à-dire que le procédé d'optimisation par les moindres carrés n'est pas covariant dans la transformation. Il ne revient au

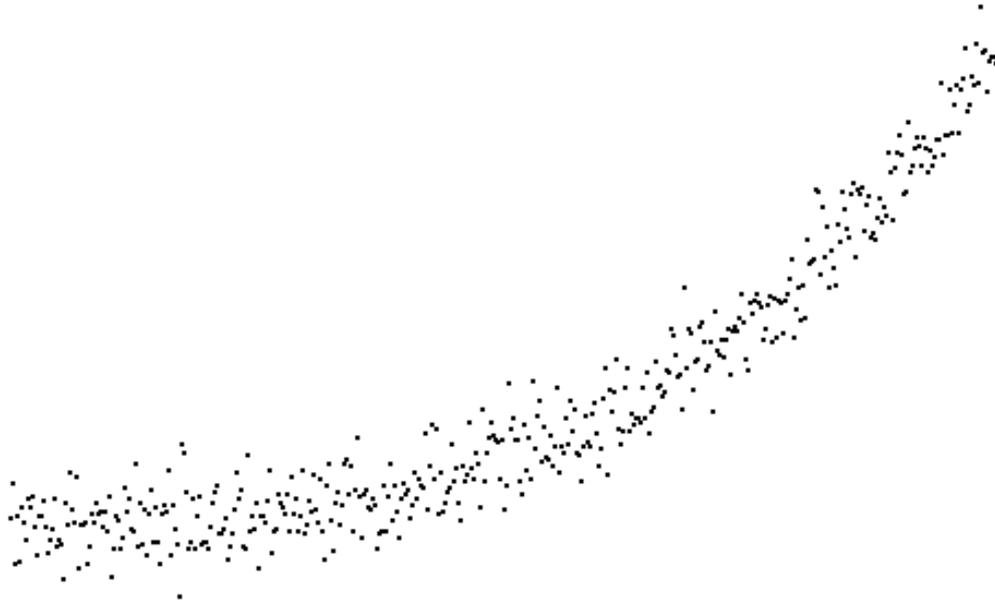


figure 53.1

$$y = ax^3 + \varepsilon$$



figure 53.2

$$y = \sqrt[3]{ax^3 + \varepsilon}$$

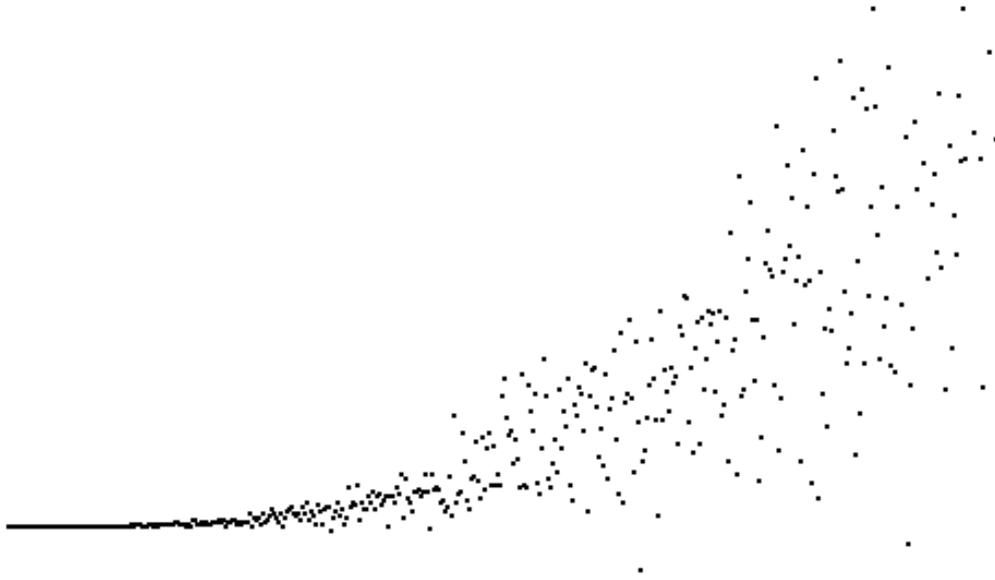


figure 54.1

$$y = ax^3 \cdot (1 + \varepsilon)$$

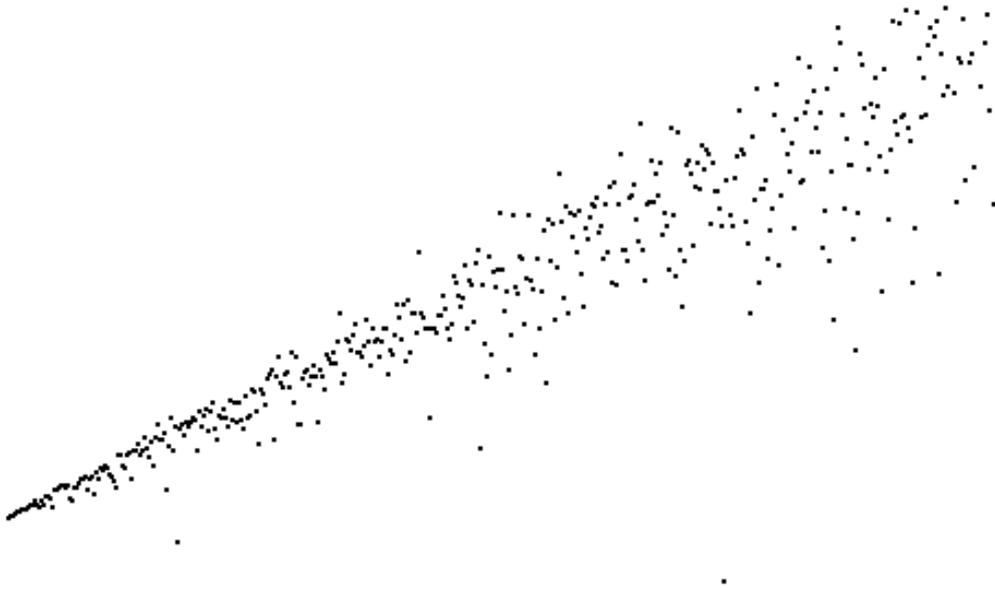


figure 54.2

$$y = \sqrt[3]{ax^3 \cdot (1 + \varepsilon)}$$

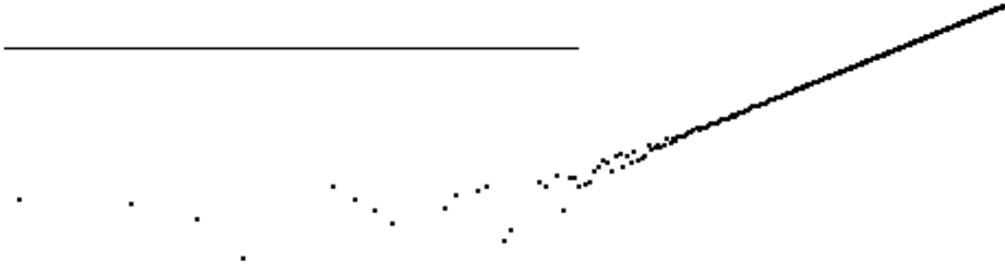


figure 55

$\log y = \log(ax^3 + \varepsilon)$ avec ε extrêmement petit. Le trait horizontal est l'axe des $\log x$ (correspondant à $y = 0$). La pente de la droite de régression est 3, mais l'axe des $\log y$ a été comprimé pour une meilleure mise en page.

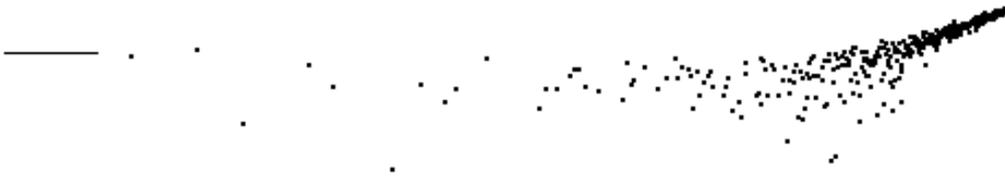


figure 56

$\log y = \log(ax^3 + \varepsilon)$ avec ε modérément petit.

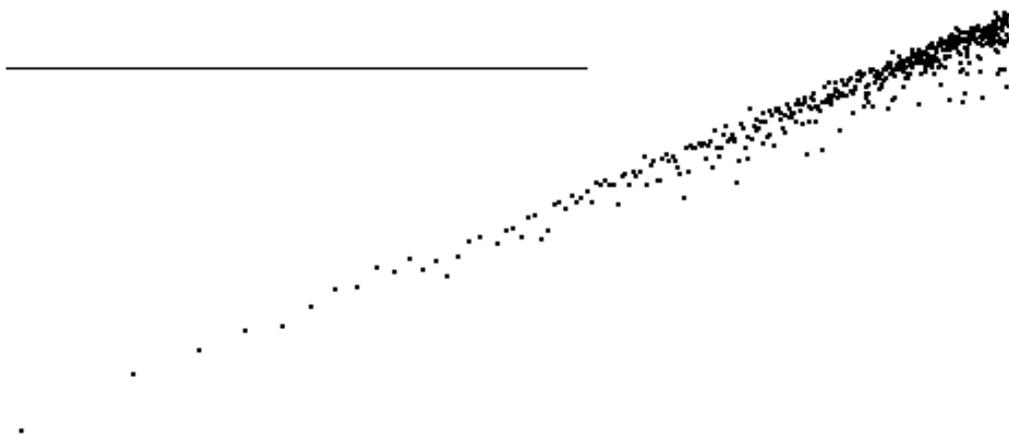


figure 57

$\log y = \log (ax^3 \cdot [1 + \varepsilon])$ avec ε modérément petit. Le trait horizontal est l'axe des $\log x$ (correspondant à $y = 0$).

même, ni de rechercher la loi du phénomène, ni d'analyser le bruit dans les deux représentations, surtout si le bruit est de forte amplitude.

On ne doit donc pas conclure que dans n'importe quel cas «il suffit de passer à une représentation où la dépendance est linéaire». Si le bruit est une perturbation d'un signal, on ne peut pas comprendre que sa dispersion varie bizarrement selon la valeur du signal, si ce n'est en admettant que la représentation est artificielle. En comparant par exemple les figures 53.1 et 53.2, on sera conduit à conclure que la répartition du bruit en 53.1 est naturelle, mais que celle de 53.2 ne l'est pas. La représentation dans laquelle la dépendance est linéaire est donc «artificielle». Cela montre bien que la régression non linéaire n'est pas équivalente à une régression linéaire après transformation.

On peut aussi faire subir aux deux coordonnées à la fois une transformation non linéaire; c'est ce que par exemple on effectue automatiquement lorsqu'on reporte des mesures sur papier logarithmique. Dans ce cas, au lieu de représenter X en abscisse et Y en ordonnée, on représente $\log(X)$ en abscisse et $\log(Y)$ en ordonnée. Cette représentation logarithmique est particulièrement indiquée pour les fonctions puissance $f(x) = aX^\alpha$:

— si $Y = aX^\alpha + \varepsilon$ (écart absolu):

$$\ln(Y) = \alpha \ln(X) + \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{aX^\alpha}\right)$$

Analyse statistique des dépendances

— si $Y = a X^\alpha(1 + \varepsilon)$ (écart relatif) :

$$\ln(Y) = \alpha \ln(X) + \ln(a) + \ln(1 + \varepsilon)$$

Si ε est petit et représente un écart absolu uniformément distribué, on aura dans la représentation logarithmique un bruit en $\varepsilon/a X^\alpha$, qui est donc fortement variable le long de la droite de régression. Si ε est un écart relatif, la transformation donnera un écart absolu égal à ε .

Le résultat est montré sur les figures 55, 56, et 57 pour $\alpha = 3$. La figure 55 doit être comparée à 53.1 : elle représente le même nuage de points, mais sur papier logarithmique. De même 56 doit être comparée à 54.1.

Ces figures illustrent très nettement le phénomène ; si dans la représentation «naturelle», le bruit est distribué uniformément, alors dans la nouvelle représentation où la dépendance est rendue linéaire, l'inhomogénéité des écarts peut être considérable. Cette idée de représentation «naturelle» est à rapprocher de la discussion à la fin de la section **IX.1**. La répartition du bruit est en effet liée aux invariances naturelles de la Physique (spatiale et temporelle). Prenons pour exemple le cas illustré par les figures 53.1 et 55 où le bruit ε est un écart absolu uniforme, de densité gaussienne. La dépendance de y par rapport à x est alors telle que $y = ax^3 + \varepsilon$. On peut dire que dans cette représentation «naturelle», l'écart de y par rapport à ax^3 est la somme d'un grand nombre de perturbations stochastiquement indépendantes, puisque c'est généralement ainsi que sont engendrées les fluctuations gaussiennes. Pour que des perturbations puissent s'ajouter, il faut qu'elles représentent des quantités additives, par exemple des déplacements dans l'espace. Notons que des erreurs de mesure se ramènent toujours en dernière instance à des sommes de déplacements dans l'espace ; par exemple les tremblements des aiguilles d'instruments en face d'une graduation sont bien des fluctuations spatiales (les affichages par cristaux liquides rendent cela moins flagrant, mais ce n'est qu'un masque et on sera toujours ramené à l'espace et au temps par une analyse plus poussée). Si le bruit est distribué uniformément, c'est-à-dire si l'écart-type de ε est constant (indépendant de x), cela a une signification concrète : c'est que les nombreux effets indépendants qui contribuent à créer la fluctuation gaussienne ne sont pas influencés par la valeur de x . L'uniformité du bruit est donc le reflet d'une invariance occulte.

En représentant alors les variables x et y sur papier logarithmique, on fait disparaître, ou du moins on occulte davantage cette invariance. On voit bien que dans ce cas la représentation $y = ax^3 + \varepsilon$ est réellement plus «naturelle» que la représentation logarithmique, de même que les repères galiléens sont réellement plus «naturels» que les autres.

En conclusion, le papier logarithmique (ou n'importe quel procédé faisant apparaître artificiellement une dépendance linéaire) est certes un moyen commode pour faciliter la mise en évidence des dépendances, mais il ne faut jamais oublier que la structure du bruit peut elle aussi contenir des informations essentielles. L'étude des corrélations (linéaires) sur le graphique 55 effacerait ces informations ; seule l'étude de la régression non linéaire sur le graphique 53.1 permet de les obtenir.

XII. 5. Comment trouver le bon modèle : l'exemple de Planck.

Lorsqu'on est confronté à des résultats de mesures ou d'expériences qui, reportées sur un papier millimétré ou logarithmique se traduisent par un nuage de points, la grande difficulté n'est pas d'appliquer les techniques de Statistique, mais de trouver le bon modèle. Cela est encore plus vrai aujourd'hui (où le travail purement technique de mise en oeuvre des recettes statistiques est entièrement effectué par des logiciels spécialisés) qu'autrefois. Les logiciels de régression non linéaire les plus performants attendent de l'utilisateur qu'il choisisse un *modèle de régression*. Si l'utilisateur n'en propose pas de pertinent, les résultats des calculs seront grossiers et peu significatifs, et la sophistication du logiciel ne compensera pas cette lacune (tout au plus elle servira à mieux tromper les profanes, objectif certes essentiel à notre époque, mais hors de notre sujet). On peut écrire des manuels sur les techniques statistiques, mais enseigner l'intuition, l'imagination, l'astuce, est impossible. Le présent ouvrage ne le prétend pas non plus. Toutefois, cet ouvrage étant voué à la signification et à la compréhension des concepts scientifiques, ne peut laisser de côté ce qui constitue justement *la seule démarche porteuse de sens et de compréhension*, à savoir la création de modèles pertinents. C'est pourquoi nous consacrons une section à présenter un exemple particulièrement fécond : la découverte de la Physique quantique, Berlin, 1899⁽¹⁾.

À la fin du chapitre **II** nous avons rencontré la loi de Planck, qui s'exprime par une fonction du type

$$f(\nu) = \frac{A\nu^3}{e^{\frac{\alpha\nu}{T}} - 1} \quad (\text{XII. 11})$$

où ν est la fréquence et T la température absolue du rayonnement. Les constantes A et α étaient liées à la constante de Planck \hbar (voir **II. 6**). Cette

⁽¹⁾ Nous suivons en gros l'exposé original de Max Planck à la Société allemande de Physique (séance du 19 octobre 1900: *Über eine Verbesserung der Wienschen Spectralgleichung* Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Band 2, 1900, pages 237 – 245.

Analyse statistique des dépendances

loi de dépendance de l'énergie rayonnée par le corps noir en fonction de la fréquence était inconnue avant Planck. Planck ne l'a pas déduite comme nous de raisonnements probabilistes faisant appel à la Mécanique quantique, c'est au contraire la Mécanique quantique qui a été déduite de la loi. Il l'a obtenue directement à partir de lois empiriques antérieures à la Physique quantique. Dans ces lois classiques il n'y avait évidemment nulle trace de la constante \hbar , qui est justement issue de ce travail.

Ce qui était connu avant étaient les deux cas asymptotiques suivants :

a) lorsque la fréquence ν est petite

$$f(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (XII.12)$$

où c est la vitesse de la lumière et k la constante de Boltzmann. Cette loi portait le nom de Rayleigh–Jeans⁽¹⁾ ; elle avait été obtenue par voie théorique à partir des lois classiques du rayonnement, mais ne se vérifiait expérimentalement que dans l'infra-rouge, c'est-à-dire pour les petites fréquences.

b) lorsque la fréquence ν est grande

$$f(\nu) = A\nu^3 e^{-\frac{\alpha\nu}{T}} \quad (XII.13)$$

appelée loi de Wien, plutôt empirique, et résultant des observations sur les rayonnements de haute fréquence (ultra-violet) ; les constantes A et α étaient empiriques et non (comme pour la loi de Rayleigh–Jeans) exprimées en fonction de constantes déjà connues. On ne savait pas justifier théoriquement la loi de Wien ; c'était une énigme de la Physique.

Peut-on deviner la loi XII. 11 à partir de XII. 12 et XII. 13 ? Si on pose à un mathématicien le problème : "trouver une fonction qui se comporte comme $\frac{1}{x}$ pour x petit et comme e^{-x} pour x grand, il est probable qu'après un temps de réflexion assez court il propose la fonction $1/(e^x - 1)$. Il est donc possible de deviner. Toutefois si on lit les publications de Planck à cette époque charnière de la Physique (1899 – 1900) on constatera qu'il n'a pas procédé ainsi. Il a commencé par chercher quelle expression pour l'entropie S du rayonnement en fonction de la grandeur $U = c^3 f(\nu)/8\pi\nu^2$ impliquaient les relations XII. 12 et XII. 13, sachant que $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$. La grandeur U avait dans ce contexte un sens particulier, qu'il est trop long de

⁽¹⁾ En toute rigueur historique, la loi de Rayleigh–Jeans n'était pas encore connue officiellement au moment où Planck réfléchissait au problème (1899) puisque l'article de Rayleigh où elle fut présentée a paru en juin 1900, mais elle était connue "officieusement". Ce détail historique est toutefois sans intérêt pour notre propos.

développer ici. Mais si on réécrit *XII.12* et *XII.13* pour la grandeur U , cela donne respectivement :

$$U = kT \tag{XII.12 a.}$$

pour la loi de Rayleigh-Jeans et

$$U = b\nu e^{-\frac{\alpha\nu}{T}} \tag{XII.13 a.}$$

où $b = c^3 A / 8\pi$, pour la loi de Wien.

On déduit aisément de *XII.12 a* que $\frac{1}{T} = \frac{k}{U}$ d'où

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{k}{U^2}$$

et de *XII.13 a* que $\frac{1}{T} = -\frac{1}{\alpha\nu} \ln(U/b\nu)$ d'où

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{1}{\alpha\nu} \cdot \frac{1}{U}$$

Ce détour par l'entropie était nécessaire pour Planck ; sa spécialité était la Thermodynamique et il pensait pouvoir *comprendre* la vraie nature du phénomène par ce biais car (dit-il dans son autobiographie scientifique) "là, il se trouvait en terrain connu". En introduisant la grandeur $R = 1/\frac{d^2 S}{dU^2}$, on obtient dans le cas correspondant à *XII.12 a*

$$R = -\frac{1}{k} U^2$$

et dans le cas correspondant à *XII.13 a*

$$R = -\alpha\nu U$$

Autrement dit, la loi de Rayleigh-Jeans (pour les petites fréquences) conduisait à une dépendance quadratique entre R et U , tandis que la loi de Wien (pour les hautes fréquences) conduisait à une dépendance linéaire.

Planck proposa alors d'essayer la combinaison la plus simple de ces deux formules, sous la forme

$$R = -\frac{1}{k} U^2 - \alpha\nu U \tag{XII.14}$$

de sorte que si ν est petite, le second terme devient négligeable et le premier prédomine, par contre si ν est grande c'est l'inverse. Il suffit alors de revenir en arrière pour retrouver U en fonction de T :

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = \frac{1}{R} = -\frac{1}{\frac{1}{k} U^2 + \alpha\nu U} \tag{XII.15}$$

Analyse statistique des dépendances

La primitive de cette fonction de U est $\frac{1}{\alpha\nu} \ln(1 + b\nu/U)$, d'où on déduit que

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dU} = \frac{1}{\alpha\nu} \ln\left(1 + \frac{b\nu}{U}\right) \quad (XII.16)$$

Ceci est une expression de $1/T$ en fonction de U , qu'on peut inverser pour obtenir une expression de U en fonction de $1/T$, qui est

$$U = \frac{b\nu}{e^{\frac{b\nu}{T}} - 1} \quad (XII.17)$$

On constate que Planck a largement usé de la relation thermodynamique $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$. En comparant XII.17 avec II.14 on voit que α est égal à $2\pi\hbar/k$ (rappelons que la fréquence ν n'est pas égale à la pulsation ω , mais à $\omega/2\pi$). Les physiciens de 1900 ne pouvaient pas faire cette comparaison. Mais ils savaient que le rayonnement de corps noir est indépendant des matériaux qui constituent la cavité, et que par conséquent les constantes b et α devaient être (comme c ou k) des constantes universelles de la Physique.

C'est ainsi que \hbar (ou plutôt $h = 2\pi\hbar$) apparut pour la première fois, d'où son nom de *constante de Planck*.

Cette histoire est intéressante pour nous ici parce qu'elle montre comment on devine un modèle. Planck n'aurait jamais trouvé l'explication fondamentale du rayonnement du corps noir s'il avait cherché un polynôme qui approche la courbe empirique à toutes les fréquences. Si l'ambition de la Physique consistait à approcher les courbes empiriques par des modèles mathématiques dépourvus d'une signification plus profonde, et ayant pour seule vertu de se rapprocher le plus possible des courbes fournies par l'expérience, ce ne serait plus la Physique et Planck n'aurait pas découvert \hbar (ni Newton la gravitation, etc). La vraie nature de la démarche de Planck décrite ci-dessus est d'avoir attribué a priori aux deux lois empiriques XII.12 et XII.13 un sens plus profond que la simple description des faits expérimentaux. Au départ de sa démarche figurait la conviction intime que les courbes expérimentales sont des apparences, sous-tendues par des causes *intelligibles* qu'on ne peut atteindre que par la pensée (cf. Platon, *La République* Livre VII); sa tactique n'a pas consisté à approcher coûte que coûte la courbe expérimentale pour toutes les fréquences, mais à partir du principe (dicté par une intime conviction et non par l'observation) que la *cause intelligible* du phénomène se révélerait mieux dans les deux cas asymptotiques $\nu \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow \infty$ que dans le cas intermédiaire des fréquences moyennes. Le passage par l'entropie S est la meilleure preuve que son approche fut bien celle-là; mais il en témoigne aussi lui-même dans nombre de textes.

Un point essentiel de la démarche (revendiqué par Planck) est également le passage par les relations les plus simples possibles. Deviner la loi générale à partir des deux cas asymptotiques directement sous la forme *XII.12* et *XII.13* eût été possible comme nous l'avons indiqué plus haut. Mais Planck a préféré passer par l'intermédiaire de $R = 1/\frac{d^2S}{dU^2}$ car les relations atteignaient alors le maximum de simplicité (relation linéaire ou quadratique) et surtout, le maximum de **signification**. Le procédé est toujours le même : passer par l'intelligible plutôt que par une description purement empirique.

On peut tirer de cet exemple magistral deux leçons essentielles à retenir lorsqu'on doit chercher un modèle. Ces leçons sont valables même quand on ne nourrit pas l'ambition de révolutionner la Physique :

a) Ne pas chercher simplement à approcher le nuage de points ou la courbe empirique, mais réfléchir d'abord et essayer de trouver à quelle nécessité purement intelligible le modèle doit obéir (symétries ou invariances, analogie avec des situations connues, nécessités logiques). Nous avons déjà fait appel avec insistance à ce type de démarche dans le présent ouvrage, en indiquant que pour résoudre un problème de probabilité "il faut commencer par chercher ce qui est équiprobable").

b) Effectuer sur les variables qui sont en jeu des transformations qui ramènent autant que possible aux types de dépendance les plus simples : proportionnalité ou à la rigueur dépendance quadratique. Ainsi une dépendance du type $Y = aX^\alpha$ devient une régression linéaire entre $\log(Y)$ et $\log(X)$ (papier logarithmique), une dépendance du type $Y = ae^{\alpha X}$ devient une régression linéaire entre $\log(Y)$ et X (papier semilogarithmique).

Bien entendu, pour découvrir la Mécanique quantique, il a fallu pousser l'imagination un peu plus loin, mais le principe reste le même.

XII. 6. Corrélation et causalité.

L'idée essentielle qui se cache derrière ces problèmes de corrélation ou de régression est celle de la *causalité*. Dans le langage courant, y compris les jargons techniques (et même *surtout* dans les jargons techniques) la différence entre la dépendance statistique et la causalité n'est pas clairement définie. C'est pourquoi nous allons encore discuter du sens des différentes notions introduites dans ce chapitre, à savoir la corrélation ou la régression. Cette discussion complétera les discussions déjà amorcées au chapitre **X** sur la signification des mesures statistiques. Nous avons alors bien insisté sur la différence entre la mesure d'une probabilité a priori (cas de l'expérience

Analyse statistique des dépendances

reproductible) et la mesure d'une proportion dans une population (cas du sondage), les deux pouvant parfois se recouvrir. Ici, nous ne discutons plus les mesures simples, mais la dépendance.

Nous pouvons en effet interpréter une forte corrélation, par exemple dans le cas extrême où le coefficient de corrélation est égal à $+1$ ou -1 , comme une dépendance linéaire. Une telle dépendance n'est pas flagrante dans le cas de la corrélation entre la tension artérielle et l'âge, car cette corrélation est médiocre, et correspond à peu près à ce qu'on peut voir sur les figures 52.2 ou 52.3. La situation serait beaucoup plus claire avec un nuage de points tel que celui de la figure 52.7 ou 52.8. Ce type de figure peut vous rappeler un T.P. d'électricité où il s'agissait de vérifier la loi d'Ohm : supposons qu'on reporte la tension électrique U entre les bornes de la résistance en abscisse et l'intensité I du courant en ordonnée ; on obtiendrait bien des graphiques de ce type.

Les lois de l'électromagnétisme sont souvent enseignées aujourd'hui de façon déductive. Les équations de Maxwell sont postulées comme s'il s'agissait d'une vérité mathématique a priori, dont on déduit tout le reste ; la résistance d'un conducteur n'est alors qu'un effet macroscopique sur un nombre énorme de molécules et d'électrons et on retrouverait la loi d'Ohm, en expliquant «tout» par moyennisation à partir des seules équations fondamentales de Maxwell. Mais le cheminement historique va en sens inverse, et les équations de Maxwell ont été peu à peu *dégagées* par induction à partir d'observations expérimentales, telles que justement cette loi d'Ohm qui a été établie par Georg S. Ohm en effectuant des mesures de tension électrique et d'intensité.

Si on effectue réellement ces mesures, ce qu'on obtient est un tableau de chiffres ou, si on les représente graphiquement, un nuage de points comme celui de la figure 52.8. Si on calcule le coefficient de corrélation du nuage on obtiendra une valeur proche de 1 et une droite de régression dont la pente est appelée la résistance R du conducteur. $U = RI$ est l'équation de la droite de régression.

Toutes les lois de la physique ont été, soit obtenues directement par un tel procédé, soit déduites ou induites mathématiquement à partir de tels procédés. Ce n'est que lorsque la forme mathématique issue de tout ce travail devient vraiment abstraite (par exemple lorsqu'elle prend la forme des équations de Maxwell) qu'on croit pouvoir lui donner une valeur de vérité supérieure, qui serait plus exacte que ce que la variance des mesures expérimentales laisse supposer. On dit alors que les lois abstraites sont les «vraies» lois (par exemple $U = RI$) et que les petits écarts du nuage de points par rapport à cette loi sont «du bruit». Mais cette légende sur

la nature des lois physiques ne doit pas faire oublier qu'au départ, toute l'information a été recueillie dans des graphiques tels que ceux de la figure 52.8. Il n'est pas difficile de comprendre le procédé littéraire qui permet de passer d'un nuage de points comme celui de la figure 52.8 à une loi mathématique comme les équations de Maxwell: la première étape consiste à dire que U est *égal* à RI au lieu de dire que la variance d'échantillon de $U - RI$ est petite.

Mais dans la loi d'Ohm il y a même bien plus que la seule relation mathématique $U = RI$. On dit en effet que la tension électrique appliquée aux bornes est la *cause* du courant.

Cette idée de causalité est tout à fait évidente si on conçoit le courant électrique selon l'électromagnétisme moderne. En effet, le courant électrique est un déplacement d'électrons dans le conducteur, et les électrons ne se déplacent que si on leur applique un champ électrique. Le champ électrique est alors la cause du mouvement des électrons comme le champ de gravité est la cause de la chute des corps. Or on crée un tel champ dans le conducteur en appliquant une tension électrique aux bornes, ce qui veut dire que la tension électrique est la cause du champ et donc aussi la cause du courant électrique.

Mais une simple dépendance ne suffit pas à déterminer ce qui est la cause et ce qui est l'effet. Par exemple, on aurait tout aussi bien pu écrire $I = U/R$, cela n'aurait pas pour autant fait de I la cause et de U l'effet. On voit donc qu'une corrélation statistique, même très forte, ne peut pas à elle seule décider ce qui est la cause ou ce qui est l'effet. La simple constatation d'une corrélation entre le tabagisme et l'hypertension ne suffit pas à certifier que le tabagisme est la cause et l'hypertension l'effet; il se pourrait par exemple que l'hypertension ait une cause biologique qui favorise chez la même personne le goût pour le tabac.

La causalité est donc une relation plus forte que la dépendance statistique. Si on a observé sur un échantillon de mesures les valeurs de deux paramètres (tels que âge et tension artérielle, ou intensité et tension électrique), et que le nuage de points est distribué le long d'une courbe d'équation $y = f(x)$ de telle sorte que la variance de $y - f(x)$ sur l'échantillon de tous les points est petite, on dira qu'il y a une forte dépendance statistique entre les deux paramètres (si la fonction f est linéaire, on appellera cela une corrélation). Pour qu'en outre on puisse dire que le premier paramètre (celui qui est en abscisse) est la *cause* de l'autre, il faut que la réalisation du premier précède toujours la réalisation du second (en Relativité, la condition est encore plus forte: il faut que le premier soit réalisé avant le second, mais de sorte qu'un photon parti du premier immédiatement après sa réalisation

puisse arriver au second avant sa réalisation).

On peut résumer cela en disant que

$$\text{causalité} = \text{dépendance statistique} + \text{antériorité} \quad (XII.18.)$$

Au delà de cette définition de la causalité, on peut s'interroger sur le problème de savoir si la causalité se réduit entièrement à (XII.18.); si deux paramètres ont entre eux une forte dépendance statistique et un rapport d'antériorité, mais sans qu'on puisse pour autant *comprendre* la relation de nécessité qui les relie, peut-on encore parler de causalité? Cette question a été étudiée au *XVIII^e* siècle par David Hume⁽¹⁾ qui a répondu que la causalité ne peut pas être *plus* que ce qui est exprimé par (XII.18.) Quoique sa réponse ait été critiquée, je dois lui donner entièrement raison. Les critiques qui lui ont été opposées reposent essentiellement sur l'argument que voici: supposons que, chaque fois qu'un événement *A* se produit, un événement *B* se produit peu après, et *B* ne se produit jamais sans que *A* se soit produit juste avant; on ne peut alors sérieusement tenir *A* pour la cause de *B* que si le rapport de nécessité entre *A* et *B* est clair pour l'entendement. C'est-à-dire que (XII.18.) ne suffit pas, il faut en outre un rapport de nécessité. Cette situation est illustrée sous forme comique dans *La vie criminelle d'Archibald de la Cruz*, un film de Luis Bunuel (1955), dont le personnage principal (Archibald de la Cruz) constate que, chaque fois que dans sa vie il a éprouvé de l'hostilité envers une personne, celle-ci est morte quelques heures ou quelques jours après. Il acquiert ainsi la certitude que, par un mécanisme inconnu, son sentiment de haine est la *cause* de la mort de ses victimes. Lorsque, torturé par les remords, il se livre à la police, personne ne le croit. Or, une situation toute analogue s'est produite lorsque Kepler a découvert les lois du mouvement des planètes. En effet, Kepler a constaté que le temps mis par une planète quelconque pour parcourir une portion de son orbite est proportionnel à l'aire balayée par le segment Soleil – planète (loi des aires). Quoique à cette époque les méthodes statistiques n'étaient pas encore aussi systématiquement quantitatives, ni surtout aussi sophistiquées mathématiquement qu'aujourd'hui, on peut néanmoins, avec un anachronisme certain, mais qui ne touche pas à l'essentiel, imaginer Kepler représentant les résultats de ses mesures et de ses calculs sur un graphique, avec les durées en ordonnée et les aires balayées en abscisse. Les points tracés ont bien la caractéristique de former un nuage concentré au voisinage d'une droite. Il y a donc une dépendance entre la vitesse et la distance au Soleil; lorsque la planète s'approche du Soleil, elle va plus vite, et la loi des aires permet de calculer cette variation.

⁽¹⁾ David HUME *Enquête sur l'entendement humain* (1748).

Or, constatant cela, Kepler ne s'est pas contenté d'en tirer une loi purement descriptive ; voyant que le Soleil était au foyer de toutes les orbites des planètes, il a estimé que le Soleil ne pouvait pas ne pas être la *cause* du mouvement des planètes : en effet, les autres planètes ne pouvaient pas être tenues pour la cause du mouvement de l'une d'entre elles, car elles étaient interchangeables ; or par définition, la cause n'est pas interchangeable avec l'effet. Seul le Soleil pouvait jouer ce rôle. On voit bien que la simple corrélation constatée ne suffit pas à conclure à une causalité, il a fallu faire appel à un raisonnement a priori.

Mais ce n'est pas tout. La distance entre le Soleil et la planète étant énorme, comment la planète, lorsqu'elle passe à un endroit de son orbite, peut-elle «savoir» que, s'étant par exemple rapprochée du Soleil, il lui convient d'augmenter sa vitesse pour respecter la loi des aires ? D'autre part, la loi des aires est valable pour chaque planète séparément, et ne fait intervenir que le couple planète-Soleil, de sorte que le mouvement d'une planète est indépendant des autres planètes. Il faut dire que du temps de Kepler, on ne connaissait pas encore la gravitation, et à plus forte raison, on ne savait pas que chaque planète subit aussi l'attraction des autres planètes. La gravitation du Soleil étant de beaucoup la plus forte, et la précision des observations étant insuffisante, Kepler ne pouvait pas percevoir l'influence mutuelle des planètes. Si donc une des planètes disparaissait brusquement, cela ne devrait rien changer à la validité de la loi des aires pour celles qui restent. Donc le Soleil (c'est-à-dire la cause) agissait *sans savoir* si les planètes étaient là pour en subir les effets. Comment la corrélation observée est-elle possible s'il n'y a pas une communication entre le Soleil et la planète ? L'étude des textes laissés par Kepler montre qu'il avait été troublé par cette question et qu'il avait cherché une réponse. Son explication a été la suivante. Puisque le Soleil est la cause et que cette cause produit son effet à des centaines de millions de kilomètres, c'est que le Soleil doit émettre constamment un fluide qui se diffuse dans l'espace, et ce fluide, lorsqu'il arrive à la planète, lui donne de la vitesse. Kepler a alors tenté de calculer la loi d'action de ce fluide sur la planète, en partant du principe que, puisque le Soleil agit sans savoir s'il existe ou non des planètes, il doit émettre son fluide indépendamment des planètes, donc isotropiquement (c'est-à-dire uniformément dans toutes les directions). La quantité de fluide présente sur un petit morceau d'orbite est alors facile à calculer, mais ce qu'on trouve n'est pas proportionnel à la vitesse. Kepler, persuadé qu'en vertu d'une causalité nécessaire il *devait* y avoir quelque chose comme un fluide, n'a jamais réussi à faire coïncider cette idée avec les calculs quantitatifs, mais les textes montrent qu'il a beaucoup cherché. C'est Newton qui a trouvé la solution du problème, en disant que ce n'est pas un fluide (dont la densité

Analyse statistique des dépendances

est forcément une grandeur scalaire) mais une force (qui est un vecteur) qu'il convenait d'invoquer ; et qu'en outre, suivant Galilée, la force agit sur l'accélération et non sur la vitesse.

La moralité de cette histoire est la suivante : l'observation n'a jamais fourni que des corrélations, mais les corrélations brutes ne fournissent aucune *compréhension* du phénomène. Comprendre un phénomène signifie y distinguer des éléments qui sont des causes et d'autres qui sont des effets, et pour cela, l'entendement est obligé d'inventer de toutes pièces des mécanismes abstraits qui ne sont pas observables en tant que tels. Ainsi Archibald de la Cruz ne pouvait pas comprendre la corrélation entre ses fantômes meurtriers et la mort violente de ses victimes sans faire appel à un fluide, ou à une force, émis par son esprit et se propageant dans l'espace, ou tout autre mécanisme bizarre déclenché dans son cerveau et finissant par produire le déplacement d'objets contondants à proximité de ses victimes. C'est en ce sens que David Hume a raison : si la science, d'une façon ou d'une autre, découvre par l'observation brute une relation telle que (*XII.18.*), mais sans que l'entendement humain puisse y trouver aucune relation de nécessité a priori, la réaction de la postérité ne sera pas de nier que (*XII.18.*) soit une véritable relation de cause à effet, mais de chercher par tous les moyens un artifice conceptuel, tel que les fluides ou les forces, qui *ajoutera* à (*XII.18.*) le caractère de nécessité logique qui lui manquait, afin de rassurer l'entendement. Autrement dit, si les événements *A* et *B* sont liés par (*XII.18.*), l'absence d'une nécessité logique entre eux n'est pas une raison valable pour nier que *A* soit la cause de *B*, car une telle nécessité logique peut toujours être inventée : il suffit d'avoir de l'imagination. En revanche, la dépendance statistique et l'antériorité ne peuvent pas être inventées, car elles doivent se conformer aux observations.

Ainsi les réflexions de Hume dans *Enquête sur l'entendement humain* ne sont pas des spéculations philosophiques que les scientifiques peuvent négliger, mais sont à la base même de l'esprit scientifique et ont une incidence *pratique* sur la méthode : les ignorer mène tout droit à l'erreur. L'insistance de Hume à vouloir évacuer la relation de nécessité n'est pas l'expression d'un positivisme dogmatique, mais d'une exigence de rigueur : définir la causalité comme une simple corrélation avec antériorité, c'est la soumettre totalement et exclusivement au verdict de l'expérience objective ; au contraire, la définir comme une corrélation avec relation de nécessité, c'est introduire un élément de subjectivité dans la connaissance. Autrement dit, refuser de reconnaître une corrélation avec antériorité comme causalité au prétexte qu'il y manque une relation de nécessité équivaut à s'interdire de *chercher* une nouvelle relation de nécessité que la science ne possède

pas encore, (donc interdire à Kepler d'inventer son histoire de fluide, à Newton d'inventer les forces, à Faraday d'inventer les champs, etc.) et donc à soumettre la connaissance future à la connaissance présente. De même, voir de la causalité dans une corrélation *sans antériorité établie* au prétexte qu'on y voit une relation de nécessité équivaut à donner à un préjugé la priorité sur l'expérience.

ANNEXE DU CHAPITRE XII.

LA MÉTHODE DE LEVENBERG-MARQUARDT pour le calcul de la régression non linéaire.

Comme on l'a vu à la section **12. 4**, un problème de régression non linéaire consiste à chercher le minimum de la fonction

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^n p_i [f(\alpha, x_i) - y_i]^2 \quad (12 A.1)$$

en faisant varier les paramètres $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q)$. Ce minimum étant un point où le gradient de S s'annule, cela revient à trouver les α tels que $\vec{\text{grad}} S = 0$.

Lorsque le modèle de régression non linéaire $f(\alpha, x_i)$ dépend linéairement des paramètres à optimiser, la fonction S est du second degré, donc son gradient est linéaire. L'équation $\vec{\text{grad}} S = 0$ est alors un système linéaire de Q équations à Q inconnues qu'on résoud numériquement par la méthode du pivot de Gauss.

N. B. On notera que le terme *linéaire* (ou le terme *non linéaire*) a, dans le présent contexte, deux sens indépendants à ne pas confondre: le modèle de régression *non linéaire* $f(\alpha, x_i)$ peut dépendre *linéairement* ou non des paramètres α : $y = f(\alpha, x)$ est un modèle de régression *non linéaire* si f dépend non linéairement de x , mais il peut dépendre linéairement de α ; ainsi $f(\alpha, x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ est un modèle de régression non linéaire, qui dépend linéairement de α .

Lorsque la dépendance en α n'est pas linéaire on doit traiter un système non linéaire de Q équations à Q inconnues et il existe pour cela un algorithme numérique qui a fait ses preuves, connu sous le nom de *Levenberg*

Analyse statistique des dépendances

– Marquardt⁽¹⁾. Mon expérience d’enseignement dans une école d’ingénieur m’a appris que les problèmes de moindres carrés sont de loin les plus fréquemment rencontrés par les praticiens. Il me semble donc utile d’inclure ici une description de cette méthode, accompagnée d’explications conformes à l’esprit de cet ouvrage.

Étant donné que la fonction $S(\alpha)$ s’exprime analytiquement à l’aide de fonctions élémentaires (la fonction $f(\alpha, x)$ ne peut offrir un bon modèle de régression que si elle est élémentaire), elle est facile à dériver. On a

$$S_\ell = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\ell} = \sum_{i=1}^n 2 p_i [f(\alpha, x_i) - y_i] \frac{\partial f}{\partial \alpha_\ell}(\alpha, x_i) \quad (12 A.2)$$

Le vecteur $\{S_\ell\}_{\ell=1,2,\dots,Q}$ est le gradient déjà mentionné. Les dérivées secondes seront

$$\begin{aligned} S_{k\ell} &= \frac{\partial S_\ell}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial S_k}{\partial \alpha_\ell} = \\ &= \sum_{i=1}^n 2 p_i \left\{ [f(\alpha, x_i) - y_i] \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_\ell \partial \alpha_k}(\alpha, x_i) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}(\alpha, x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha_\ell}(\alpha, x_i) \right\} \end{aligned} \quad (12 A.3)$$

Ces expressions se prêtent parfaitement bien à la programmation et par conséquent l’algorithme itératif qui conviendra le mieux à la résolution du système d’équations $\vec{\text{grad}} S = 0$ est la méthode de Newton ou méthode de la tangente. Elle consiste à choisir des valeurs initiales $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots, \alpha_Q^{(0)}$ — qu’on notera collectivement $\alpha^{(0)}$ — à partir desquelles on calcule $\alpha^{(1)}$ par

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - \mathfrak{E}_2^{-1} \circ \mathfrak{E}_1 \quad (12 A.4)$$

où $\mathfrak{E}_1 = \vec{\text{grad}} S(\alpha^{(0)})$ et \mathfrak{E}_2 est la matrice des $S_{k\ell}(\alpha^{(0)})$. Après quoi on recommence en remplaçant $\alpha^{(0)}$ par $\alpha^{(1)}$, puis $\alpha^{(1)}$ par $\alpha^{(2)}$, et ainsi de suite. Rappelons que cette méthode de Newton s’interprète géométriquement de la manière suivante : l’équation

$$\beta = \vec{\text{grad}} S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q) \quad (12 A.5)$$

représente une hypersurface de dimension Q dans l’espace \mathbb{R}^{2Q} des coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_Q$; la solution du système d’équations $\vec{\text{grad}} S = 0$ (ce qu’on cherche) correspond à l’intersection de cette hypersurface avec le sous-espace (de dimension Q) $\beta = 0$. La méthode consiste alors à se rapprocher de ce point en suivant l’hyperplan tangent à l’hypersurface; celui-ci en effet coupe le sous-espace $\beta = 0$ en un seul point. Ainsi $\alpha^{(1)}$ est

⁽¹⁾ D. W. Marquardt J. Soc. Ind. Appl. Math. vol **11** (1963) pp 431 – 441.

ce point d'intersection ; puis $\alpha^{(2)}$ sera le point d'intersection de l'hyperplan tangent en $\alpha^{(1)}$ avec le sous-espace $\beta = 0$, et ainsi de suite.

La méthode de Newton est recommandée lorsque la dérivée de la fonction (ici $\vec{\text{grad}} S$) est facile à programmer, ce qui est justement le cas. Elle converge extrêmement vite, à condition de prendre $\alpha^{(0)}$ déjà près du point qu'on veut atteindre : l'erreur est alors à chaque itération de l'ordre du carré de l'erreur précédente, ce qui signifie que le nombre de décimales exactes double à chaque itération. Mais si le point de départ $\alpha^{(0)}$ est éloigné du point qu'on veut atteindre, la méthode ne converge plus du tout ou converge trop lentement pour être efficace. Or dans le problème des moindres carrés on ne peut pas deviner a priori un bon point initial.

L'idée essentielle de la méthode de Marquardt est de proposer un moyen simple et algorithmiquement économique pour, dans un premier temps, se rapprocher du minimum (appelons cela la *phase de descente rapide*) ; après quoi, dans un second temps, on peut amorcer avec profit l'itération de Newton (qu'on appellera la *phase critique*).

Le principe est le suivant (la mise en œuvre pratique exigera quelques aménagements semi-empiriques qu'on décrira après). Il s'agit, partant d'un point fixé arbitrairement, de se rapprocher aussi rapidement que possible du minimum (suffisamment pour que l'itération de Newton devienne efficace). Pour cela il est logique de suivre la ligne de plus grande pente sur la surface d'équation

$$\gamma = S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q) \tag{12 A.6}$$

N. B. L'équation 12 A.5 considérée avant est vectorielle : c'est un *système* de Q équations, il lui correspond donc une hypersurface de dimension Q dans l'espace \mathbb{R}^{2Q} . Par contre l'équation 12 A.6 est scalaire, il lui correspond aussi une hypersurface de dimension Q , mais dans l'espace \mathbb{R}^{Q+1} des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q, \gamma$.

Or la ligne de plus grande pente sur une surface d'équation 12 A.6 (projetée sur le sous-espace \mathbb{R}^Q des coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q$) a pour vecteur tangent le vecteur S_1, S_2, \dots, S_Q . Ce vecteur est centrifuge par rapport au minimum. Donc pour se rapprocher du minimum à partir d'un point $\alpha^{(0)}$ initial situé sur le plan des α , il suffit de prendre la direction $-\vec{\text{grad}} S(\alpha^{(0)})$. Ainsi on choisira le second point $\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - \lambda \vec{\text{grad}} S(\alpha^{(0)})$ (avec évidemment $\lambda > 0$). Mais il faut choisir λ de manière optimale. Si on prend un λ trop petit il faudra un nombre trop grand d'itérations pour arriver dans le voisinage du minimum ; si on le prend trop grand, on risque de dépasser ce minimum. C'est alors pour déterminer le meilleur choix de ce paramètre λ qu'interviennent plusieurs aménagements empiriques que nous décrivons maintenant.

Analyse statistique des dépendances

D'abord les maxima ou minima locaux sont fréquents, surtout si la dimension du modèle, c'est-à-dire le nombre de paramètres α , est grande. Marquardt a donc proposé de placer dans le programme le test simple suivant : on commence avec un λ petit, par exemple 1/100 et on calcule $\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - \lambda \overrightarrow{\text{grad}} S(\alpha^{(0)})$; si $S(\alpha^{(1)}) < S(\alpha^{(0)})$, cela indique qu'on descend la pente ; on recommence alors avec un λ beaucoup plus grand (ainsi on évite des maxima locaux).

Par ailleurs il n'est pas indispensable de suivre *exactement* la ligne de plus grande pente ; en pratique il suffit de ne pas trop s'en écarter, et sur ce point une approximation même grossière est fortement recommandée si elle économise du temps de calcul. C'est pourquoi Marquardt propose de suivre la direction du vecteur R de composantes $R_\ell = S_\ell / S_{\ell,\ell}$. La bonne raison pour cela est que de cette manière le paramètre λ sera sans dimension. Ce point n'est pas indifférent car le test doit choisir les valeurs petites ou grandes de λ sans connaître les ordres de grandeurs sur le terrain. En introduisant le vecteur R on diminue les risques entraînés par un mauvais choix. Toutefois, d'après la définition 12 A.3 des $S_{k,\ell}$, les éléments diagonaux $S_{\ell,\ell}$ ne sont pas forcément positifs et peuvent parfois s'annuler ou devenir trop petits ; c'est pourquoi Marquardt a proposé aussi de remplacer la définition 12 A.3 par

$$S_{k\ell} = \sum_{i=1}^n 2 p_i \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}(\alpha, x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha_\ell}(\alpha, x_i) \quad (12 A.7)$$

qui garantit que les termes diagonaux seront positifs : ils ne peuvent devenir nuls que si $\overrightarrow{\text{grad}}_\alpha f$ peut lui-même devenir nul, ce qu'on évitera par le choix du modèle. Cela implique que la méthode de Newton est quelque peu modifiée. Mais les termes négligés (les dérivées secondes de f par rapport aux paramètres α) sont multipliés par les facteurs $f(\alpha, x_i) - y_i$. Or de deux choses l'une :

— ou bien ces facteurs ne deviennent pas tous petits lorsqu'on se rapproche du minimum ; alors les termes négligés ne sont pas négligeables et le calcul sera faux ;

— ou bien ces facteurs deviennent tous petits lorsqu'on se rapproche du minimum, et alors le calcul sera correct.

Mais si les facteurs $f(\alpha, x_i) - y_i$ ne deviennent pas tous petits lorsqu'on se rapproche du minimum, c'est que le minimum de $S(\alpha)$ n'est pas petit et que donc le modèle est mauvais : il ne permet pas d'approcher les points x_i, y_i . La méthode des moindres carrés n'ayant de toute façon aucun sens dans ce cas, on voit que la proposition de Marquardt est justifiée.

Il existe encore une autre raison, au moins aussi importante que la positivité des $S_{\ell,\ell}$, de remplacer 12 A.3 par 12 A.7. Comme nous venons

de le voir, ce changement ne s'écarte guère de la méthode de Newton si le minimum de $S(\alpha)$ est petit; par contre si les facteurs $f(x_i) - y_i$ restent appréciables, l'itération ne converge plus vers le minimum puisqu'on ne suit plus la tangente. *Or cela est même un avantage*: en effet, l'un des défauts bien connus de la méthode de Newton est qu'elle converge trop facilement vers des minima locaux (il suffit de l'amorcer avec une valeur initiale α_0 située dans le bassin d'attraction d'un tel minimum local pour qu'elle converge vers celui-ci et non vers celui qu'on veut); mais si on applique 12 A.7 au lieu de 12 A.3, la méthode ne convergera justement *que* si on est près du vrai minimum (le minimum absolu). Si on se trouve par hasard au voisinage d'un minimum local où $S(\alpha)$ n'est pas petit, l'itération ne conduira pas à s'en rapprocher; au contraire, au bout de quelques itérations on sortira de son bassin d'attraction et on recommencera le processus ailleurs. Ainsi seuls les minima effectivement petits feront converger le procédé. En optant pour 12 A.7 au lieu de 12 A.3, Marquardt fait donc d'une pierre deux coups.

Une troisième astuce de Marquardt est encore la suivante. La tactique générale est, comme on l'a vu plus haut, de suivre la pente (ou plutôt le vecteur R) lorsqu'on est loin du minimum, puis de passer à la méthode de la tangente — modifiée comme on vient de voir — lorsqu'on est suffisamment près. Marquardt introduit pour cela la matrice D dont les éléments sont

$$D_{j,k}(\alpha) = \begin{cases} S_{j,j}(\alpha) \cdot (1 + \lambda) & \text{si } j = k \\ S_{j,k}(\alpha) & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (12 A.8)$$

où $S_{j,k}(\alpha)$ est défini par 12 A.7, et propose d'appliquer la formule 12 A.4 avec la matrice D ainsi définie au lieu de la matrice \mathfrak{S} :

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - D(\alpha^{(0)})^{-1} \circ \overrightarrow{\text{grad}} S(\alpha^{(0)}) \quad (12 A.9)$$

Cela se comprend ainsi: lorsque λ est petit, la matrice $D_{j,k}(\alpha^{(0)})$ est pratiquement identique à la matrice $S_{j,k}(\alpha^{(0)})$, donc avec 12 A.9 on applique en fait la méthode de Newton; si au contraire λ est grand, la matrice $D_{j,k}(\alpha^{(0)})$ est pratiquement identique à la matrice diagonale d'éléments $S_{j,j}(\alpha^{(0)})$, par conséquent $D^{-1} \circ \overrightarrow{\text{grad}} S$ est pratiquement identique au vecteur R introduit ci-dessus. Ainsi on dispose d'une grande souplesse algorithmique pour passer progressivement de la phase de descente rapide à la phase critique: il suffit de jouer sur les valeurs du paramètre λ .

Tous ces aménagements sont des recettes empiriques: choisir λ grand ou petit selon des critères qui ne sont pas absolument fiables, suivre le vecteur R plutôt que la ligne de plus grande pente, remplacer 12 A.3 par 12 A.7, tout cela ne peut pas être justifié par des démonstrations rigoureuses et

formelles et c'est uniquement l'usage pratique qui a tranché. En effet, cette méthode de Marquardt a aujourd'hui convaincu tous les praticiens et elle est implémentée dans les logiciels de calcul (Matlab, Statistica, etc). Mais il est clair qu'elle ne marche pas à coup sûr. Son succès est dû à ce qu'on n'a pas trouvé mieux.

Parmi les causes de "plantage" possibles, la plus courante est de tourner en rond dans une zone de minima dégénérés; le test qui sert à déterminer λ saute alors éternellement entre un petit λ et un grand. Un programme bien conçu doit donc prévoir un test d'arrêt avec message d'erreur pour sortir d'une telle boucle sans fin; par exemple si λ passe plus de dix fois d'une grande valeur à une petite et vice-versa, arrêter le processus et afficher "Sorry, but it seems I am in a wrong track". La meilleure solution est que le programme prévoie alors une sortie de secours avec entrée manuelle des valeurs de λ .

On peut donc résumer la méthode comme suit.

a) Créer des routines qui calculent le vecteur $\vec{\text{grad}} S(\alpha)$ donné par 12 A.2 et la matrice D donnée par 12 A.8 en fonction de α et λ , ainsi que son inverse D^{-1} par la méthode du pivot.

b) Choisir une valeur initiale $\alpha^{(0)}$ (en général complètement arbitraire car on n'a aucun critère de choix), calculer $S(\alpha^{(0)})$, et commencer l'itération de 12 A.9 avec un λ moyen mais plutôt petit (de l'ordre de 0.01 ou 0.001), ce qui va donner $S(\alpha^{(1)})$. Le fait de choisir ce premier λ plutôt petit revient à appliquer la méthode de Newton modifiée par 12 A.7.

c) Calculer $S(\alpha^{(1)})$ et le comparer à $S(\alpha^{(0)})$:

— **c1)** si $S(\alpha^{(1)}) \geq S(\alpha^{(0)})$ (ce qui veut dire qu'on n'était certainement pas au voisinage du bon minimum: on devait être au voisinage d'une instabilité, ou d'un minimum local non petit dont on s'est écarté du fait qu'on n'applique pas 12 A.3, mais 12 A.7), prendre un λ beaucoup plus grand, par exemple $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0.1$ (ce qui veut dire qu'on suit maintenant plutôt le vecteur R afin de s'écarter nettement de ce point qui n'était visiblement pas bon) et recommencer **b**;

— **c2)** si $S(\alpha^{(1)}) < S(\alpha^{(0)})$ (on peut alors penser qu'on est sur la bonne voie vers le minimum) prendre un λ encore plus petit (disons dix fois, ce qui veut dire qu'on applique maintenant la méthode de Newton modifiée comme on a vu) et recommencer aussi longtemps que $S(\alpha^{(n)})$ diminue, ce qui va donner $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, ... Continuer l'itération tant que $\Delta S = S(\alpha^{(n-1)}) - S(\alpha^{(n)})$ est positif et appréciable; revenir à **c1** dès que ΔS devient < 0 ; stopper lorsque ΔS devient petit en restant > 0 , on est alors arrivé à destination (la petitesse ici est aussi question de flair: en général on convient que l'itération peut s'arrêter quand ΔS

devient inférieur à 0.01; en réalité, cela dépend fortement du modèle et de l'échantillon).

N. B. Au stade **c2** rien ne prouve encore définitivement qu'on est sur la bonne voie: si on l'est, on s'écartera peu de l'hyperplan tangent à l'hypersurface d'équation 12 A.5 et — si le minimum n'est pas dégénéré — l'itération convergera; sinon, il arrivera tôt ou tard que $S(\alpha^{(n)})$ augmente à nouveau, puisqu'on ne suit pas l'hyperplan tangent.

Les logiciels du commerce sont contraints de choisir forfaitairement les critères tels que le choix de λ ou la petitesse de ΔS . Mais les meilleurs sont programmables (par exemple Matlab) et permettent un ajustement par l'utilisateur. Cette possibilité est essentielle, car ces choix ne peuvent vraiment être rendus optimaux que pour un modèle donné, d'après les exigences de précision et de temps de calcul imposés par les conditions concrètes du problème. Le meilleur ajustement est toujours empirique, mais l'utilisateur ne peut intervenir à bon escient que s'il a compris les principes théoriques exposés ci-dessus.

Il est intéressant de comparer les calculs effectués selon la méthode de Marquardt, lorsque le modèle $y = f(\alpha, x)$ ne dépend pas linéairement des paramètres α , avec les calculs à effectuer lorsque le modèle dépend linéairement des paramètres. Dans ce dernier cas, il y a seulement à résoudre un système linéaire de Q équations à Q inconnues, donc on applique une seule fois la méthode du pivot. Dans la méthode de Marquardt, la méthode du pivot est réappliquée à chaque itération (cf **a**). Cette partie du programme représente évidemment la quasi totalité du temps de calcul, sauf si la dimension Q est petite. Ainsi, si N itérations en tout sont nécessaires pour parvenir au résultat, le modèle sera N fois plus dispendieux qu'un modèle à dépendance linéaire. Cet argument doit être pris en compte lorsqu'on décide de choisir un modèle de grande dimension. En revanche, un modèle à dépendance non linéaire de dimension $Q = 2$ ou $Q = 3$, est certainement préférable à un modèle à dépendance linéaire de dimension élevée. Par exemple un modèle du type $f(\alpha_1, \alpha_2, x) = x\alpha_1 e^{-\alpha_2 x}$ sera bien meilleur (s'il convient à l'échantillon) qu'un polynôme de degré 10.

On trouvera dans les pages suivantes un programme qui exécute l'algorithme. Le langage PASCAL a été choisi pour sa facilité de lecture, une traduction en C peut se faire rapidement.

Le programme que voici exécute la méthode de Marquardt.

```
program Marquardt ;
```

```
label
```

```
  99 ;
```

```
const
```

```
  N = 12 ;    (nombre de points)
```

```
  stop = 10 ;  (pour limiter le nombre d'itérations.)
```

```
  eps = 1e-5 ;  (précision du calcul.)
```

```
var
```

```
  p, q, u, v, u0, v0, u1, v1, w, z, max, scale : double ;
```

```
  det, lambda, delta, S0, S1 : double ;
```

```
  loi, xx, yy : array[1..N] of double ;
```

```
  i, j, k : integer ;
```

```
function phi (x, y, p : double) : double ;
```

```
  begin
```

```
    phi := exp(x * ln(p) - y * p) ;
```

```
  end ;
```

Cette fonction définit le modèle de régression choisi.

```
function phix (x, y, p : double) : double ;
```

```
  begin
```

```
    phix := ln(p) * exp(x * ln(p) - y * p) ;
```

```
  end ;
```

Dérivée par rapport à x de la fonction phi.

```
function phiy (x, y, p : double) : double ;
```

```
  begin
```

```
    phiy := -p * exp(x * ln(p) - y * p) ;
```

```
  end ;
```

Dérivée par rapport à y de la fonction phi.

Lorsqu'on voudra changer le modèle de régression sans changer le nombre de paramètres, il suffira de remplacer ces trois fonctions sans toucher à la suite du programme. Mais si on veut passer à trois paramètres ou plus, il faudra modifier aussi les fonctions SQ, Sx, etc.

```
function SQ (x, y : double) : double ;
```

```
  var
```

```
    s : double ;
```

```
    l : integer ;
```

```
  begin
```

```
    s := 0 ;
```

```
    for l := 1 to N do
```

```
      begin
```

```
        s := s + loi[l] * sqr(phi(x, y, xx[l]) - yy[l]) ;
```

```
      end ;
```

```
    SQ := s ;
```

```
  end ;
```

SQ est la somme des carrés des écarts.

```
function Sx (x, y : double) : double ;
```

```
  var
```

```
    s : double ;
```

```
    l : integer ;
```

```
  begin
```

```
    s := 0 ;
```

```
    for l := 1 to N do
```

```
      begin
```

```
        s := s + loi[l] * (phi(x, y, xx[l]) - yy[l]) * phix(x, y, xx[l]) ;
```

```
      end ;
```

```
    Sx := s ;
```

```
  end ;
```

Calcul de $\frac{\partial SQ}{\partial x}$.

```
function Sy (x, y : double) : double ;
```

```
  var
```

```
    s : double ;
```

```
    l : integer ;
```

```
  begin
```

```
    s := 0 ;
```

```
    for l := 1 to N do
```

```
      begin
```

```
        s := s + loi[l] * (phi(x, y, xx[l]) - yy[l]) * phiy(x, y, xx[l]) ;
```

```
      end ;
```

```
    Sy := s ;
```

```
  end ;
```

Calcul de $\frac{\partial SQ}{\partial y}$.

Analyse statistique des dépendances

function Sxx (x, y : double) : double ;

var

s : double ;

l : integer ;

begin

s := 0 ;

for l := 1 **to** N **do**

begin

s := s + loi[l] * phix(x, y, xx[l]) * phix(x, y, xx[l]) ;

end ;

Sxx := s * (1 + lambda) ;

end ;

Calcul de $\frac{\partial^2 SQ}{\partial x^2}$.

function Sxy (x, y : double) : double ;

var

s : double ;

l : integer ;

begin

s := 0 ;

for l := 1 **to** N **do**

begin

s := s + loi[l] * phix(x, y, xx[l]) * phiy(x, y, xx[l]) ;

end ;

Sxy := s ;

end ;

Calcul de $\frac{\partial^2 SQ}{\partial x \partial y}$.

function Syy (x, y : double) : double ;

var

s : double ;

l : integer ;

begin

s := 0 ;

for l := 1 **to** N **do**

begin

s := s + loi[l] * phiy(x, y, xx[l]) * phiy(x, y, xx[l]) ;

end ;

Syy := s * (1 + lambda) ;

end ;

Calcul de $\frac{\partial^2 SQ}{\partial y^2}$.

```
begin
z := 0 ;
for i := 1 to N do
  begin
    w := z ;
    xx[i] := i ;
    q := sqrt(xx[i]) ;
    z := xx[i] * q * sqrt(q) * exp(-sqrt(0.3) * xx[i]) ;
    yy[i] := z ;
    if z > w then
      begin
        max := z ;
      end ;
    end ;
scale := 220 / max ;

for i := 1 to N do
  begin
    loi[i] := 1 ;
  end ;

MoveTo(10, 242) ;
LineTo(10, 229) ;
MoveTo(9, 240) ;
LineTo(490, 240) ;
for i := 1 to N do
  begin
    k := round(scale * yy[i]) ;
    MoveTo(10 + 40 * i, 241 - k) ;
    LineTo(10 + 40 * i, 239 - k) ;
    MoveTo(9 + 40 * i, 240 - k) ;
    LineTo(11 + 40 * i, 240 - k) ;
  end ;
```

Début du programme principal.

Mise en mémoire du nuage de points. $xx[i]$ est l'abscisse du point $N^{\circ} i$, $yy[i]$ son ordonnée. Pour pouvoir tester plus facilement le programme, on a choisi ici un nuage de points situé exactement sur la courbe $y = x^u e^{-vx}$, avec $u = 1.75$ et $v = \sqrt{0.3} \simeq 0.5477$, de sorte que le modèle de régression sera exact.

Recherche du maximum de $yy[i]$ afin de trouver la bonne échelle graphique (**scale**).

$loi[i]$ est le poids du i -ième point.
Ici il est uniforme.

Représentation graphique du nuage de points.

Analyse statistique des dépendances

```
writeln ;
writeln(' enter the initial parameters :') ;
write(' u = ') ;           Initialisation manuelle (au clavier) de
readln(u) ;               l'itération.
write(' v = ') ;         Cela laisse l'initiative à l'utilisateur.
readln(v) ;
writeln ;

99 :                       Début de l'itération.

lambda := 0.0      delta := 1 ;
i := 0 ;

while ((delta < -eps) or (delta > 0)) and (i <= stop) do
  begin
    MoveTo(10, 240) ;      On représente graphiquement l'évolution du modèle
                          au cours de l'itération. Si tout se passe bien, les courbes
                          obtenues doivent finir par se rapprocher de plus en plus
                          du nuage de points.

    for j := 1 to 120 do
      begin
        w := j / 10 ;
        z := scale * phi(u, v, w) ;
        if z >= 500 then   Ici, simple précaution pour éviter overflow.
          k := 500
        else if z <= -500 then
          k := -500
        else
          k := round(z) ;
        LineTo(10 + 4 * j, 240 - k) ;
      end ;

    i := i + 1 ;
    S0 := SQ(u, v) ;
    det := Sxx(u, v) * Syy(u, v) - Sxy(u, v) * Sxy(u, v) ;
    u1 := Sx(u, v) * Syy(u, v) - Sy(u, v) * Sxy(u, v) ;
    v1 := -Sx(u, v) * Sxy(u, v) + Sy(u, v) * Sxx(u, v) ;
    u0 := u - u1 / det ;
    v0 := v - v1 / det ;
    S1 := SQ(u0, v0) ;
    delta := S1 - S0 ;

    Ci-contre on reconnaît
    l'algorithme de Marquardt.
```

```
writeln(i : 3, ' lambda = ', lambda : 11) ;
writeln('u = ', u0 : 16 : 14, ' v = ', v0 : 16 : 14) ;
writeln('delta = ', delta : 15) ;
writeln('S0 = ', S0 : 15) ;
writeln ;
if (S0 >= 10000) then
    begin
        writeln ;
        writeln(' I think your initial parameters are highly
        unrealistic. ') ;
        writeln(' The process will probably not converge. ') ;
        writeln(' Could you choose other values ? ') ;
        writeln ;
        writeln(' enter new initial parameters :') ;
        write(' u = ') ;
        readln(u) ;
        write(' v = ') ;
        readln(v) ;
        writeln ;
        goto 99 ;
    end ;
if (delta >= 0) then
    begin
        lambda := 10 * lambda ;
    end
else
    begin
        lambda := lambda / 10 ;
        u := u0 ;
        v := v0 ;
    end ;
end ;
writeln ;
write(' ') ;
for j := 1 to 21 do
    write('---') ;
writeln ;
writeln ;
```

On redonne l'initiative à l'utilisateur s'il apparaît que l'itération diverge trop.

On revient au début de l'itération.

Ci-contre on reconnaît la seconde partie de l'algorithme de Marquardt.

On trace un pointillé horizontal.

Analyse statistique des dépendances

```
if (delta >= -eps) and (delta <= 0) then
    begin
        writeln(' final result : S1 = ', S1 : 15) ;
        writeln(' u = ', u : 16 : 14) ;
        writeln(' v = ', v : 16 : 14) ;

        MoveTo(10, 240) ;
        for j := 1 to 120 do
            begin
                w := j / 10 ;
                z := phi(u, v, w) ;
                k := round(scale * z) ;
                LineTo(10 + 4 * j, 240 - k) ;
            end ;
        end
    else
        ...et si la convergence n'est pas stabilisée, on rend l'initiative à
        l'utilisateur. ...
        begin
            writeln(' I have stopped computing because there is no') ;
            writeln(' appreciable progress after ', stop + 1 : 1, '
iterations . ') ;
            writeln(' Try other values for u and v or change the model.') ;
        end ;
    end.
```

À la fin de l'itération, si la convergence est stabilisée, on affiche le résultat final ...

... avec la courbe correspondante ...

XIII. CORRÉLATIONS E.P.R.

La Statistique et les mystères de la causalité.

Pour couronner la discussion sur la causalité amorcée au chapitre I et poursuivie en IV.2 puis XII.6, nous allons étudier soigneusement un exemple issu de la Physique, dans lequel la causalité est fortement mise à l'épreuve: l'*expérience d'Einstein, Podolski, Rosen* que nous abrègerons en *expérience E.P.R.* Comme toute expérience de Mécanique quantique, celle-ci fait appel à la Statistique, et par conséquent son interprétation fait appel au Calcul des probabilités. Le phénomène étudié dans cette expérience est intéressant non (pour le moment) par ses applications technologiques, mais parce qu'il fait apparaître le monde quantique de manière si flagrante qu'aucune échappatoire n'est plus possible. Pour notre discussion sur la corrélation et la causalité, il est intéressant parce que, étant situé à la frontière de ce qui est compris et ce qui ne l'est pas encore, n'étant donc pas encore soumis à des certitudes vraies ou fausses mais seulement à des doutes, il fournit un exemple de confrontation directe entre l'objectif et le subjectif: les corrélations observées dans l'expérience E.P.R. (appelées de ce fait *corrélations E.P.R.*) sont dépourvues à la fois de l'antériorité et de la relation de nécessité; la Mécanique quantique les prédit et les décrit, mais nul n'y perçoit une relation de nécessité causale. Enfin, l'absence d'antériorité est expérimentalement établie.

Par ailleurs, l'interprétation de l'expérience par le Calcul des probabilités (effectuée par J. S. Bell) révèle remarquablement bien les évidences erronées que nous pouvons véhiculer inconsciemment en appliquant les règles de ce Calcul. L'analyse de l'expérience E.P.R. va donc nous servir à mieux comprendre ce qu'est *réellement* un événement.

XIII. 1. Description du problème.

Einstein, Podolski, et Rosen avaient imaginé cette expérience de pensée en 1935⁽¹⁾. À cette époque toutefois l'expérience ne pouvait pas être réalisée (la technologie ne le permettait pas), et même si cela avait été possible, on n'aurait pas pu en tirer des résultats concluants. La première expérience concrète qui corresponde au modèle imaginé tout en étant absolument

⁽¹⁾ *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Physical Review, vol 47, 1935, pp. 777 – 780. L'expérience que nous décrivons ici (fig. 58) n'est pas exactement celle de cet article, mais — conformément à une tradition établie — la version revue et corrigée par David Bohm.

Les corrélations E.P.R.

concluante et incontestable, a été réalisée par Alain Aspect à l'Institut d'Optique d'Orsay (1982). Il n'y a pas la place ici pour faire un exposé historique de la question⁽²⁾. Mais nous allons étudier la question dans l'état où elle peut être formulée aujourd'hui, en ignorant les étapes historiques de clarification par lesquelles elle est passée. Voici donc le problème.

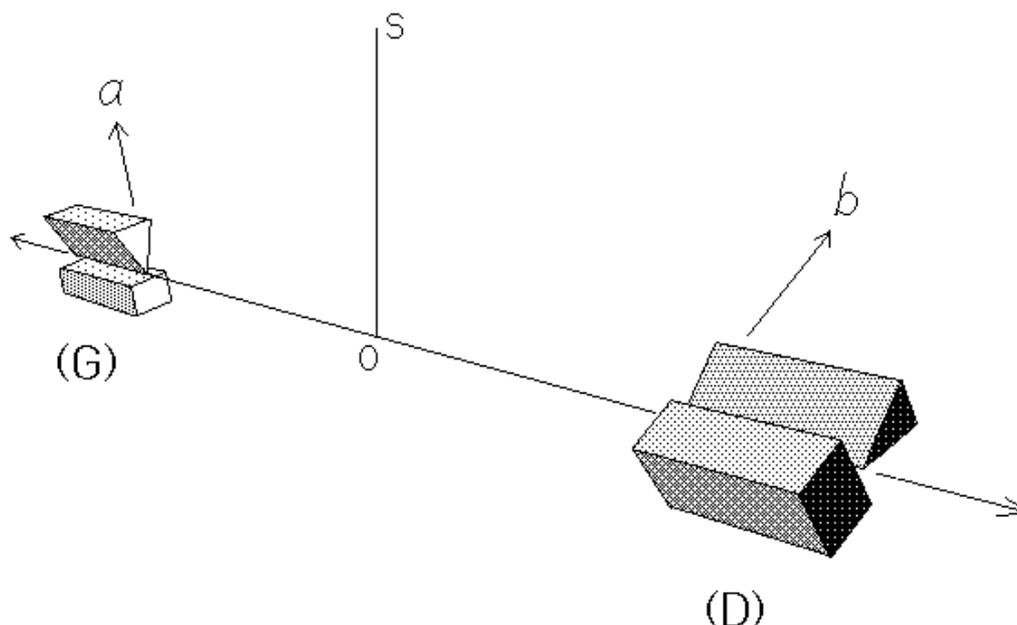


figure 58

On effectue l'expérience représentée sur la figure 58. Un faisceau de molécules diatomiques est préparé dans un état "singulet", c'est-à-dire de moment cinétique (spin) nul. Pour le lecteur qui ne comprend pas ces termes, il suffit de savoir qu'on prépare ces molécules de telle façon que lorsqu'elles se diviseront, leurs deux composants se comporteront symétriquement. Ce faisceau circule de S vers O . En pratique le faisceau est produit en chauffant dans un four un métal dont la vapeur est formée de molécules diatomiques, et en filtrant les vapeurs qui en sortent ; on filtre la direction de propagation avec des diaphragmes qui absorbent tout ce qui ne part pas dans la bonne direction, et on filtre l'état singulet avec des champs magnétiques qui dévient tout ce qui possède un moment cinétique non nul. En O ces molécules sont cassées en deux et deux atomes de spins

⁽²⁾ Un bon exposé de synthèse est *Bell's Theorem: experimental tests and implications* by John F. Clauser and Abner Shimony (Reports on Progress in Physics, vol. **41**, 1978 pages 1181 – 1927). Son seul défaut est d'être antérieur à l'expérience d'Aspect. Une autre référence plus récente et plus accessible est le livre de Franco Selleri *Le grand débat de la théorie quantique*. Flammarion, Paris, 1986.

opposés partent de O dans des directions également opposées (en pratique : on casse les molécules avec un laser, et on filtre encore les directions de propagation avec des diaphragmes). Les deux atomes issus de cette fission ont des spins opposés d'après la conservation du moment cinétique. On dispose sur leurs trajectoires respectives des aimants de Stern-Gerlach qui permettront de mesurer les spins des deux atomes. Là encore, il n'est pas demandé au lecteur de savoir ce qu'est un aimant de Stern-Gerlach ; il suffit de comprendre qu'il s'agit d'un dispositif permettant de mesurer un paramètre (le spin) qui ne peut prendre que les valeurs $+1$ ou -1 . Ces détails pratiques sont donnés pour fixer les idées, mais n'interviennent pas au niveau du principe. D'ailleurs dans l'expérience d'Alain Aspect on utilisait des atomes de Calcium (et non des molécules diatomiques), qui après excitation par laser se désexcitaient spontanément en émettant deux photons jumeaux de polarisations opposées, et on mesurait ensuite la polarisation des photons avec des polariseurs spéciaux. La désexcitation des atomes de Calcium ne donnant des photons jumeaux que dans des conditions très spécifiques, on imagine le soin qu'exigeaient la réalisation pratique de ces conditions ; de même pour les différents filtrages. Nous passons sur ces problèmes techniques complexes. Comme toujours en Physique, on ne peut réaliser expérimentalement une situation idéalement simple qu'au prix d'appareillages complexes.

Le dispositif est supposé symétrique ; en particulier, les deux analyseurs (aimants de Stern-Gerlach ou polariseurs d'Aspect) sont supposés rigoureusement identiques ; dans l'expérience ils ne doivent différer que par leur orientation.

Le trait essentiel du dispositif est le suivant : les deux aimants peuvent tourner autour de leur axe longitudinal, matérialisé par la trajectoire de l'atome. On distinguera l'aimant de gauche (G) et celui de droite (D). Appelons a la direction selon laquelle est orienté l'aimant de gauche et b celle de l'aimant de droite. Puisque les aimants tournent autour de leurs axes longitudinaux, qui sont fixes, les directions a et b peuvent être repérées chacune par un seul paramètre, un angle variant de 0 à 2π .

Dans le langage imagé et souvent trompeur de la Mécanique quantique, on dit usuellement, lorsque l'aimant de Stern-Gerlach pointe dans la direction a , qu'il "mesure la composante selon a du spin". Le spin de l'atome se manifeste au cours de la traversée de l'aimant par une déviation dans la direction a , qui est soit positive (vers le "haut" de l'aimant), soit négative (vers le "bas" de l'aimant). L'amplitude de la déviation dépend des caractéristiques de l'aimant (longueur, champ magnétique) mais est en valeur absolue la même pour tous les atomes préparés ; seul le sens (le signe) de

déviations varie avec l'atome individuel. Ce signe est aléatoire: il y a toujours une chance sur deux d'observer $+$ ou $-$. La 'mesure du spin' consiste à constater si l'atome est dévié positivement ou négativement. On dira que la composante selon a du spin est $+\frac{1}{2}\hbar$ dans le premier cas et $-\frac{1}{2}\hbar$ dans le second cas. Pour simplifier, on omettra \hbar et on indiquera seulement le signe $+1$ ou -1 . Le lecteur qui n'est pas encore familier avec la Mécanique quantique ne doit pas chercher à comprendre ces phrases autrement que comme une manière tortueuse d'exprimer le constat de ces déviations.

La Mécanique quantique affirme qu'il est impossible de mesurer en même temps les composantes du spin d'un même atome dans deux directions orthogonales (principe de Heisenberg dit d'incertitude ou de complémentarité). Plus exactement: l'état de spin n'est pas une propriété intrinsèque de l'atome que l'appareil mesure, mais une propriété de l'atome relative à l'appareil. Encore plus exact: ce n'est pas une propriété relative à l'appareil lui-même, mais à ses symétries internes (un autre appareil complètement différent, mais présentant les mêmes symétries internes, mesurerait aussi (éventuellement sous une forme autre qu'une déviation) la "composante selon a du spin". L'aimant de Stern-Gerlach que traverse l'atome lui fournit un environnement spatial formé d'un champ magnétique à fort gradient, le champ *et* son gradient étant dirigés selon a . On ne peut certes pas tourner l'aimant globalement autour de l'axe a sans dérégler l'expérience car l'atome doit traverser l'aimant longitudinalement; mais l'atome est localisé et sa trajectoire est rectiligne, de sorte qu'à chaque instant, l'atome "voit" son environnement immédiat (le champ magnétique local) comme invariant par les rotations autour de l'axe a . Ce qui se passe loin de l'atome (la forme particulière des fers) n'influe pas sur lui et la direction longitudinale sert uniquement à le maintenir dans l'entrefer tout au long de sa trajectoire. (On pourrait aussi exprimer cela en disant que le spin n'est modifié ni par le mouvement rectiligne uniforme, ni par les valeurs du champ magnétique en dehors du voisinage immédiat de l'atome).

Voici maintenant le but qu'Einstein, Podolski, et Rosen souhaitaient donner à cette expérience. Si on mesure le spin d'un atome selon la direction a dans l'aimant de gauche G *et* le spin selon la direction b de son jumeau (issu de la même molécule) dans l'aimant de droite D , alors, si $a = b$, ils seront opposés (les déviations seront opposées). C'est bien ce que prédit aussi la Mécanique quantique. Par conséquent, si le spin selon b du jumeau de droite est $+1$ (respectivement: -1), on est assuré qu'il serait *forcément* -1 (respectivement: $+1$) pour le jumeau de gauche si les deux aimants pointaient dans la même direction. Sachant cela, on va prendre b *orthogonal* à a et mesurer le spin du jumeau de droite selon b . Ainsi on peut déduire

le spin selon b du jumeau de gauche (c'est l'opposé du spin mesuré à droite); et comme on a mesuré directement le spin selon a du jumeau de gauche, on connaît, pour ce jumeau, à la fois le spin selon a et selon b . Einstein, Podolski, et Rosen concluent alors que par cette expérience on peut connaître à la fois le spin selon a et le spin selon b d'une particule (ici, le jumeau de gauche).

Au début de leur article de 1935 ils définissent ainsi ce qu'est un *élément de réalité*:

Si, sans perturber en aucune manière un système, nous pouvons prédire avec certitude (c'est-à-dire avec une probabilité égale à un) la valeur d'une grandeur physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette grandeur physique.

Et peu avant ils affirment ceci:

Quel que soit le sens qu'on donne au terme *complet*, pour qu'une théorie soit complète il semble que l'exigence suivante soit nécessaire: *chaque élément de la réalité physique doit avoir sa contrepartie dans la théorie physique*. Nous appellerons cela la condition de complétude.

La Mécanique quantique prédit que si on sait que le spin du jumeau de gauche selon a est, disons, $+1$, alors il y a exactement autant de chances a priori de trouver $+1$ que -1 pour l'autre jumeau selon la direction orthogonale b , et cela est entièrement compatible avec les présupposés d'Einstein, Podolski, et Rosen: cela veut dire que la mesure indirecte du spin selon b (c'est-à-dire la mesure effectuée sur le jumeau de droite afin de ne pas perturber celui de gauche) donnera une fois sur deux $+1$ et une fois sur deux -1 .

La Mécanique quantique de Bohr et Heisenberg affirme expressément dans ses présupposés que le spin ne peut être un élément de réalité que dans une seule direction à la fois. Toutefois il s'agit là d'un principe *qualitatif* de la Mécanique quantique, dont il est toujours possible de nier la validité car il ne peut être vérifié directement par l'expérience. Cependant, la Mécanique quantique propose aussi des prédictions quantitatives: si b fait un angle θ non nécessairement droit avec a , les probabilités d'avoir $+1$ et -1 pour l'autre jumeau seront respectivement $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ et $\sin^2 \frac{\theta}{2}$. Nous verrons que cette prédiction est incompatible avec les présupposés d'Einstein, Podolski, et Rosen, *même sans recourir au principe qualitatif susmentionné* (voir section **XIII.4** ci-après et notamment la figure 62), sauf justement dans le cas de directions orthogonales ou parallèles, qui sont des cas particuliers trompeurs. Si ces cas particuliers trompeurs n'avaient pas existé, le débat entre les «partisans d'Einstein» et les «partisans de Bohr» aurait été tranché bien plus vite.

S'il était possible de constater d'abord la déviation de l'atome dans un

aimant selon a puis de faire passer le même atome dans un second aimant pour en mesurer cette fois le spin selon b , cette expérience compliquée ne serait pas nécessaire. Mais tout le problème provient de ce que la mesure effectuée dans le premier aimant perturbe l'état de l'atome : son spin est de l'ordre de $\hbar \sim 10^{-34}$ (il vaut $\pm \frac{1}{2}\hbar$), et la déviation dans le champ magnétique est l'effet d'une action du champ sur la particule, dont l'intensité est également de l'ordre de \hbar . Pour mesurer le spin on a donc exercé une action physique aussi grande que la grandeur à mesurer. C'est comme si on voulait mesurer l'épaisseur d'un rouleau de pâte avec un pied à coulisse qui s'enfonce dedans. Einstein parlait de ce constat, que la nature est ainsi faite que toute mesure utilise des champs ou de la lumière qui sont impalpables pour des corps macroscopiques, mais qui ne le sont plus pour des atomes. D'où cette expérience qui permet de mesurer le spin selon b du jumeau de gauche en ne perturbant que le jumeau de droite, donc avec un procédé impalpable pour le jumeau de gauche, dont on mesure alors indirectement et "sans le perturber d'aucune manière" le spin selon b .

En étudiant bien les arguments des uns et des autres (ou pour simplifier : de l'un – Einstein – et de l'autre – Bohr), on peut voir que le désaccord (ou la différence) entre les deux conceptions concernait la nature exacte de ce qui est mesuré ; Einstein voulait que le spin fût une caractéristique intrinsèque de l'atome, indépendante de l'appareil, et en particulier indépendante de la position de l'appareil, tandis que Bohr, apparemment parce qu'il arrivait mieux à l'accepter, admettait que le spin est une caractéristique de l'atome *relative* à son environnement. Le titre de l'article d'Einstein, Podolski et Rosen "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ? " suggère déjà l'idée sous-jacente que le spin serait fixé au moment où la molécule se divise en deux au point O , de sorte que le signe que prendra la déviation pendant la traversée de l'aimant sera déterminé à l'avance pour toute direction a ou b . Admettant provisoirement que le spin attribué à chacun des deux jumeaux au moment de la fission est totalement aléatoire et imprévisible comme le point où vient s'arrêter une bille de roulette, la Mécanique quantique devrait au moins, pour pouvoir être considérée comme complète, permettre de prédire le résultat de la déviation à partir de l'état du jumeau immédiatement après la fission. C'est-à-dire que, pour être complète, elle devrait inclure dans la théorie des paramètres décrivant cet état, de telle sorte que, même s'il est techniquement difficile de les mesurer, du moins leur valeur détermine le sens de la déviation. Einstein, Podolski, et Rosen acceptent le constat qu'on ne peut pas mesurer ces paramètres avec de la lumière ou des champs magnétiques sans les perturber, car ces phénomènes sont trop brutaux ; mais l'état du jumeau est, selon eux, quand même déterminé, et on pourrait le mesurer sans le

perturber si on découvrait des environnements physiques beaucoup plus ténus que les champs magnétiques, qui exerceraient sur la particule une action bien plus faible que la grandeur à mesurer. La Mécanique quantique est donc incomplète car elle écarte a priori de la théorie ce que des mesures moins brutales révéleraient.

Bohr interprétait cela différemment. Pour le comprendre on peut s'aider d'une comparaison : imaginons un sondage d'opinion avec des questions du type "êtes-vous plutôt satisfait ou plutôt insatisfait de la politique du gouvernement en matière de X ?" La réponse du sondé sera $+1$ s'il est "plutôt satisfait" et -1 s'il est "plutôt insatisfait". Il y a bien les sans opinion, mais cela existe aussi dans les expériences du type E.P.R. car il y a toujours des atomes pour lesquels la mesure ne marche pas ; on ne les comptabilise pas. Le X dans la question représente un thème : éducation, défense, diplomatie, urbanisme, aménagement du territoire, recherche, agriculture, etc. Si on compare avec nos atomes, le thème X joue le rôle de la direction a . L'état singulet correspondrait à des couples où chacun contredit systématiquement son conjoint. Préparer les molécules dans l'état singulet correspond dans la comparaison à sélectionner ces couples pour faire le sondage parmi eux seuls. Il ne semble pas raisonnable de croire qu'il existe un "état objectif du sondé", décrit par des paramètres bien précis et tels que, si on les connaissait tous, on pourrait prédire sa réponse quel que soit X . Même si on fait abstraction de détails tels que l'influence du sondeur, l'humeur du jour, etc, il semble assez plausible que la question puisse prendre le sondé au dépourvu, de telle sorte qu'il improvise une réponse qui ne correspond même pas à sa nature ou à ses préférences politiques. Cela n'empêchera pas le sondage d'être statistiquement correct et de donner à la fourchette près les mêmes résultats que n'importe quel autre, effectué dans la population française au même moment ; c'est là le miracle des probabilités. Cette comparaison ne doit évidemment pas être prise au pied de la lettre ; son seul but ici est de montrer qu'il n'y a aucune *évidence a priori* pour que la réponse du sondé soit objectivement déterminée à l'avance par un "état". En vertu de quelle autre évidence pourrions-nous affirmer que la réponse des atomes est objectivement déterminée à l'avance par son "état" ? Parce que l'atome serait un être non vivant, contrairement au sondé ? Mais c'est l'expérience et non la raison a priori qui nous a montré que les êtres vivants ne sont pas réductibles à un déterminisme simple. Donc seule l'expérience peut nous faire savoir si les atomes sont ou non réductibles à un déterminisme simple. Ou parce que les êtres vivants seraient complexes, tandis que les atomes seraient simples ? Là aussi, c'est l'expérience et non la raison a priori qui a montré que le mouvement des planètes, ou les phénomènes électriques, obéissent à des lois simples, et qu'il n'en va pas ainsi pour le vivant. Le fait que les atomes

soient “les composants élémentaires” de la matière ne prouve pas qu’ils sont obligatoirement plus simples ; justement, l’un des principaux enseignements du Calcul des probabilités est que des phénomènes extrêmement complexes peuvent sembler simples à plus grande échelle, soit par l’effet de la loi des grands nombres (cf. chapitre VII), soit par la transformation du chaos en hasard (sections I.4, I.5, II.6, IV.2).

Ces remarques devraient aider à comprendre la position de Bohr, plus basée sur le doute. D’un autre côté, la conviction exprimé par Einstein qu’il *doit* y avoir une explication (“Dieu ne joue pas aux dés!”) est nécessaire pour chercher. La science serait impensable sans la conviction que “Dieu est mathématicien”.

En ce qui concerne le spin des atomes, il faut se garder d’introduire implicitement des “évidences” issues d’un autre domaine déjà connu. L’état dont parle la Mécanique quantique n’est pas l’état de l’atome jumeau, mais l’état du système atome + champ magnétique à fort gradient, ou bien l’état de l’atome relatif à l’environnement. Ainsi le langage usuel de la Mécanique quantique (encore marqué par les conceptions classiques) est trompeur ; on ne devrait pas dire “l’appareil orienté selon a mesure la composante du spin selon a ” comme s’il existait un spin intrinsèque dont seule la composante serait relative, mais “on mesure le spin de l’atome dans l’environnement a ”.

Jusqu’ici cependant nous rencontrons des différences d’opinion ou des différences d’interprétation, et nous ne pouvons pas trancher le débat. Nous ne pouvons pas prouver que la position défendue par Einstein est fausse. Ni – même lorsque les prédictions quantitatives de la Mécanique quantique sont vérifiées – prouver que Bohr a raison. Une chose est l’acte purement technique qui consiste à appliquer le formalisme de la Mécanique quantique et à effectuer une expérience pour constater l’accord entre la théorie et l’expérience, une toute autre chose est l’interprétation. Est-il possible de trancher expérimentalement ce débat d’interprétation ? En 1964 parut un article de J. S. Bell⁽³⁾ qui répondit positivement à cette question. Mais bien entendu, *ipso facto* les interprétations se trouvent précisées – par les conditions de l’expérience – et par conséquent rendues plus étroites. C’est donc l’analyse des conditions exactes de l’expérience, où la Statistique joue comme toujours un rôle clé, que je voudrais présenter ici pour conclure cet ouvrage, plutôt comme une question ouverte que comme un exemple pédagogique.

Les arguments présentés par Bell dans son article sont repris ici, mais

⁽³⁾ J.S. Bell *On the Einstein Podolski Rosen Paradox* (Physics, Vol. 1, N° 3, pp. 195 – 200.)

fortement modernisés, le sujet ayant bénéficié depuis trente ans d'une lente mais considérable maturation.

Nous prenons donc l'expérience de principe décrite sur la figure 58, qui ne diffère d'expériences réelles que par des détails inessentiels. Les molécules diatomiques peuvent être produites en quantité pratiquement illimitée; les échantillons statistiques seront donc aussi nombreux que nécessaire. Nous allons effectuer des observations de la façon suivante: les directions a de l'aimant de gauche et b de l'aimant de droite sont réglables à volonté. Effectuons une première série de n observations avec $a = a_1$ et $b = b_1$. Remplissons un tableau comme le suivant :

molécule $N^o :$	gauche (a_1)	droite (b_1)
1	+1	+1
2	+1	-1
3	+1	-1
4	-1	-1
5	+1	+1
6	-1	+1
7	-1	-1
...
n	-1	+1

La première colonne indique le numéro d'ordre des observations: pour chaque molécule arrivant en O il y aura deux atomes jumeaux, l'un à gauche et l'autre à droite, qui seront analysés par l'aimant respectif et seront déviés positivement (+1) ou négativement (-1).

Une première propriété d'invariance nous permet d'affirmer a priori que pour chacun des deux jumeaux il y aura environ autant de +1 que de -1, les écarts par rapport à l'équilibre étant distribués selon la loi gaussienne. En effet, s'il y avait un déséquilibre à ce niveau, cela voudrait dire que la nature favorise une polarisation au détriment de l'autre ou que l'on pourrait distinguer la gauche de la droite, car l'un des deux côtés comporterait davantage de +1 que l'autre. Bien entendu, l'expérience confirme cette invariance.

Nous pouvons calculer à partir du tableau la corrélation empirique R : c'est la moyenne des produits des éléments de la deuxième colonne par ceux correspondants de la troisième; ou encore: le produit scalaire de la deuxième et de la troisième colonne du tableau, divisé par n .

Le débat lancé par Einstein, Podolski, et Rosen concerne la question

suivante: s'il se crée un état objectif des deux jumeaux (ou "élément de réalité physique", comme ils disent dans leur article) *au moment où la molécule diatomique se casse en O*, et que le résultat observé des mesures est l'expression de cet état (peu importe si l'état créé est lui-même aléatoire), alors cet état objectif est causalement indépendant de l'orientation des aimants, d'autant plus que cette orientation peut être modifiée aléatoirement *après* la fission de la molécule, comme c'est effectivement le cas dans l'expérience réelle d'Aspect. Donc selon Einstein, Podolski, et Rosen l'expérience *reproductible* est déjà terminée avec la fission de la molécule: le passage à travers les aimants n'est plus qu'une mesure de ce qui a déjà eu lieu.

Lorsqu'on dit qu'une expérience est reproductible, on entend par là que ce qu'on appelle "les conditions de l'expérience" sont identiques d'une fois sur l'autre. Lorsqu'on répète le lancement d'une pièce de monnaie, en limer le bord modifie ces conditions; mais que l'observateur siffle une fois la Marseillaise et l'autre fois l'Internationale ne change pas ces conditions car il y a indépendance causale entre l'air sifflé par l'observateur et le processus en cours: donc pour qu'une expérience soit reproductible il n'est pas nécessaire que d'une fois sur l'autre rien ne se modifie dans l'univers; il est seulement nécessaire que d'une fois sur l'autre ne se modifient que des choses qui sont causalement indépendantes du processus.

Dans la conception d'Einstein, Podolski, Rosen, le résultat des mesures dépend certes des orientations des aimants, mais non l'état objectif des atomes, de même que le diamètre apparent de la planète Mars dépend de sa distance à la Terre, mais non son diamètre réel. Une meilleure comparaison serait plutôt la suivante: les composantes d'un vecteur déterminé dépendent des axes de coordonnées, mais non le vecteur lui-même.

Le point essentiel est le suivant: on peut à juste titre être convaincu que l'état des jumeaux, qui est déterminé au moment de la division, est indépendant de l'orientation des aimants, puisque de toute évidence les aimants sont loin du point *O* et n'ont rien à voir avec le processus de division. En outre la division a lieu *avant* la mesure: admettre que l'état des jumeaux dépend de l'orientation des aimants revient à admettre que l'avenir peut influencer sur le passé.

Mais il reste la question: qu'entend-on par *l'état des jumeaux*? Lorsque nous avons présenté le lancement d'un dé ou d'une pièce de monnaie comme une expérience reproductible, nous avons sous-entendu que les mécanismes complexes qui déterminent le mouvement de la pièce ou du dé pouvaient être *isolés* du reste du monde: il était "évident" que l'air sifflé par l'observateur n'influaient pas sur le processus qu'il était en train d'observer. Si l'air sifflé par

l'observateur changeait la loi de probabilité, nous ne pourrions plus dire que le lancement du dé est une expérience reproductible: il faudrait considérer une expérience élargie, consistant à siffler toujours le même air chaque fois qu'on lance le dé. Ce qui rend une expérience reproductible est son isolement par rapport au reste de l'univers. Cette notion d'expérience reproductible est le paradigme fondamental du Calcul des probabilités, nous l'avons rencontré dès le début de cet ouvrage: en **I.2**, ce qui distingue la distribution de trois boules dans deux boîtes de la distribution de trois bosons entre deux états quantiques de même énergie peut s'exprimer ainsi: dans le cas des boules, on répète bien trois fois la même expérience, mais pas dans le cas des bosons. En effet, la manière dont le premier boson remplit les deux états modifie les conditions de l'expérience pour le deuxième boson, donc l'expérience n'est pas répétée à l'identique. Avec les boules, bien que la première devait choisir entre deux boîtes vides alors que la seconde doit choisir entre deux boîtes dont l'une est déjà occupée, l'expérience se reproduit pourtant, car l'état d'occupation des deux boîtes n'a pas d'influence. Autrement dit, le fait que l'expérience soit reproductible est lié à la *séparation causale* entre les boules; à l'inverse il n'y a pas de séparation causale entre les bosons.

XIII. 2. Interprétation de J. S. Bell.

Afin de décrire la situation imaginée par Einstein, Podolski, et Rosen, où le processus de création de la paire de jumeaux serait reproductible sans y inclure la position des analyseurs, Bell propose de considérer une variable aléatoire λ dont on ne précise pas la nature (elle peut être vectorielle, de dimension aussi élevée qu'on voudra), qui décrit l'état interne de chaque jumeau: comme les jumeaux sont supposés identiques ou plus exactement parfaitement symétriques l'un de l'autre, on peut dire que la même valeur de λ les caractérise tous les deux. Cette approche est exactement celle que nous avons discutée plusieurs fois déjà dans cet ouvrage: un processus est caractérisé par des probabilités a priori, qui restent les mêmes chaque fois qu'on le reproduit dans des conditions identiques, et qui par conséquent coïncideront avec les probabilités empiriques mesurées sur un grand nombre de répétitions indépendantes du processus (cf. **X.3**). Bell applique soigneusement le paradigme du Calcul des probabilités.

Si Bell ne précise pas la nature de λ , c'est pour atteindre le maximum de généralité. S'il la tient pour une variable aléatoire, c'est parce qu'il admet que la création des jumeaux puisse ne pas être elle-même déterministe. L'idée sous-jacente était que la connaissance préalable d'un état interne devait permettre de prédire l'issue de la mesure (le processus qui se déroule à l'intérieur d'un aimant analyseur pendant que la particule le traverse),

comme la connaissance exacte de la trajectoire d'un dé devrait permettre de prédire sur quelle face il s'arrêtera. Mais on accepte que l'état interne puisse être lui-même trop difficile à prévoir à partir du mécanisme détaillé de la division, tout comme la trajectoire du dé est trop difficile à prévoir à partir des conditions initiales.

Autrement dit, Bell se propose de tester réellement une hypothèse de principe. Pour y parvenir, il s'efforce de ne rien présupposer en dehors de cette prédictibilité de principe.

Donc Bell suppose que si λ est aléatoire, du moins sa valeur va déterminer univoquement l'issue de la mesure; cela se traduit mathématiquement par le fait que le signe de la déviation doit être pour chacun des deux jumeaux une fonction de λ . Mais comme on admet aussi que la déviation peut être influencée par l'aimant traversé (c'est-à-dire que le résultat de la mesure n'est pas une propriété de la particule isolée et que la mesure perturbe celle-ci), on doit donc considérer que le signe X de la déviation est une fonction non seulement de λ , mais aussi de l'orientation a de l'analyseur, qu'on note $X(a, \lambda)$. Ainsi λ est une variable aléatoire, mais X est une fonction univoquement déterminée de a et de λ . Les deux jumeaux étant symétriques mais non identiques, la manière dont X dépend de λ n'est pas forcément la même à droite qu'à gauche; par exemple on pourrait avoir $X_D(a, \lambda) = X_G(a, -\lambda)$, où plus généralement $X_D(a, \lambda) = X_G(a, \sigma(\lambda))$ où σ désigne une symétrie de l'espace où λ prend ses valeurs. Le point essentiel est que $X_G(a, \lambda)$ dépend de l'orientation a de l'analyseur de gauche, mais pas de l'orientation de l'analyseur de droite; de même $X_D(b, \lambda)$ dépend de l'orientation b de l'analyseur de droite, mais pas de l'orientation de l'analyseur de gauche.

Que signifient ces hypothèses? Dire que λ est une variable aléatoire, et que X est une fonction des variables a et λ , est du langage mathématique. Mais si nous voulons interpréter correctement l'expérience E.P.R. nous devons comprendre le sens concret de ces formulations mathématiques. Lorsqu'on dit que X est une fonction des variables a et λ , cela signifie (c'est la *définition* mathématique d'une fonction) que si on donne à a et à λ des valeurs déterminées, alors $X(a, \lambda)$ aura une valeur déterminée. En langage imagé, cela signifie que, une fois fixées les valeurs de a et λ , aucun hasard n'intervient plus pour la détermination de la valeur de $X(a, \lambda)$. Mais λ elle-même est, dans les hypothèses de Bell, une variable aléatoire, dont la valeur sera choisie par le hasard au cours du processus de création de la paire de jumeaux. Ainsi, les hypothèses exprimées ci-dessus dans le langage mathématique se traduisent dans le langage imagé par : "le hasard intervient *une seule fois* dans toute l'expérience E.P.R. et ce moment est celui de la

création de la paire ; il n'intervient plus ensuite ; en particulier il n'intervient plus pendant la traversée de l'analyseur".

On peut encore proposer une légère variante : admettre que a est aussi une variable aléatoire. Rappelons un point important de l'expérience d'Aspect : elle a été construite de telle sorte que l'orientation des polariseurs soit modifiée aléatoirement par des commutateurs ultra-rapides ($\sim 10^8$ commutations par seconde) sous les conditions suivantes :

a) elle est modifiée *après* la création de la paire par désexcitation de l'atome de Calcium ;

b) la commutation est effectuée de telle sorte que le changement de direction à gauche et la mesure à droite (ou vice-versa) soient des événements séparés par un intervalle du genre espace, autrement dit qu'un signal lumineux parti du polariseur de gauche au moment de sa commutation aléatoire parvienne au polariseur de droite après la mesure du jumeau de droite.

Dans ce cas le hasard intervient aussi au moment du choix, pour chaque analyseur, entre deux orientations. Mais le point essentiel demeure : le hasard n'intervient pas pendant la traversée des analyseurs ; en un mot : les jeux sont faits avant.

On peut donc résumer la *signification* des hypothèses de Bell en disant simplement :

1. La mesure effectuée sur chaque jumeau est indépendante de la position de l'autre analyseur.
2. Aucun hasard n'intervient plus pendant la traversée des analyseurs.

Enfin, une autre variante encore consiste à renoncer même à la deuxième condition ci-dessus. Nous l'étudierons plus loin ; mais là on renonce alors à la possibilité d'une prédiction à partir d'un hypothétique état intrinsèque, donc on s'écarte du postulat E.P.R. Aujourd'hui on se rend compte, comme nous verrons plus loin, que la question n'est pas du tout liée à la seconde condition ci-dessus ; mais elle était essentielle dans la conception d'Einstein, Podolski, et Rosen.

Nous rapportons d'abord ci-après le raisonnement mathématique que Bell a publié en 1964. Ensuite nous passerons aux variantes.

Afin d'obtenir un test effectif de son hypothèse, Bell propose alors de considérer la corrélation entre X_G et X_D pour des orientations quelconques a à gauche et b à droite. Soit $\{\lambda_j, (p_j)\}$ la loi de probabilité de λ . La corrélation est

$$\mathbf{E}(a, b) = \mathbf{E}(X_G(a, \lambda) \cdot X_D(b, \lambda)) = \sum_j p_j X_G(a, \lambda_j) \cdot X_D(b, \lambda_j) \quad (XIII.1.)$$

Ces corrélations sont mesurables expérimentalement, puisqu'il suffit de répéter un grand nombre N de fois l'expérience et d'établir la corrélation empirique entre les résultats de gauche et ceux de droite. Certes, leur mesure effective est difficile car dans une expérience concrète les résultats significatifs sont mêlés à de nombreux phénomènes indésirables et doivent être soigneusement triés; mais nous faisons confiance aux expérimentateurs. Les résultats de ces N expériences peuvent être enregistrés sous la forme d'un tableau comme celui présenté plus haut (page 385): la corrélation empirique R est la moyenne des produits des éléments de la deuxième colonne du tableau par les éléments correspondants de la troisième colonne. D'après la loi des grands nombres (puisque l'expérience est reproductible) la corrélation empirique R sera d'autant plus proche de la corrélation théorique $\mathbf{E}(a, b)$ que N sera plus grand, les écarts supérieurs à plusieurs fois \sqrt{N} ne se produisant pratiquement jamais.

Supposons qu'on effectue quatre séries d'expériences: dans la première on orientera l'analyseur selon a_1 à gauche et b_1 à droite; dans la seconde a_1 à gauche et b_2 à droite; dans la troisième a_2 à gauche et b_1 à droite; dans la quatrième a_2 à gauche et b_2 à droite. On peut écrire:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(a_1, b_1) - \mathbf{E}(a_1, b_2) &= \quad \quad \quad (XIII.2.) \\ &= \sum_j p_j \left[X_G(a_1, \lambda_j) \cdot X_D(b_1, \lambda_j) - X_G(a_1, \lambda_j) \cdot X_D(b_2, \lambda_j) \right] \\ &= \sum_j p_j \left[X_G(a_1, \lambda_j) \cdot X_D(b_1, \lambda_j) \left(1 \pm X_G(a_2, \lambda_j) \cdot X_D(b_2, \lambda_j) \right) \right] \\ &\quad - \sum_j p_j \left[X_G(a_1, \lambda_j) \cdot X_D(b_2, \lambda_j) \left(1 \pm X_G(a_2, \lambda_j) \cdot X_D(b_1, \lambda_j) \right) \right] \end{aligned}$$

On a simplement rajouté les termes précédés de \pm qui s'annulent mutuellement. Étant donné que $X_G(a, \lambda_j)$ et $X_D(b, \lambda_j)$ ne prennent jamais d'autre valeur que $+1$ ou -1 , les expressions de la forme $1 \pm X_G(a, \lambda_j) \cdot X_D(b, \lambda_j)$ sont toutes positives et les expressions en facteur de la forme $X_G(a, \lambda_j) \cdot X_D(b, \lambda_j)$ sont égales à 1 en valeur absolue, donc d'après l'inégalité de la moyenne:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(a_1, b_1) - \mathbf{E}(a_1, b_2)| &\leq \sum_j p_j \left(1 \pm X_G(a_2, \lambda_j) \cdot X_D(b_2, \lambda_j) \right) + \\ &\quad + \sum_j p_j \left(1 \pm X_G(a_2, \lambda_j) \cdot X_D(b_1, \lambda_j) \right) \\ &\leq 2 \pm \left(\mathbf{E}(a_2, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_1) \right) \quad (XIII.3.) \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$|\mathbf{E}(a_1, b_1) - \mathbf{E}(a_1, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_1)| \leq 2 \quad (XIII.4.)$$

$$| -\mathbf{E}(a_1, b_1) + \mathbf{E}(a_1, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_1) | \leq 2 \quad (XIII.5.)$$

Cela reste évidemment vrai si on permute a_1 avec a_2 ou b_1 avec b_2 , donc on a forcément aussi

$$| \mathbf{E}(a_1, b_1) + \mathbf{E}(a_1, b_2) - \mathbf{E}(a_2, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_1) | \leq 2 \quad (XIII.6.)$$

$$| \mathbf{E}(a_1, b_1) + \mathbf{E}(a_1, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_2) - \mathbf{E}(a_2, b_1) | \leq 2 \quad (XIII.7.)$$

N'importe laquelle de ces quatre inégalités est appelée *inégalité de Bell*. Elles résultent donc mathématiquement des hypothèses préalables, à savoir que X_G et X_D sont des *fonctions* de λ et de l'orientation de l'analyseur respectif.

Le problème est maintenant que ces inégalités sont violées par la Mécanique quantique. Celle-ci prévoit en effet que $\mathbf{E}(a, b) = -\cos \theta$, où θ est l'angle entre les directions a et b . D'après la Mécanique quantique on aurait donc

$$Q = | \mathbf{E}(a_1, b_1) + \mathbf{E}(a_1, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_2) - \mathbf{E}(a_2, b_1) | \quad (XIII.8.)$$

$$= | \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 - \cos \theta_4 | \quad (XIII.9.)$$

où θ_1 est l'angle entre a_1 et b_1 , θ_2 l'angle entre a_1 et b_2 , θ_3 l'angle entre a_2 et b_1 , et θ_4 l'angle entre a_2 et b_2 . Choisissons alors ces quatre angles comme sur la figure 59.

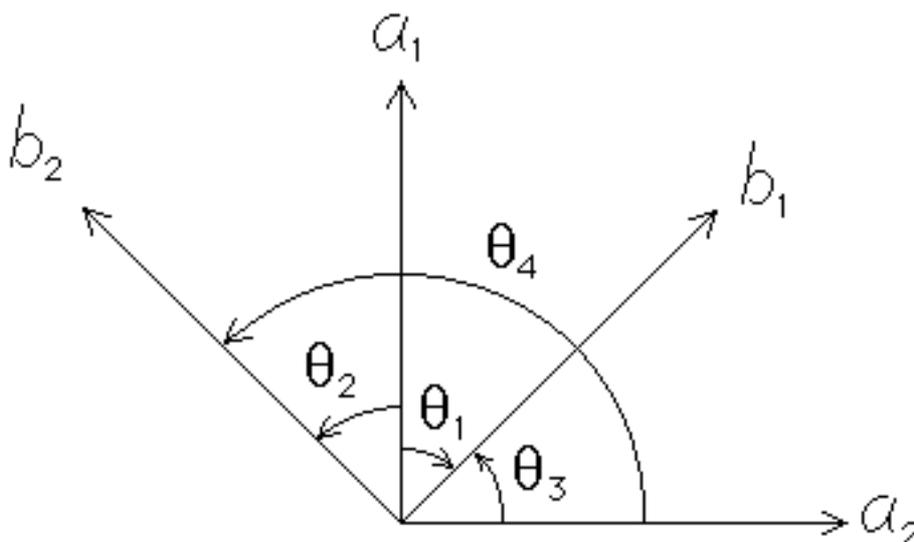


figure 59

Cette configuration particulière des quatre directions a_1 , a_2 , b_1 , et b_2 correspond au maximum de la combinaison XIII.9. des quatre cosinus. Dans cette configuration particulière on trouve que $Q = 2\sqrt{2}$. Or, d'après l'inégalité XIII.7, on devrait avoir $Q \leq 2$.

Nous ne présenterons pas ici une démonstration déductive du fait que $\mathbf{E}(a, b) = -\cos \theta$ à partir du formalisme de la Mécanique quantique. Mais indiquons-en les raisons. Par des considérations générales d'invariance, on peut conclure que les corrélations $\mathbf{E}(a, b)$ ne doivent dépendre que de l'angle θ entre les deux directions. Cela résulte simplement de ce que les résultats doivent être les mêmes si on tourne globalement tout le dispositif dans l'espace (sinon l'expérience distinguerait une direction privilégiée). Par ailleurs, d'après un principe de la Mécanique quantique appelé principe de correspondance, le spin de la particule doit s'identifier à un moment cinétique lorsqu'on prend sa moyenne sur un grand nombre de particules. C'est ce principe qui impose que la fonction de θ mentionnée soit obligatoirement $-\cos \theta$.

La nature se comporte comme le dit la Mécanique quantique, et non selon les hypothèses qui conduisent à l'inégalité de Bell. La discussion des conditions de l'expérience devrait maintenant nous permettre de voir ce qui est faux dans ces hypothèses. Puisque Bell les a exprimées sous une forme mathématique rigoureuse, il devrait être possible de trouver l'origine exacte de l'erreur. Deux conclusions possibles viennent immédiatement à l'esprit :

Possibilité N° 1. Nous avons supposé que $X_G(a, \lambda)$ ne dépendait pas de b , ni $X_D(b, \lambda)$ de a ; pour expliquer la violation de l'inégalité de Bell on pourrait donc admettre que X_G et X_D sont des fonctions de a et de b , $X_G(a, b, \lambda)$ et $X_D(b, a, \lambda)$. On peut en effet se convaincre facilement que la démonstration ci-dessus de l'inégalité ne marche plus quand X_G ou X_D dépend à la fois de a et de b .

Possibilité N° 2. Nous avons vu que l'hypothèse revenait à exclure toute action du hasard postérieure à la création de la paire ou à la fixation de l'orientation des analyseurs. On peut donc également renoncer à cela. Ainsi, si on exclut la possibilité N°1, la Mécanique quantique impliquerait que le hasard intervient *nécessairement* pendant que la particule traverse l'aimant, et l'expérience d'Aspect prouverait définitivement qu'il en est bien ainsi.

Il s'agit là des deux possibilités qui viennent le plus naturellement à l'esprit; du moins d'après ce qu'on peut en juger en voyant l'évolution historique du débat [je soutiens plutôt que l'erreur est dans l'hypothèse *non explicitement formulée* que les probabilités p_j qui interviennent dans XIII.1, XIII.2, et XIII.3, sont indépendantes de a et b ; cette hypothèse

fausse est cependant logique si on part du principe que les jeux sont faits au moment de la création des jumeaux]. Toutes les spéculations sans fin sur « l'influence » qu'exercerait chacun des deux analyseurs sur l'autre ont été inspirées par la prise en compte exclusive et *a priori*, sans effort critique, de la possibilité $N^{\circ}1$. Certes la possibilité $N^{\circ}2$ aurait permis une échappatoire, mais elle ne résoud rien. Avant d'entreprendre la discussion à la section suivante, voyons tout de suite pourquoi cela ne résoud rien.

C'est justement dans le but de tester la possibilité $N^{\circ}2$ que des extensions des hypothèses de Bell ont été étudiées dans les années 1970. Nous les rapportons ci-dessous sous la forme la plus générale possible.

Il s'agit de voir si on peut préserver la description par un état interne qui conserverait la corrélation entre les deux jumeaux sous la forme d'un paramètre λ , en renonçant à ce que souhaitait Einstein, c'est-à-dire en renonçant à l'idée que cet état interne détermine la déviation. Comme nous avons pu nous en convaincre, ce renoncement s'exprime par la possibilité $N^{\circ}2$, que le hasard intervienne une seconde fois pendant la traversée des aimants. Autrement dit, nous n'exigeons plus que le paramètre λ détermine le signe $+$ ou $-$ de la déviation, nous exigeons seulement encore qu'il détermine la loi de probabilité de ce signe. Bien entendu, la loi de probabilité en question dépend aussi de l'orientation de l'analyseur, *mais pas de celui traversé par l'autre jumeau*. Cela se traduira par l'indépendance stochastique entre tout événement relatif à l'analyseur de gauche et tout événement relatif à l'analyseur de droite.

Mathématiquement, on le formulera ainsi: pour une valeur de λ fixée, appelons $q(a, \lambda)$ la probabilité pour que la déviation dans l'aimant de gauche soit $-$, et $1 - q(a, \lambda)$ la probabilité pour que la déviation soit $+$. Autrement dit nous supposons maintenant que la fonction $X_G(a, \lambda)$ est toujours une fonction de a et λ , mais à valeurs aléatoires, de loi $\{+1, (1 - q) ; -1, (q)\}$. Si $\{\lambda_j, (p_j)\}$ est la loi de probabilité de λ , la règle des probabilités conditionnelles IV.4, dont nous avons vu qu'elle était indépendante de la manière dont le hasard intervenait, nous dit que la probabilité d'avoir le même signe de déviation pour les deux jumeaux est

$$\begin{aligned}
 P_+(a, b) &= & (XIII.10.) \\
 &= \sum_j \{ [1 - q(a, \lambda_j)][1 - q(b, \lambda_j)] + q(a, \lambda_j) q(b, \lambda_j) \} p_j
 \end{aligned}$$

En effet, cela est bien l'application de la règle IV.4 en prenant comme famille exhaustive d'événements les E_j : "la variable λ prend la valeur λ_j ". L'indépendance causale des événements relatifs à des analyseurs différents se traduit mathématiquement par l'indépendance stochastique, c'est-à-dire

Les corrélations E.P.R.

par les produits $[1 - q(a, \lambda_j)][1 - q(b, \lambda_j)]$ (probabilité d'avoir + à gauche et + à droite) et $q(a, \lambda_j)q(b, \lambda_j)$ (probabilité d'avoir - à gauche et - à droite). Enfin, la somme de ces produits exprime que les deux événements “+ à gauche et + à droite” et “- à gauche et - à droite” sont disjoints. Nous avons ainsi appliqué à la lettre les principes du Calcul des probabilités.

La loi $\{\lambda_j, (p_j)\}$ qui décrit le hasard pendant la création de la paire, et la loi des variables maintenant aléatoires $X_G(a, \lambda_j)$ et $X_D(b, \lambda_j)$ qui décrit une nouvelle intervention du hasard pendant la traversée de l'aimant, peuvent être absolument quelconques : la seule contrainte qu'on leur impose est d'être des lois de probabilité, c'est-à-dire que

$$(1) \quad \sum_j p_j = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } j: \quad p_j \geq 0$$

$$(2) \quad \text{pour tout } j \text{ et pour toute direction } a: \quad 0 \leq q(a, \lambda_j) \leq 1$$

On peut alors montrer que *sous cette seule contrainte*, les corrélations possibles issues de ces lois, $R(a, b) = P_+(a, b) - P_-(a, b)$, satisferont aussi l'inégalité de Bell. La démonstration est semblable à celle de Bell que nous avons donnée plus haut, elle n'en diffère que par une complication technique. Calculons en effet, comme nous l'avons fait en vue de l'inégalité de Bell proprement dite (cf. XIII.1), la corrélation $\mathbf{E}(a, b)$ dans ce nouveau cas. On a cette fois d'après XIII.10 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(a, b) &= P_+(a, b) - P_-(a, b) = && \text{(XIII.11)} \\ &= \sum_j \left\{ 1 - 2q(a, \lambda_j) - 2q(b, \lambda_j) + 4q(a, \lambda_j)q(b, \lambda_j) \right\} p_j \\ &= \sum_j \left\{ [1 - 2q(a, \lambda_j)] \cdot [1 - 2q(b, \lambda_j)] \right\} p_j \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que pour obtenir l'inégalité de Bell nous pouvons procéder exactement de la même manière que dans XIII.2 et XIII.3, en remplaçant formellement $X_G(a, \lambda_j)$ par $1 - 2q(a, \lambda_j)$ et $X_D(b, \lambda_j)$ par $1 - 2q(b, \lambda_j)$. En effet, en dehors du simple jeu combinatoire des a_1, a_2, b_1, b_2 qui se reproduit ici, la seule propriété des variables $X_G(a, \lambda_j)$ et $X_D(b, \lambda_j)$ qui intervenait était d'être dans l'intervalle $[-1, +1]$. Or puisque $q(a, \lambda_j)$ et $q(b, \lambda_j)$ sont des *probabilités*, elles sont comprises entre 0 et 1, donc les quantités $1 - 2q(a, \lambda_j)$ et $1 - 2q(b, \lambda_j)$ seront comprises entre -1 et +1, ce qui suffit à entraîner les différentes inégalités de Bell.

Autrement dit, la possibilité N°2 est incompatible avec les faits.

On voit que l'inégalité de Bell sera vérifiée dès lors que la corrélation $\mathbf{E}(a, b)$ peut s'écrire sous la forme $\sum_j f(a, j) f(b, j) p_j$ où les p_j sont ≥ 0 et

tels que $\sum_j p_j = 1$, et où la fonction $(a, j) \mapsto f(a, j)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1, +1]$. Les quantités p_j peuvent être n'importe quoi, de même que les $f(a, j)$: pourvu qu'elles vérifient ces conditions, l'inégalité de Bell aura lieu. Ceci est *indépendant de toute interprétation* des quantités p_j et $f(a, j)$.

Comme il s'agit d'une corrélation de signes, on peut toujours la décomposer en $\mathbf{E}(a, b) = P_{a,b}(++) + P_{a,b}(--) - P_{a,b}(+-) - P_{a,b}(-+)$, où $P_{a,b}(++)$ désigne la probabilité d'avoir le signe + dans les deux analyseurs, $P_{a,b}(+-)$ celle d'avoir + dans l'analyseur de gauche et - dans celui de droite, etc. Ces probabilités dépendent comme il se doit des directions a et b . Il est facile de vérifier que si on a

$$\begin{aligned} P_{a,b}(++) &= \sum_j P_a(+|j) P_b(+|j) p_j \\ P_{a,b}(+-) &= \sum_j P_a(+|j) P_b(-|j) p_j \\ P_{a,b}(-+) &= \sum_j P_a(-|j) P_b(+|j) p_j \\ P_{a,b}(--) &= \sum_j P_a(-|j) P_b(-|j) p_j \end{aligned} \quad (XIII.12.)$$

alors on aura

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(a, b) &= \sum_j \left\{ P_a(+|j) P_b(+|j) - P_a(+|j) P_b(-|j) - \right. \\ &\quad \left. - P_a(-|j) P_b(+|j) + P_a(-|j) P_b(-|j) \right\} p_j \\ &= \sum_j [P_a(+|j) - P_a(-|j)] [P_b(+|j) - P_b(-|j)] p_j \end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme $\sum_j f(a, j) f(b, j) p_j$ avec $f(a, j) = P_a(+|j) - P_a(-|j)$. Si les nombres $P_a(+|j)$, $P_a(-|j)$, $P_b(+|j)$, et $P_b(-|j)$ sont compris entre 0 et 1, les nombres $f(a, j) = P_a(+|j) - P_a(-|j)$ et $f(b, j) = P_b(+|j) - P_b(-|j)$ seront, eux, compris entre -1 et +1; si en outre les p_j sont tous compris entre 0 et 1 et tels que $\sum_j p_j = 1$, l'inégalité de Bell sera *forcément* vérifiée, indépendamment de toute interprétation des quantités p_j , $P_a(\pm|j)$, $P_b(\pm|j)$.

Il se trouve maintenant que (XIII.12) peut s'interpréter comme la formule des probabilités conditionnelles IV.4, avec la famille exhaustive d'événements $E_j : \{\lambda = \lambda_j\}$. Il y a toutefois un détail spécifique: les probabilités conditionnelles $P_{a,b}(++|E_j)$, $P_{a,b}(+-|E_j)$, etc, ont été décomposées sous la forme $P_{a,b}(++|E_j) = P_a(+|j) \cdot P_b(+|j)$, etc. Cela semble logique car c'est la propriété du produit qui caractérise l'indépendance stochastique,

censée refléter ici l'indépendance causale entre ce qui se passe dans chacun des deux analyseurs.

La relation purement formelle et indépendante de toute interprétation qui conduit de (XIII.12) à l'inégalité de Bell montre que si cette dernière est fautive, c'est qu'il y a quelque chose de faux dans (XIII.12). Or il reste encore des hypothèses suspectes.

Possibilité N°3. Est-il légitime d'appliquer la propriété du produit $P_{a,b}(++|E_j) = P_a(+|j) \cdot P_b(+|j)$, etc ?

Possibilité N°4. Est-il légitime d'appliquer la formule des probabilités conditionnelles avec une famille exhaustive E_j ?

Possibilité N°5. Est-il légitime de supposer que les probabilités p_j sont *indépendantes* des directions a et b ?

XIII. 3. Discussion.

Dans cette discussion, nous laisserons de côté la question de savoir si la formulation mathématique de Bell correspond bien à l'idée que se faisaient Einstein, Podolski, et Rosen. Cela est sans importance pour nous ici, puisque nous discutons le paradoxe E.P.R. uniquement pour mieux comprendre la vraie nature de la causalité et des probabilités, et non dans un but de recherche historique. Ce que nous devons comprendre est la signification exacte des hypothèses de Bell, et par contrecoup, la signification exacte des probabilités qui interviennent, aussi bien dans les hypothèses fausses de Bell que dans les corrélations vraies prédites par la Mécanique quantique.

Il s'agit simplement de passer en revue les hypothèses, explicites ou non, qui permettent la démonstration, exposée ci-dessus, des inégalités de Bell. Commençons donc par la possibilité N°1. Elle est surprenante. Elle revient à admettre que la traversée d'un analyseur par un jumeau est influencée par la position de l'autre analyseur, ce qui est une violation flagrante de la causalité. En effet, dire que pour une valeur λ_j de λ , le signe X_G de la déviation dépend aussi de b implique une influence. Or on ne peut échapper au raisonnement suivant : "les deux jumeaux sont rigoureusement symétriques et ignorent l'orientation que prendra l'analyseur de Stern-Gerlach ou le polariseur d'Aspect lorsqu'ils le traverseront. Comme ces analyseurs sont très éloignés l'un de l'autre (14 m. dans l'expérience d'Aspect), la mesure sur un jumeau ne peut pas influencer la mesure sur l'autre. Or, les corrélations en $-\cos\theta$ prouvent le contraire, etc." Une telle influence à distance contredit le principe de Relativité selon lequel aucune influence ne peut se propager plus vite que la lumière ; c'est sans aucun doute la raison pour laquelle Einstein a eu tant de mal à l'accepter. Dans l'une des versions

de l'expérience d'Aspect les polariseurs ont été spécialement équipés de commutateurs optiques capables de modifier l'orientation en 10^{-8} secondes, de sorte que si cette modification se produit à droite à un instant t , un signal se déplaçant à la vitesse de la lumière ne pourra atteindre l'autre polariseur situé à 14 mètres de là que $5 \cdot 10^{-8}$ secondes plus tard; par conséquent, si la commutation d'orientation a eu lieu à droite après la création de la paire de photons jumeaux, mais *avant* que le jumeau de droite ait traversé le polariseur, le signal apportant l'information du changement arrivera à gauche *après* que le jumeau de gauche ait traversé le polariseur, c'est-à-dire trop tard.

Reprenez un instant la démonstration de l'inégalité de Bell: vous constatez aisément qu'elle ne marche plus si on suppose que la fonction $X_G(a, \lambda)$ dépend aussi de b , ou que la fonction $X_D(b, \lambda)$ dépend aussi de a .

Or dire que X_G dépend de b est évidemment l'expression mathématique d'une influence de l'orientation à droite sur ce qui se passe à gauche. D'où le surgissement, comme l'écrit François Lurçat (voir note 5 ci-après), "d'images fantastiques: les deux grains de poussière seraient couplés par une interaction physique de type nouveau, inconnu. Certains physiciens sont allés jusqu'aux conséquences les plus déraisonnables: par exemple de vouloir donner un fondement physique à la parapsychologie, avec la transmission de pensée, etc..."

Il y a pourtant d'autres façons de saboter la démonstration des inégalités de Bell: la possibilité $N^{\circ}2$ ne le permettant pas, il reste les possibilités $N^{\circ}3$, $N^{\circ}4$, et $N^{\circ}5$ que nous soumettons maintenant à la critique.

La possibilité $N^{\circ}3$ n'est qu'une extension de la possibilité $N^{\circ}1$. En effet, en supposant que les probabilités conditionnelles $P_{a,b}(++|E_j)$ sont le produit $P_a(+|j) \cdot P_b(+|j)$, on exprime l'hypothèse d'une indépendance stochastique entre les analyseurs, on nie la possibilité d'une influence de l'un sur l'autre. Sans cette hypothèse d'indépendance, la démonstration des inégalités de Bell ne marche plus et la théorie devient donc compatible avec les faits quantiques; le prix à payer pour cela est l'acceptation d'une mystérieuse influence. C'est la même chose qu'avec la possibilité $N^{\circ}1$, sauf qu'on admet en plus une seconde intervention du hasard pendant la traversée des analyseurs.

Signalons au passage que cette expression: «pendant la traversée des analyseurs» devrait être proscrite, car ce n'est pas la Mécanique quantique, mais les préjugés classiques qui font imaginer une trajectoire dont une partie comporterait la traversée d'un analyseur. Le phénomène quantique qui se produit n'est pas censé être divisible en morceaux. Nous y reviendrons plus

loin, pour le moment ne nous dispersons pas.

Pour quelqu'un qui reste accroché aux idées classiques et refuse la philosophie quantique, la possibilité $N^{\circ}3$ est sans intérêt; en effet, la possibilité $N^{\circ}1$ empêche tout aussi bien les inégalités de Bell, mais sans postuler une seconde intervention du hasard. Quant à l'inconvénient — admettre une influence —, il subsiste dans les deux cas. Autant choisir la possibilité $N^{\circ}1$.

J'ai gardé pour la fin l'examen des possibilités $N^{\circ}4$ et $N^{\circ}5$, car elles ne permettent pas (contrairement à 1 et 3) de sauver les apparences classiques.

Voyons ce que donne l'examen de la possibilité $N^{\circ}4$. La formule des probabilités conditionnelles s'applique-t-elle vraiment? Ce n'est pas une évidence. Dans tous les cours d'initiation à la Mécanique quantique on discute l'expérience des trous de Young⁽⁴⁾ et on montre que si on considère les deux événements (qui justement n'en sont pas) E_j : "la particule est passée par le trou $N^{\circ}j$ " ($j = 1$ ou 2), et qu'on applique la formule des probabilités conditionnelles, on obtient un résultat faux.

Dans cet ouvrage nous avons présenté un formalisme pour le Calcul des probabilités, basé sur l'espace des épreuves équiprobables et une notion d'événement représenté par un sous-ensemble. Cela s'applique fort bien à un grand nombre de problèmes variés, même quantiques. Mais dans l'expérience des trous de Young, pour que les faux événements E_j : "la particule est passée par le trou $N^{\circ}j$ " puissent en être de vrais, il eût fallu qu'ils soient deux sous-ensembles complémentaires d'un espace des épreuves. Or on est absolument incapable de dire ce que seraient dans ce cas les épreuves! On succombe simplement à l'habitude du langage courant. Nous avons observé en **IV.4** que la formule des probabilités conditionnelles pouvait s'appliquer en ignorant tout de l'espace Ω ; nous l'avons alors appliquée à un problème de génétique (les mariages consanguins) dans lequel nous étions également incapables de dire ce qu'étaient les épreuves. Mais le fait que *ça marche* justifiait a posteriori le procédé. Cela marche parce que la combinaison des chromosomes s'effectue dans l'espace et est donc semblable aux combinaisons de boules. Dans le cas des événements E_j : "la particule est passée par le trou $N^{\circ}j$ ", cela ne marche pas. On aurait pu croire que l'hypothèse d'un espace des épreuves n'était nécessaire que pour démontrer la formule des probabilités conditionnelles, et qu'une fois celle-ci obtenue on pourrait enlever l'hypothèse comme les maçons enlèvent l'échafaudage une

⁽⁴⁾ La discussion qui va suivre suppose connue du lecteur au moins la leçon classique d'introduction à la Mécanique quantique, qui en principe fait partie de la culture générale. Voir par exemple R. P. Feynman *Mécanique quantique*, chapitre **I**.

fois le mur construit. Toutefois l'exemple de la Mécanique quantique est là pour montrer que la parabole de l'échafaudage n'est pas toujours juste : dans les mécanismes de l'hérédité, tout se passe comme s'il y avait un espace Ω , bien qu'on soit incapable de le trouver ; dans le cas des pseudo-événements E_j , cela *ne se passe pas comme si*.

L'expérience des trous de Young n'exclut pourtant pas toujours que les E_j soient de véritables événements auxquels on puisse appliquer la formule des probabilités conditionnelles : il suffit pour cela de modifier le dispositif expérimental de telle sorte que la particule puisse être détectée dans les trous. La Mécanique quantique dit alors que les E_j , définis sous la forme plus explicite "la particule est détectée dans le trou $N^{\circ}j$ " sont de véritables événements ; dans ce cas on peut leur appliquer la formule des probabilités conditionnelles.

Quelle est la différence ? Du point de vue de la Physique, les résultats sont changés, et cela n'a rien de paradoxal puisqu'on a modifié le dispositif expérimental. Mais nous voudrions savoir dans quels cas un événement décrit par une phrase entre guillemets du langage courant est réellement représentable sous la forme d'un ensemble d'épreuves équiprobables et dans quels cas il ne l'est pas. Pour répondre à cette question on ne peut que répéter encore ce que Heisenberg et Bohr⁽⁵⁾ se sont tués à dire (mais en le traduisant dans le langage du présent ouvrage) : pour qu'un événement comme "la particule est passée par le trou $N^{\circ}j$ " soit un véritable événement, il faut que le "passage par le trou" soit un phénomène physiquement réel. Or dans la nature (selon la Mécanique quantique), un phénomène est réel s'il laisse une trace objective, c'est-à-dire si quelque part un atome ou un électron a eu son état modifié par suite du phénomène. Si un atome situé sur le bord du trou $N^{\circ}j$ a eu son état modifié par suite du passage de la particule, alors l'événement E_j est un véritable événement ; mais dans un tel cas, si on reproduit l'expérience un grand nombre de fois pour observer la distribution statistique des particules ayant ainsi traversé les trous en laissant une trace objective de leur passage, on ne verra aucune figure d'interférence. La trace du passage doit exister *objectivement*, il n'est donc

⁽⁵⁾ Les articles originaux de référence sont Werner Heisenberg *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik* (Zeitschrift für Physik, vol. **43**, 1927, pages 172 – 198) et Niels Bohr *Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik* (Naturwissenschaften, vol. **16**, 1928, pages 245 – 271). Ensuite Bohr s'est plusieurs fois exprimé à nouveau ; avec le recul du temps, et jusqu'à sa mort il a clarifié ses interprétations, qu'on trouvera dans le recueil classique : Niels Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine*, Gauthier-Villars, Paris, 1972. Enfin, les idées qui sont développées dans tous ces articles historiques sont très bien expliquées dans le livre de François Lurçat *Niels Bohr et la Physique quantique*, Éd. du Seuil, Paris, 2001, coll *Points Sciences*.

Les corrélations E.P.R.

pas nécessaire qu'un observateur l'ait remarquée : si on n'a rien détecté à proximité des trous, mais que la figure d'interférence est absente, on peut *en déduire* qu'une trace inconnue du passage a dû être laissée quelque part. Inversement, si la figure d'interférence est présente, on peut en déduire qu'aucune trace objective du passage à travers l'un ou l'autre des trous n'a été laissée, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune *réalité* correspondant à l'idée "la particule est passée par l'un ou l'autre des trous". Et si cette idée ne correspond à aucune réalité, il ne peut pas non plus lui correspondre une épreuve. Nous avons commencé cet ouvrage en parlant (métaphoriquement) du *niveau où intervient le hasard* pour désigner la nature des épreuves parmi lesquelles la Fortune choisit. Nous pouvons ici ajouter une précision : pour qu'une épreuve puisse être choisie par la Fortune dans le monde réel, il faut que cette épreuve soit un phénomène réalisable. Cette précision allait sans dire pour des problèmes de boules, mais ne va plus du tout sans dire pour des phénomènes quantiques. Toute la difficulté provient de ce qu'une perception correcte de la réalité est requise. Quelqu'un qui voudrait déterminer un espace des épreuves relatif à l'expérience des trous de Young devrait chercher l'ensemble des manières de laisser une trace et ne pourrait donc pas ignorer le rôle joué par les atomes de l'écran. Sans doute devrait-il, pour accomplir complètement ce travail, aller au delà de la Physique connue actuellement. L'intuition héritée de la Physique classique nous pousse tout au contraire à nous représenter les épreuves sous la forme des trajectoires possibles pour une particule ponctuelle dans l'espace (trajectoires qui dans le cas des trous de Young passeraient par l'un des trous). De là vient l'illusion que la phrase "la particule passe par le trou $N^{\circ}j$ " représente un événement : cette phrase représente bien un ensemble de trajectoires, mais pas un ensemble de traces pouvant être laissées *réellement* par la particule dans son environnement matériel. Elle est en réalité autant dépourvue de sens concret que la phrase "le dé marque $\pi\sqrt{2}$ points".

Revenons à l'expérience *E.P.R.* et à la discussion basée sur l'inégalité de Bell. Cette inégalité a été démontrée en utilisant la formule des probabilités conditionnelles. On a donc admis implicitement que, même si l'espace Ω n'est pas connu (de sorte que la loi de la variable aléatoire λ ne pourrait être calculée a priori, mais seulement mesurée par des statistiques), du moins tout se passe comme s'il en existait un. Nous avons discuté ce principe à la section 4.4 ("Relativité du hasard"), et remarqué qu'il s'appliquait parfaitement au problème des mariages consanguins. Mais le fait qu'il s'applique n'est pas prouvé par nos calculs : il est prouvé par l'observation de la réalité.

Lorsque nous disons que le signe de la déviation par les aimants est

une fonction de a (l'orientation de l'aimant) et de λ (la variable aléatoire qui représenterait l'état de la particule), nous émettons implicitement une hypothèse très forte, à savoir que cette règle s'applique; or l'expérience des trous de Young est là pour montrer qu'elle ne s'applique pas toujours. La Mécanique quantique nous dit que l'événement $E_j: \{\lambda = \lambda_j\}$ ("la variable aléatoire λ prend la valeur particulière λ_j ") n'est un événement réel que si le fait que λ prenne la valeur particulière λ_j se traduit quelque part par une trace objective. On ne peut appliquer la règle des probabilités conditionnelles qu'à des événements réalisables. De quel droit en effet pourrions nous affirmer que si une phrase exprimée en langage imagé semble avoir un sens (pour des points imaginaires que nous nous représentons dans l'espace en fermant les yeux), il y aura nécessairement des épreuves réelles qui lui correspondent? À quelles épreuves réelles peut correspondre la phrase "le dé marque un nombre de points compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ "? Que donnerait un calcul utilisant la règle des probabilités conditionnelles, si l'on considère la famille exhaustive d'événements $E_j: \text{"le dé marque un nombre de points compris entre } \sqrt{j} \text{ et } \sqrt{j+1}"$ ($j = 0, 1, 2 \dots 35$) et en posant $\mathcal{P}(E_j) = \frac{1}{6}(\sqrt{j+1} - \sqrt{j})$?

Certains auteurs avides de sensation ont proclamé (à la suite des discussions sur ces phénomènes étranges) que "la réalité n'existe donc pas". Mais conclure que la réalité n'existe pas repose sur le raisonnement par l'absurde "si la réalité existait, elle serait décrite par la variable λ , or ...". On pourrait par le même raisonnement conclure à l'inexistence de la réalité chaque fois que celle-ci ne se plierait pas entièrement à une représentation mathématique prédéfinie (et ce raisonnement idiot a été tenu plus d'une fois, déjà bien avant la Mécanique quantique). Une telle affirmation n'a strictement aucun sens en l'absence d'une définition préalable, précise et opératoire, du mot réalité⁽⁶⁾. Au contraire la Mécanique quantique rend plus forte et plus rigoureuse la notion de réalité: elle montre qu'un événement réel est ce qui laisse quelque part une trace matérielle, même si celle-ci échappe à l'observateur humain. Elle fournit même un moyen concret de savoir si un événement se produit réellement (par exemple si des atomes situés à proximité de l'un des trous de Young subissent un changement d'état au passage de la particule): il suffit de constater statistiquement, dans un montage adéquat, qu'une figure d'interférence s'estompe. De toute façon nous sommes ici dans un ouvrage sérieux et n'avons pas à discuter les sophismes d'auteurs à sensation. La question qui nous intéresse est de savoir quelles sont les conditions de validité du paradigme de l'espace des épreuves.

⁽⁶⁾ Notons qu'Einstein, Podolski, et Rosen ont, justement, proposé dans leur article une telle définition précise, opératoire, et réfutable; et on peut déduire de l'expérience que cette définition a été réfutée.

Les corrélations E.P.R.

On voit que les phénomènes quantiques sont une magnifique illustration du mauvais usage qu'on peut en faire; non que la règle $\mathcal{P}(A) = \#A / \#\Omega$ puisse dans certains cas être fautive, mais les épreuves doivent correspondre à des possibilités réelles et non à des extrapolations purement imaginaires de nos perceptions.

Prenons encore un exemple. Tout au début de l'ouvrage, nous avons examiné (cf. **I.2**, premier exemple) les répartitions possibles de trois boules dans deux boîtes. Selon la statistique de Bose, il n'y avait que quatre épreuves possibles (les modes d'occupation) et si on comparait aux huit distributions classiques, on pouvait concevoir les événements

E : "particule $N^\circ 1$ dans boîte \mathcal{A} , particules $N^\circ 2$ et $N^\circ 3$ dans boîte \mathcal{B} "

F : "particule $N^\circ 2$ dans boîte \mathcal{A} , particules $N^\circ 1$ et $N^\circ 3$ dans boîte \mathcal{B} "

G : "particule $N^\circ 3$ dans boîte \mathcal{A} , particules $N^\circ 1$ et $N^\circ 2$ dans boîte \mathcal{B} "

dont la réunion constituerait le mode d'occupation "une particule dans la boîte \mathcal{A} , deux particules dans la boîte \mathcal{B} ". Mais ces événements ne sont pas réels; nous les avons rêvés. Pour qu'ils soient réels, il faudrait qu'il existe objectivement un moyen de distinguer les trois particules. Un tel moyen existe pour les boules, même si elles sont absolument identiques: ce sont leurs trajectoires dans l'espace. Nous avons insisté sur la possibilité de calculer des probabilités sans connaître l'espace des épreuves, en recourant à la règle des probabilités conditionnelles, et illustré cela sur un exemple issu de la génétique. Mais si nous voulions appliquer cette règle avec les événements E, F, G ci-dessus, en écrivant

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X | E) \cdot \mathcal{P}(E) + \mathcal{P}(X | F) \cdot \mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(X | G) \cdot \mathcal{P}(G),$$

et en attribuant à chacun des événements E, F, G une probabilité égale par exemple au tiers de celle du mode d'occupation, nous aboutirions facilement à des résultats faux (c'est-à-dire contredits par l'expérience). Pourtant il a été possible de déterminer un espace des épreuves réel, celui des modes d'occupation. Nous avons vu en **II.5** que les modes d'occupation peuvent être décrits par des représentations spatiales (par exemple les graphiques formés de \circ et de $|$), alors que l'*individualité* des particules de Bose ne correspond à aucune représentation spatiale. Un ensemble fini comme Ω peut toujours être représenté par des ensembles de points sur du papier ou à défaut, si son cardinal est trop grand, être imaginé avec notre intuition de l'espace. Cela ne semble pas être toujours le cas pour la réalité quantique.

L'expérience d'Aspect montre que la formulation mathématique qui conduit à l'inégalité de Bell ne correspond pas à la réalité. C'est tout ce qu'elle montre réellement. Ce n'est pas tant le Calcul des probabilités

qui trouve là ses limites, que la manière toujours spatiale de concevoir les épreuves. Certes, on pourrait conserver une description mathématique qui tiendrait pour réels des événements tels que $E_j: \{\lambda = \lambda_j\}$, en recourant à la possibilité $N^{\circ}1$ pour compenser la différence entre la réalité quantique et les illusions de nos représentations: la variable aléatoire $X_G(a, \lambda)$ dépendrait aussi de b et deviendrait $X_G(a, b, \lambda)$. Mais il semble clair que ce schéma ne serait qu'un artifice, car l'erreur est plus profonde. Tout comme les événements "la particule est passée par le trou $N^{\circ}j$ ", les événements " $\lambda = \lambda_j$ " ne correspondent à aucun phénomène réel; ce qui est réel est le résultat observé *après* la traversée des deux analyseurs, et il est logique que cela dépende des directions a et b (en fait de θ). Un événement " $\lambda = \lambda_j$ " qui se serait produit avant que a et b n'aient été fixées est un fantôme et non un phénomène. Tout d'abord, l'idée d'une influence non causale (remontant le temps ou voyageant plus vite que la lumière) est difficilement acceptable. A priori et dans l'absolu, on ne peut toutefois pas plus écarter cette éventualité que le fluide de Kepler (cf. la fin du chapitre **XII**), la force gravitationnelle de Newton, ou l'éther de Maxwell. Mais s'agit-il vraiment d'une influence ?

Newton a lui-même insisté sur le fait que la force n'est qu'une représentation intellectuelle et que seule la loi quantitative en $1/r^2$ était objective. Maxwell a écrit cela de la même façon à propos de l'éther. On pourrait dire ici aussi que cela ne coûte rien d'imaginer intellectuellement une influence qui se propage d'un aimant à l'autre pour favoriser l'un des sens de déviation au détriment de l'autre: seule serait objective, de toute façon, la loi quantitative des corrélations en $-\cos\theta$. Cela nous ramène encore à la discussion sur la nature de la causalité à la fin du chapitre **XII**. La phrase célèbre de Galilée "Le monde est un livre écrit par le Créateur, et la langue dans laquelle il est écrit est la Géométrie" peut également s'interpréter dans le même sens: pour dire ce qu'est un fluide ou une force il faut recourir à l'expérience subjective, par exemple la sensation qu'on éprouve en tirant sur une corde pour hisser un objet lourd; le langage humain exprime ces sensations. Mais la langue du Grand Livre ne les exprime pas, d'autant moins que ce livre était déjà écrit avant qu'il y ait des êtres vivants pour éprouver lesdites sensations. Donc $m\vec{\gamma} = -K\vec{r}/r^3$ ou $R = -\cos\theta$ sont pour Galilée des phrases du langage de l'univers, mais les représentations imagées d'un ange qui pousserait les planètes pour les rapprocher du Soleil ou d'un signal émis par l'un des aimants pour aller informer l'autre sur son orientation n'en sont pas.

J'ai gardé pour la fin la discussion de la possibilité $N^{\circ}5$. D'un point de vue purement mathématique, on voit bien que la démonstration de l'inégalité de Bell ne fonctionne plus si les probabilités p_j dépendent de a et b . Notons

Les corrélations E.P.R.

tout de suite que les p_j ne peuvent pas être des fonctions de a seul, ni de b seul : cela contredirait la symétrie du problème. Quand il s'agissait de X_G ou X_D , postuler que X_G est une fonction de a seul était cohérent, puisque la valeur de X_G était censée ne concerner que le jumeau de gauche, qui ne traverse pas l'analyseur de droite. Quant aux p_j , soit ils concernent seulement la création de la paire de jumeaux *avant* toute approche des analyseurs (et alors il est raisonnable de les supposer indépendants de a et b), soit ils concernent l'ensemble du processus (et alors ils doivent dépendre, et symétriquement, de a et b). En fait, comme le résultat de l'expérience ne saurait dépendre non plus de l'orientation globale du dispositif, les p_j doivent être des fonctions de l'angle θ entre a et b .

Mais que signifie concrètement cette hypothèse purement mathématique que les p_j sont des fonctions de l'angle θ ? Que traduit-elle?

En précisant les hypothèses du théorème de Bell, nous avons insisté sur le fait que la variable λ reçoit ses valeurs du hasard *au moment de la création de la paire*, et que ce choix du hasard détermine entièrement la suite des événements. C'est ce qui avait été retenu par la possibilité N°1. En admettant maintenant que la loi p_j de cette variable λ dépend de l'angle θ , on jette cette hypothèse aux orties. Considérer les p_j comme des fonctions de θ , c'est admettre que la variable λ est déterminée dès le départ par l'ensemble du dispositif. C'est donc admettre que le phénomène observé ne se décompose pas en plusieurs parties, dont la première, disons la partie $P1$, serait la création de la paire dans un environnement spatio-temporel isotrope (le voisinage immédiat du point O), la partie $P2$ la propagation du jumeau de gauche et la partie $P3$ celle du jumeau de droite, puis enfin les parties $P4$ et $P5$ qui seraient respectivement la traversée de l'analyseur de gauche par le jumeau de gauche et la traversée de l'analyseur de droite par le jumeau de droite. On pourrait ajouter les parties $P6$ et $P7$ correspondant aux processus qui sont à l'oeuvre dans les analyseurs et qui les conduisent à dévier les particules qui les traversent. C'est cette décomposition du phénomène en parties qui exprime le mieux les présupposés de la Mécanique classique : on imagine les jumeaux comme des «grains de poussière» qui à chaque instant peuvent être localisés quelque part dans l'espace, et alors on peut parler du «moment où ils sont encore au voisinage du point O », du «moment où ils sont en route vers l'analyseur», du «moment où ils traversent l'analyseur» . . .

Or tout cela a été inventé de toutes pièces par l'homme, et rajouté à ce que dit la nature. La leçon tirée par Niels Bohr de l'aventure quantique, c'est que les phénomènes comme celui que nous discutons ne sont pas divisibles.

Personne n'a jamais vu la création de la paire, ni vu les particules en route vers un analyseur ou un détecteur ; ce qu'on a vu, c'est un signal électrique

envoyé par un détecteur vers un galvanomètre, aujourd'hui vers une carte de conversion analogique-digital; ou bien la décomposition d'une molécule de bromure d'argent en argent métallique dans une émulsion photographique, aujourd'hui la saturation d'un pixel C.C.D.

Il existe sans doute une vérité cachée qui explique «ce qu'on voit». Mais nous n'avons pas encore les moyens de l'appréhender, ni observationnellement, ni conceptuellement. Cela exige une certaine modestie: il ne s'agit pas de «positivisme», il s'agit de critiquer des préjugés.

Revenons encore à l'examen de la possibilité $N^{\circ}5$. En postulant que la loi p_j dépend de l'angle θ , on exclut la divisibilité du phénomène. C'est justement là un des enseignements de Niels Bohr. Dans un texte de 1954 (*Unité de la connaissance*)⁽⁷⁾, Bohr écrivit ceci:

(...) il est en effet plus correct, dans une description objective, de ne se servir du mot de phénomène que pour rapporter des observations obtenues dans des conditions parfaitement définies, dont la description implique celle de tout le dispositif expérimental. Avec cette terminologie le problème de l'observation en physique quantique perd toute complexité particulière. De plus, elle nous rappelle directement que tout phénomène atomique est «définitivement clos», en ce sens que son observation est fondée sur des enregistrements obtenus au moyen de dispositifs d'amplification au fonctionnement irréversible, tels que les traces permanentes laissées sur une plaque photographique par des électrons pénétrant dans l'émulsion.

John Archibald Wheeler, qui eut des discussions approfondies avec Bohr dans les années 1950, en garda une sentence qu'il répéta d'innombrables fois:

“No elementary quantum phenomenon is yet a phenomenon until it is a registred phenomenon, brought to a close by an irreversible act of amplification.”

“Un phénomène quantique élémentaire n'est pas encore un phénomène tant qu'il n'est pas un phénomène enregistré, amené à bonne fin par un processus d'amplification irréversible.

Comment le langage abstrait du Calcul des probabilités, développé dans le présent ouvrage, peut-il traduire une assertion aussi matérialiste? À mon avis, en posant que la loi p_j dépend d'emblée de l'ensemble du dispositif expérimental, ou plus exactement des paramètres qui en décrivent le modèle idéalisé; ici c'est le paramètre angulaire θ .

Bien entendu, c'est la dépendance de p_j par rapport à a et b qui sabote la démonstration du théorème de Bell, car dans la combinaison $\mathbf{E}(a_1, b_1) - \mathbf{E}(a_1, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_1)$ les coefficients p_j sont différents

⁽⁷⁾ Voir *Physique atomique et connaissance humaine* (déjà cité à la note 5), page 110.

dans chacun des quatre termes. Que devait signifier l'hypothèse que p_j est indépendant de a et b ? Tout simplement que la première partie du phénomène, que nous avons désignée plus haut par $P1$, est reproductible entre les quatre mesures (a_1, b_1) , (a_1, b_2) , (a_2, b_1) , (a_2, b_2) . L'inégalité de Bell exprime ainsi l'hypothèse que

- a) le phénomène est divisible en parties;
- b) l'une de ces parties est reproduite à l'identique bien qu'on change les orientations a et b .

Or la Mécanique quantique dit que le phénomène n'est pas divisible, qu'en refaisant les mesures avec d'autres orientations, on ne reproduit pas le phénomène à l'identique, et qu'il n'existe pas une partie du phénomène qui, elle, serait reproduite à l'identique.

Voilà l'erreur.

Un dernier point pour que la discussion soit complète : supposer que les p_j dépendent de θ suffit pour saboter la démonstration des inégalités de Bell ; il n'y a pas besoin en outre de supposer que $X_G(a, \lambda)$ est aussi fonction de b (et $X_D(b, \lambda)$ fonction de a). On conserve alors l'expression mathématique du fait qu'il n'y a pas d'influence exercée entre les analyseurs. Ce à quoi on renonce, c'est la division du phénomène. On n'a donc pas besoin de l'image fantastique de «deux grains de poussière qui seraient couplés par une interaction physique de type nouveau, inconnu». Postuler des fonctions $p_j(\theta)$ n'exprime pas une influence d'un analyseur sur l'autre, mais que la variable λ , pour peu qu'elle ait un sens, n'est pas fixée (par le hasard ou par ce qu'on voudra) au début du phénomène — il n'y a pas de début du phénomène — mais pendant tout son déroulement.

XIII. 4. Un modèle géométrique.

Peut-être la discussion a-t-elle été jusqu'ici trop mathématique pour montrer à quel point la possibilité $N^{\circ}1$ est conditionnée par de simples habitudes de pensée. La démonstration de l'inégalité de Bell est en effet mathématique et abstraite ; cependant elle reflète fidèlement le mode de pensée enseigné dans cet ouvrage ; tous les stéréotypes que je me suis efforcé d'inculquer au lecteur y sont mis en oeuvre. Les faits expérimentaux sont là pour montrer que leur validité n'est pas universelle, mais l'excès d'abstraction mathématique peut encore servir de tampon ou d'écran et protéger un certain nombre d'idées fausses. Pour mieux percevoir le sens de l'inégalité de Bell, nous allons construire un modèle géométrique.

Reprenons une à une les caractéristiques vraiment essentielles de l'expérience E.P.R. Chacun des deux aimants ne se caractérise que par son

orientation: seule intervient la direction du champ magnétique et de son gradient, tout le reste n'est que du décor. Par conséquent la représentation schématique la plus simple de ces aimants est une simple flèche indiquant cette direction. Pour rendre la représentation plus imagée on imaginera un disque divisé en deux par un diamètre dont on peut distinguer les deux extrémités: par exemple on marquera N (nord) l'une des extrémités et S (sud) l'autre: voir figure 60.

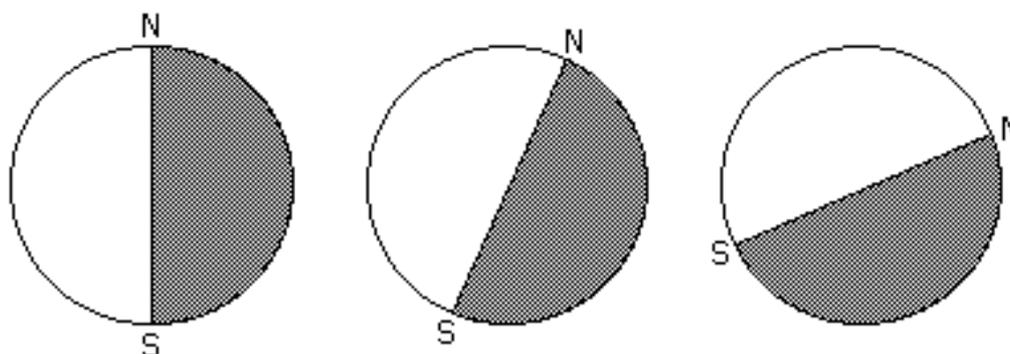


figure 60

Supposons que le spin de chaque particule soit déterminé par un état interne qui serait une direction dans l'espace; le paramètre décrivant un tel état serait donc un angle φ , compris entre 0 et 2π . Cet angle serait "choisi au hasard" au moment de la création des jumeaux. Dans ce modèle la variable λ de Bell est donc cet angle, et sa loi de probabilité est uniforme sur $[0, 2\pi]$, sinon le processus de création des jumeaux violerait l'invariance de l'espace par rotation; n'oublions pas, en effet, que dans le schéma de Bell, le hasard intervient au moment de la création de la paire: l'orientation des analyseurs n'a aucune influence sur ce processus. La corrélation entre les deux jumeaux s'exprimera alors comme une symétrie entre les deux angles: si φ_G est l'angle du jumeau de gauche et φ_D est l'angle du jumeau de droite, la corrélation se traduira par une égalité telle que $\varphi_G + \varphi_D = 2\pi$. Ce n'est que l'expression mathématique de la symétrie entre les deux jumeaux.

L'ensemble des valeurs prises par φ est donc représentable par une circonférence, sur laquelle φ_G et φ_D sont diamétralement opposés. Les aimants étant représentés par la flèche NS , on se servira du cercle dont NS est le diamètre pour représenter l'état du jumeau correspondant.

Pour représenter le signe de la déviation des particules (autrement dit le spin) dans l'expérience, nous divisons le cercle en deux moitiés, l'une à droite du diamètre NS , (région blanche sur la figure 60), l'autre à gauche du

Les corrélations E.P.R.

diamètre NS , (région grisée). Si la particule s'arrête dans la région blanche on attribue le signe $+$, si elle s'arrête dans la région grisée, le signe $-$. Si les deux disques (celui qui représente l'aimant de gauche et celui qui représente l'aimant de droite) ont la même orientation, il est clair que les signes seront toujours opposés, puisque les points d'arrivée des particules sont diamétralement opposés (si l'une s'arrête dans la région blanche, l'autre s'arrêtera dans la région grisée, et vice versa). Donc la corrélation des signes sera -1 . Jusque là, tout se passe comme dans l'expérience E.P.R.

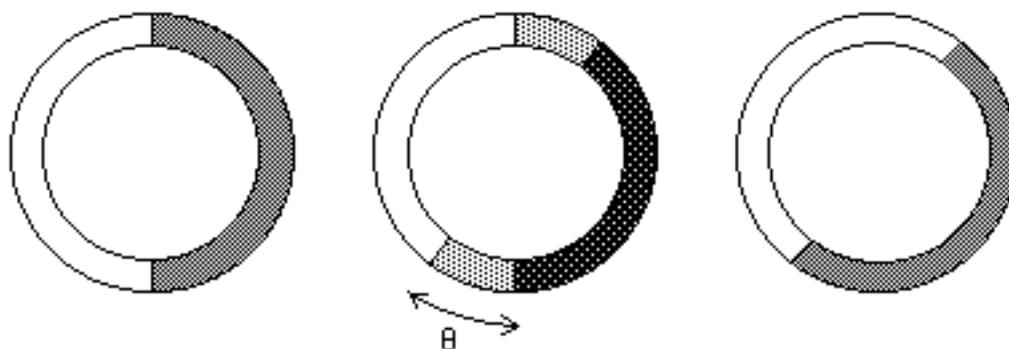


figure 61

Que se passe-t-il si les deux disques (celui “de gauche” et celui “de droite”) ont des orientations différentes, formant un angle θ entre elles? Sur la figure 61 on peut voir les deux disques à gauche et à droite orientés différemment et au milieu la superposition des deux. La zone noire dans le disque du milieu est l'intersection des zones grisées des deux disques de gauche et de droite, la zone blanche l'intersection des deux zones blanches. La zone claire dans le disque du milieu est l'intersection d'une zone grisée avec une zone blanche. Comme les deux particules sont toujours diamétralement opposées, si l'une aboutit dans la zone blanche, l'autre aboutira dans la zone noire et inversement puisque ces zones sont symétriques l'une de l'autre; dans ce cas leurs signes seront opposés. Mais si l'une des particules aboutit dans la partie claire, l'autre y aboutira aussi puisque les deux zones claires sont également symétriques l'une de l'autre; les deux particules se verront alors attribuer le même signe. On peut donc dire que la partie du disque formée de la réunion de la zone blanche et de la zone noire est celle qui donnera des signes opposés ($+ -$ ou $- +$), et la partie claire est celle qui correspond à des signes égaux ($++$ ou $--$).

Bien entendu les particules de ce modèle géométrique n'ont, intentionnellement, rien de quantique.

Posons-nous maintenant la question de la *probabilité* d'avoir le même signe ou des signes opposés. Puisque tous les angles θ sont équiprobables, et que la zone claire représente une proportion θ/π de la circonférence complète, la probabilité d'avoir des signes égaux pour les deux particules jumelles est θ/π . Si θ avait été négatif (c'est-à-dire si sur la figure 61 on avait tourné le disque de droite dans le sens opposé), cette proportion serait $|\theta|/\pi$. Cela n'est évidemment valide que pour $-\pi < \theta < +\pi$, car si θ devenait plus grand que π le rapport deviendrait supérieur à 1 et ne serait plus une probabilité; dans ce cas il faudrait ajouter ou retrancher à θ un multiple de 2π pour le ramener dans cet intervalle. Pour des rotations d'angles plus grands il faut donc compter modulo 2π , autrement dit la probabilité est la fonction périodique $\Phi(\theta)$, de période 2π , qui est égale à $|\theta|/\pi$ sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. Elle est représentée sur la figure 62a, superposée à la fonction prédite par la Mécanique quantique.

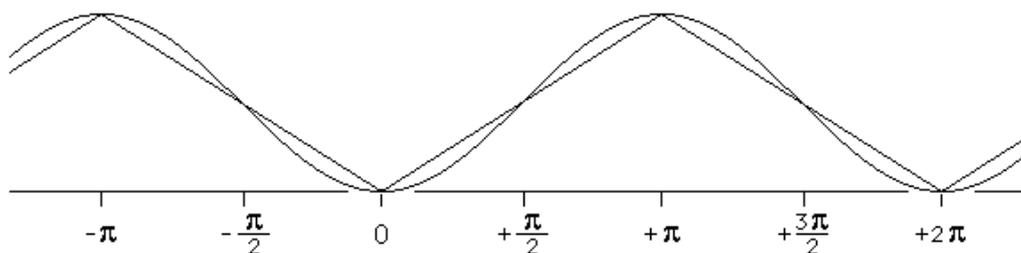
Ce prolongement de la fonction $\Phi(\theta)$ pour des angles θ hors de l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ n'est qu'une commodité purement mathématique, et ne joue aucun rôle concret: on veut simplement dire par là que si par exemple on faisait faire dix tours complets à l'un des analyseurs, sa position effective dans l'espace ne dépendrait que modulo 2π de l'angle dont il aurait tourné, et par conséquent il doit en être de même de la probabilité $\Phi(\theta)$ correspondante.

La probabilité que les deux particules obtiennent des signes opposés est alors $1 - \Phi(\theta)$. Quant à la corrélation entre les signes, elle est égale à $\rho = -[1 - \Phi(\theta)] + \Phi(\theta) = 2\Phi(\theta) - 1$. Le graphique de cette corrélation est représenté sur la figure 62b, où il est comparé à la corrélation $-\cos\theta$ de la Mécanique quantique.

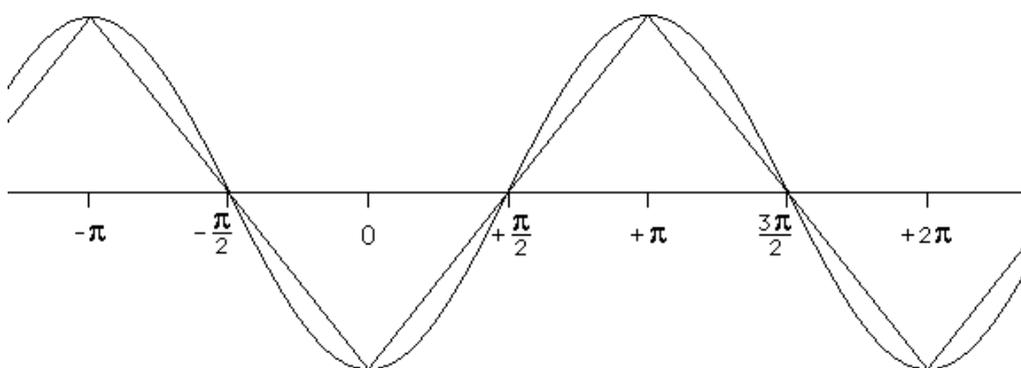
Il est facile de vérifier que la corrélation $2\Phi(\theta) - 1$ satisfait l'inégalité de Bell: en particulier si on prend les quatre angles de la figure 59, on trouve $\rho = -2$. Cela correspond bien à ce qu'on a toujours fait dire à l'inégalité de Bell: que la particule est une particule classique.

Mais voici maintenant le point essentiel. Cette corrélation $\rho = 2\Phi(\theta) - 1$ est la conséquence directe de notre hypothèse d'équiprobabilité: que tous les points de la circonférence sont équivalents. La symétrie circulaire est une conséquence nécessaire des hypothèses de Bell, puisque ces hypothèses consistent à admettre que le choix du hasard a été effectué avant que les jumeaux ne traversent les analyseurs, donc indépendamment des orientations que prendront ces derniers. Par contre cette invariance circulaire n'existe plus dans les analyseurs, puisque ceux-ci privilégient une direction particulière. Cela implique que dans le modèle, on pourrait obtenir les corrélations de la Mécanique quantique en renonçant à cette invariance. Et en effet, il suffit de remplacer la fonction $2\Phi(\theta) - 1$ par $-\cos\theta$, ce qui

Les corrélations E.P.R.



a) probabilité $\Phi(\theta)$ pour que les particules jumelles soient de même signe (fonction affine par morceaux), comparée à la loi correspondante dans l'expérience E.P.R. quantique (fonction sinusoidale).



b) corrélation des signes entre les particules jumelles (fonction affine par morceaux), comparée à la corrélation E.P.R. (fonction sinusoidale).

figure 62

équivalent à remplacer $\Phi(\theta)$ par $\frac{1}{2}[1 - 2 \cos \theta] = \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Si on interprète cela géométriquement (figure 63), on arrive à la conclusion que ce ne sont pas les points de la circonférence qui sont équivalents, mais les points du diamètre sur lesquels se projette orthogonalement le point de la circonférence qui repère le secteur d'arrivée de la particule.

Posons donc que la probabilité pour que l'angle φ d'une particule quantique tombe dans un secteur angulaire compris entre les angles α et β serait, non pas proportionnelle à $\beta - \alpha$, mais à $\cos \alpha - \cos \beta$. Cela exige qu'on choisisse une origine particulière sur la circonférence pour compter les angles: en effet $\beta - \alpha$ est indépendant de l'origine choisie, mais pas $\cos \alpha - \cos \beta$. Autrement dit cela exige qu'on distingue une direction particulière dans le disque. **Mais cela est justement le cas dans l'expérience que nous discutons: le champ magnétique de l'aimant de Stern-Gerlach et son gradient définissent bien une direction particulière.**

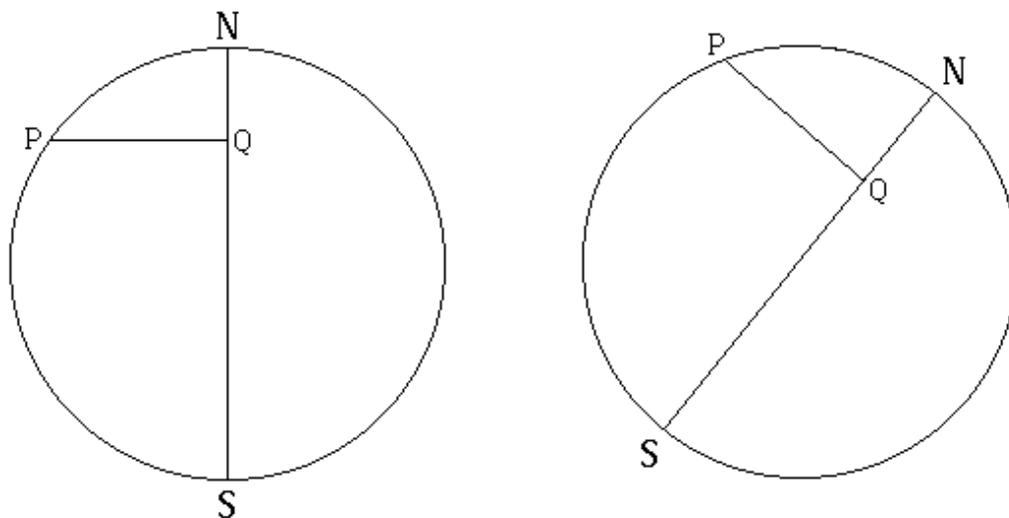


figure 63

On n'obtient pas les mêmes lois de probabilités (et par conséquent pas les mêmes corrélations) selon que les épreuves équiprobables sont les points P de la circonférence ou leurs projections Q sur un diamètre donné, comme cela avait déjà été vu au chapitre I à propos des cordes sur un cercle.

Voyons cela de plus près. Avant de discuter des jumeaux, considérons une seule particule et un seul disque qui, dans notre modèle, est la représentation symbolique d'un analyseur de Stern-Gerlach. L'analyseur a par nature une orientation bien définie (celle du champ magnétique et de son gradient). Sur le disque nous la représentons par le diamètre NS (cf. figure 60). Ce diamètre détermine une origine des angles (le point N), à partir de laquelle on compte les angles pour repérer un point de la circonférence. Et maintenant, au lieu d'admettre que tous les angles sont équiprobables, on va admettre que ce sont leurs cosinus qui sont équiprobables. Pour être plus précis : on repère le secteur d'arrivée de la particule par un point P de la circonférence (figure 63); ce point se projette sur le diamètre NS en Q , et comme deux points P de la circonférence peuvent se projeter au même point Q on dédouble ce diamètre pour distinguer son côté gauche de son côté droit (donc sa longueur totale est quatre fois le rayon). On pose que la loi de probabilité à laquelle obéit le processus est **l'équiprobabilité des points Q le long du diamètre**. Cette loi pour la variable φ , qui est ici la λ de Bell, a une densité qui dépend de a et de b (en fait de θ), et c'est précisément ce qui a pour effet d'invalider les inégalités de Bell. Ainsi la loi de φ , pour être compatible avec les faits, dépend des directions a et b , ce qui est naturel puisque l'appareil de la figure 58 privilégie ces deux directions. C'est là la

conclusion à laquelle conduit l'analyse du modèle géométrique.

À partir de cette loi il est aisé de calculer la probabilité pour que deux particules symétriques (c'est-à-dire telles que $\varphi_G + \varphi_D = 2\pi$) aboutissent toutes deux dans la région claire correspondant au cas où les signes sont opposés (cf. figure 61) : elle est égale à $(1 - \cos \theta)/2$. En effet, les deux particules étant diamétralement opposées, l'événement "elles arrivent toutes deux dans la zone claire" est identique à l'événement "la jumelle de gauche arrive dans la zone claire", ou à l'événement "la jumelle de droite arrive dans la zone claire". La probabilité de cet événement, qui était $|\theta|/\pi$ lorsqu'on partait de l'équiprobabilité des points de la circonférence, est maintenant $\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$, car les points situés sur les deux arcs de cercle correspondants se projettent sur le diamètre NS du disque de gauche (vertical sur la figure 61) selon deux segments de longueur $(1 - \cos \theta) \times \text{rayon}$ chacun ; la longueur totale du diamètre dédoublé étant $4 \times \text{rayon}$, le rapport est bien $\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$. Le calcul a été effectué à partir de la jumelle de gauche, mais cela ne contredit nullement la symétrie entre les deux jumelles : si on avait basé le calcul sur la jumelle de droite, on aurait tout projeté sur le diamètre NS du disque de droite (oblique sur la figure 61), et évidemment trouvé le même résultat.

Les probabilités et les corrélations en $-\cos \theta$ de la Mécanique quantique peuvent donc se calculer a priori en partant non pas de l'équiprobabilité des points de la circonférence, mais de l'équiprobabilité de leurs projections sur le diamètre NS représentant l'orientation de l'analyseur respectif. Cette nouvelle invariance ne se ramène à aucune des invariances macroscopiques de l'espace. L'apparente dépendance par rapport à l'orientation de l'autre analyseur ne provient que du comptage des coïncidences de signe : les points sur la circonférence qui représentent les jumeaux de même spin sont situés dans la zone claire de la figure 61, qui est délimitée par les orientations des deux aimants. Autrement dit, il faut évidemment connaître l'orientation de l'autre analyseur pour délimiter cette zone, mais tant qu'on était dans le domaine classique, cela ne choquait personne car il était tenu pour évident qu'il ne s'agissait pas d'une influence à distance : pour décompter les particules qui ont le même spin que leur jumeau éloigné, on est bien obligé d'aller voir le spin de l'autre jumeau. Dans le cas de la loi quantique, on pourrait cependant penser à première vue que projeter les deux particules sur le même diamètre contredit la localité car l'une des particules serait ainsi projetée selon l'orientation de l'autre analyseur ; mais si on projette chaque particule sur le diamètre de son analyseur on trouve la même loi de probabilité.

À première vue la nouvelle règle d'équiprobabilité est étrange et le modèle étudié ici très artificiel ; mais ce qui est artificiel est beaucoup moins

l'équiprobabilité des points du diamètre, que le parti pris de vouloir décrire l'état interne par l'angle φ . Si nous vivions dans le monde quantique, c'est l'introduction de cet angle φ qui nous semblerait absurde. Cependant sa prise en compte dispense d'imaginer des actions physiques à distance. Ce que montre essentiellement cette règle, c'est que le phénomène quantique ne subit pas les invariances euclidiennes, mais celles qui sont créées par "l'appareil de mesure", où les deux directions a et b sont privilégiées; ce qui au fond est parfaitement logique.

La moralité de cette histoire est la suivante: les corrélations E.P.R. ne résultent pas d'actions à distance, mais simplement du fait que dans le monde quantique (donc à l'échelle atomique) il y a d'autres symétries que celles de l'environnement spatial local et instantané, comme nous l'avons déjà vu en comparant les boules aux particules de Bose. À la section **I.2**, à propos des cordes sur un cercle, nous avons fait remarquer que quelqu'un qui observe leur distribution peut en déduire des renseignements sur la manière dont elles ont été choisies (le niveau où le pur hasard est intervenu). De l'expérience E.P.R. cette personne peut également déduire que ce n'est certainement pas une orientation particulière (un vecteur de moment cinétique) des atomes jumeaux par rapport à l'espace vide que la Fortune a choisi. Également à la section **I.2**, nous avons vu que les particules de Bose différaient des particules classiques (les boules) par la nature de l'invariance. Nous disions que "le hasard pur n'intervenait pas au même niveau": pour les boules (classiques) il intervenait dans le choix des boîtes, pour les particules de Bose (quantiques) il intervenait dans le choix des modes d'occupation. Nous retrouvons ici la même différence entre le classique et le quantique: les choix équiprobables ne sont pas effectués sur le même type d'épreuves. L'explication des corrélations E.P.R. est que "le hasard pur" ou "la Fortune" choisit les points sur l'axe NS de l'analyseur et non sur la circonférence, tout comme l'explication de la loi de Planck est que "le hasard pur" choisit les modes collectifs d'occupation et non les états individuellement accessibles à chaque photon. Il est bien clair que si on modélise cette situation en prenant pour espace des épreuves l'ensemble des points du diamètre (ou plus artificiellement l'ensemble des points de la circonférence, mais avec la densité compensatoire $\frac{1}{2} \sin \varphi$) le Calcul des probabilités sera applicable aux événements qui en sont des sous-ensembles; la formule des probabilités conditionnelles sera vraie pour de tels événements, alors que cela n'était pas évident pour la manière dont elle était appliquée dans le raisonnement conduisant à l'inégalité de Bell. Mais cela signifie que "le hasard pur" choisit en tenant compte du rôle particulier joué par le diamètre NS . On retrouve ainsi notre conclusion que la loi p_j de la variable λ (qui, dans notre petit modèle, est l'angle φ), dépend de l'angle θ .

C'est donc bien ici que se trouve l'erreur : l'expérience d'Aspect prouve qu'il n'existe pas de variable λ dont la loi est indépendante des directions a et b ; autrement dit :

a) le hasard n'intervient pas avant l'interaction avec les aimants, auquel cas il pourrait ignorer leurs directions, mais sur l'ensemble du processus ;

b) lorsqu'il intervient, l'invariance qui le caractérise n'est pas conditionnée par l'espace vide, mais par les deux directions caractéristiques.

Dans (13.10) par exemple, ce n'est pas l'indépendance stochastique entre les deux analyseurs qui est en cause, mais plus fondamentalement le fait que la loi p_j elle-même dépend des directions. On l'a vu très clairement avec le modèle géométrique.

C'est la seule interprétation raisonnable. L'appel à une «interaction de type nouveau, inconnu» n'est pas raisonnable : elle consiste à donner plus de valeur à des visions purement imaginaires héritées d'habitudes de pensées séculaires, conditionnées par le monde macroscopique. On n'a jamais pu diviser le processus (le *phénomène*), réellement, concrètement, expérimentalement ; il est donc illégitime d'inventer des subdivisions de phénomènes. De telles inventions sont certes une pente naturelle de l'esprit humain : les peuples antiques, éduqués depuis des millénaires dans les cosmologies religieuses et mythiques, étaient tout naturellement enclins à imaginer des dieux invisibles derrière chaque nouveau mystère de la nature. Être rationnel, c'est savoir se méfier de l'imagination et s'incliner devant les révélations de la nature.

L'idée d'une action à distance est liée à l'abandon de l'indépendance stochastique car, comme on l'a vu au chapitre **IV**, celle-ci exprime l'indépendance causale ; l'abandonner revient à admettre une influence. Mais on vient de voir que ce n'est pas l'indépendance stochastique qui est source de l'erreur. Alors qu'il est logique que la loi p_j reflète le type de symétrie créé par la présence des deux directions a et b , rien dans les principes du Calcul des probabilités n'impose une relation causale entre les deux analyseurs. Seule la persistance des conceptions classiques, l'incapacité foncière de renoncer à l'image de la petite bille, conduit à une telle conclusion.

XIII. 5. Conclusion.

Il ne faut pas chercher dans le modèle présenté une explication plus profonde de la Mécanique quantique. Il s'agissait seulement d'illustrer les hypothèses qui conduisent à l'inégalité de Bell sous une forme géométrique moins abstraite que la démonstration la plus générale. La figure 62 montre très concrètement la différence entre le comportement classique et le comportement quantique. L'angle φ (ou plus généralement la variable aléatoire

λ de Bell) exprime le préjugé classique d'une bille *orientée dans l'espace*, qui conduit inévitablement à la fonction affine par morceaux de la figure 62, et qui vérifie l'inégalité de Bell. La courbe qui représente les phénomènes réels est au contraire sinusoidale, et viole l'inégalité de Bell.

On pourrait ajouter que le phénomène naturel dont nous discutons et qui ne consiste au fond en rien d'autre que la corrélation en $-\cos\theta$ est bien plus qu'un simple constat expérimental et est l'expression des nécessités absolument fondamentales suivantes, que nous avons déjà mentionnées :

a) l'expérience représentée sur la figure 58 est invariante par rotation globale dans l'espace ;

b) macroscopiquement on retrouve la Mécanique classique où le moment cinétique est un vecteur⁽⁸⁾.

La condition b) exprime le fait que si on mesure, dans l'aimant de Stern-Gerlach, le «spin selon Ox » pour une grosse particule (non quantique), formée par exemple de $N \geq 1$ quantons de spin $\frac{1}{2}\hbar$ chacun, on doit retrouver les relations de la Mécanique classique et notamment que la composante M_x selon Ox du moment cinétique \vec{M} est égale à $M \cos \alpha$, α étant l'angle entre l'axe Ox et le vecteur \vec{M} . Le cosinus qui apparaît dans $M_x = M \cos \alpha$ est lié à celui de la corrélation $\mathbf{E}(a, b) = -\cos \theta$, c'est-à-dire que si $\mathbf{E}(a, b)$ était une fonction de θ autre que $-\cos \theta$, on ne retrouverait plus, à la limite des gros systèmes, la relation $M_x = M \cos \alpha$, M_x étant la somme des «spins selon Ox » de tous les quantons et $M = N \times \frac{1}{2}\hbar$.

En d'autres termes : si l'expérience avait donné tort à la Mécanique quantique et raison à l'inégalité de Bell, on ne comprendrait plus pourquoi le monde macroscopique obéit à la Mécanique classique !

S'il est assez clair après la discussion précédente que les signaux qui partiraient prévenir chaque analyseur de ce qui est arrivé dans l'autre est plutôt de l'ordre des naïvetés comme l'ange qui pousserait les planètes ou les fantômes d'Archibald de la Cruz, et n'est en tous cas pas nécessaire puisque l'expression mathématique $R = -\cos \theta$ exprime toute l'information que nous possédons, il n'est par contre pas évident du tout que *toute* idée d'état interne doive être abandonnée. Toutefois, pour que le recours à une notion d'état interne plus profonde que ne le permet la Mécanique quantique soit justifié, il faut que ce soit une hypothèse créatrice et non un artifice uniquement destiné à sauver des préjugés.

⁽⁸⁾ Le fait que la corrélation soit $-\cos \theta$ et non une autre fonction de θ est une conséquence nécessaire de a) et b). Cela a été établi : voir Claude Comte *Symmetry, Relativity, and Quantum Mechanics*, Il Nuovo Cimento B, vol **111** (1996).

En tant qu'auteur de cet ouvrage, je dois à ce propos prévenir les mauvais procès qui pourraient m'être intentés. Dans les discussions ou les polémiques qui ont entouré le problème de l'existence d'un état interne, la position qui consiste à dire "l'expression mathématique $R = -\cos \theta$ exprime toute l'information que nous possédons" a souvent été dénoncée comme positiviste (un terme évidemment péjoratif). Le positivisme, du moins dans le sens péjoratif du mot, est une attitude dogmatique, qui dévalorise ou récuse a priori la recherche d'une vérité plus profonde.

L'un des exemples les plus fameux d'un tel comportement dogmatique a été le refus de l'hypothèse atomique. À partir de 1860⁽⁹⁾, R. Clausius, J. C. Maxwell, puis plus tard L. Boltzmann (mais l'idée remonte à Daniel Bernoulli au début du XVIII^e siècle) développèrent une interprétation statistique de la Thermodynamique en postulant que les propriétés liées à la chaleur, notamment pour les gaz, s'expliquent mathématiquement par le mouvement aléatoire des molécules. C'est l'origine de ce qui s'appelle aujourd'hui la *Physique statistique* et le plus grand succès du Calcul des probabilités. Jusque là, la Thermodynamique avait été une théorie purement axiomatique et Boltzmann proposait de l'expliquer à partir d'une vérité plus profonde, celle des mouvements désordonnés, chaotiques (et donc stochastiques) des atomes et des molécules. Beaucoup de physiciens refusèrent une telle interprétation en disant que la réalité des atomes n'est pas prouvée par l'expérience et serait donc une hypothèse purement métaphysique, inutile car "la Thermodynamique axiomatique d'avant 1860 exprime toute l'information que nous possédons".

L'Histoire a donné raison à Clausius, Maxwell, et Boltzmann non pas simplement parce que la réalité des atomes a fini par être prouvée, mais surtout parce que l'hypothèse statistique est créatrice; par exemple Planck n'aurait pas pu trouver l'explication du rayonnement du corps noir s'il n'avait pas suivi un raisonnement de Physique statistique. Si on possède une interprétation de lois existantes à partir d'une vérité plus profonde, on peut deviner des lois nouvelles.

Pour donner un autre exemple plus proche du sens commun: connaître tous les symptômes cliniques des maladies infectieuses apporte peu de

⁽⁹⁾ R. Clausius: *Über die Art der Bewegung, die wir Wärme nennen*. Poggendorffer Annalen, vol. **100** (1857).

J. C. Maxwell: *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases* Philosophical Magazine (1860).

L. Boltzmann: *Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht*. Wiener Berichte vol. **76** (1877).

moyens pour les combattre; mais si on sait qu'elles sont produites par des micro-organismes invisibles, on peut chercher un moyen de détruire ceux-ci (asepsie). Dans le but peut-être louable en soi d'écarter la métaphysique, doit-on refuser l'hypothèse des micro-organismes parce qu'elle n'est pas nécessaire pour connaître les symptômes cliniques? C'est en cela que le positivisme est dogmatique; les mésaventures de Boltzmann ont fortement discrédité cette position philosophique.

Avec l'expérience *E.P.R.* a été soulevée (notamment par Einstein) la question de savoir s'il n'y aurait pas une *vérité plus profonde* qui expliquerait les lois quantiques comme la Physique statistique explique la Thermodynamique, comme le code génétique explique la transmission de la mucoviscidose, etc. Mais la recherche de cette vérité plus profonde doit partir de l'expérience et non de nos préjugés philosophiques sur la causalité.

Je ne voudrais donc pas être mal compris. En paraphrasant une déclaration célèbre de Heisenberg, j'ai bien écrit "l'expression mathématique $R = -\cos\theta$ exprime toute l'information que nous possédons". Mais je n'ai pas ajouté "inutile de chercher plus loin". Il faut bien voir ceci: l'expérience *E.P.R.* est un défi pour la manière dont nous concevons la causalité; toutefois l'expérience d'Aspect est une *expérience* et est donc plus sûrement vraie que les préjugés. Chercher une vérité plus profonde doit être le but, mais ce n'est pas être positiviste que de penser que lorsque celle-ci sera connue, elle sera très différente des modèles naïfs que nous inspirent encore une vision de la causalité héritée de la Mécanique classique. L'assertion "l'expression mathématique $R = -\cos\theta$ exprime toute l'information que nous possédons" est parfaitement exacte: nous ne possédons aujourd'hui aucune autre *information*. D'ailleurs — pour prendre un autre exemple digne d'être suivi — Einstein, confronté à la théorie électromagnétique de Maxwell dans laquelle la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs quelles que soient leurs vitesses relatives (confirmée sur ce point par les expériences de Michelson et Morley en 1887), n'a pas cherché des modèles naïfs qui auraient préservé un temps absolu: il a déduit la Relativité de l'*information* apportée par l'expérience de Michelson-Morley. On a souvent accusé Bohr et Heisenberg d'être des positivistes, c'est-à-dire de se conduire comme les adversaires de l'hypothèse moléculaire. Je pense que ce jugement est erroné, voire grossier, et j'espère que ce chapitre qui apporte la rigueur du Calcul des probabilités, aidera à corriger ce jugement.

Mais cet objectif est secondaire: j'espère surtout que cette discussion sur l'expérience *E.P.R.* aura montré qu'un formalisme mathématique ne constitue jamais une vérité universelle et que la conscience de sa signification réelle doit toujours rester présente.

XIV. L'IRRÉVERSIBILITÉ.

À cause de l'abondance de la littérature sur le sujet, ce chapitre comporte une bibliographie séparée, placée à la fin de l'annexe, page 458. Les chiffres entre crochets, par exemple [9], réfèrent à cette bibliographie.

1. Introduction.

Le problème de l'irréversibilité est celui de l'évolution des systèmes *macroscopiques*, c'est-à-dire constitués d'un nombre immense de molécules en perpétuelle agitation. L'exemple typique est le gaz ; mais n'importe quel objet matériel dont la masse est de l'ordre du gramme ou plus, est un tel corps, puisque les molécules qui le composent, même si elles sont très grosses, ont des masses infinitésimales si on les compare au gramme. Nous avons déjà abordé l'étude probabiliste de tels corps, notamment en **II.6** (problème du corps noir). L'irréversibilité est le fait que par exemple un gaz enfermé au départ dans un récipient va se répandre dans l'espace si on ouvre le récipient, alors qu'il n'arrivera jamais que du gaz répandu dans l'espace se rétracte jusqu'à revenir de lui-même s'enfermer dans un récipient. L'irréversibilité est à la base de tous les phénomènes naturels : les cadavres se décomposent et ne redeviennent jamais vivants, les vieux tuyaux rouillés ne redeviennent jamais neufs, des livres brûlent et partent en fumée mais les cendres et la fumée ne redonneront plus jamais les livres, etc. etc.

Le présent chapitre est consacré aux fondements probabilistes de l'irréversibilité. Nous avons déjà vu au chapitre **I** comment le chaos déterministe crée du hasard ; au chapitre **IV** comment il efface la causalité ; au chapitre **VII** comment le hasard se transforme en déterminisme. Ici il s'agit de comprendre comment le chaos déterministe, dont l'évolution est en principe réversible, efface la réversibilité. Cela implique que nous ne discuterons pas les fondements quantiques de l'irréversibilité, car cela sortirait du cadre du présent ouvrage (consulter le *Cours de Physique de Berkeley*, tome 5, Physique statistique). Pour comprendre il nous faut des modèles simples et la Mécanique classique y pourvoit ; le principe de base de l'*effacement de la réversibilité* est essentiellement le même en quantique qu'en classique ; le premier est juste techniquement plus difficile.

Les corps macroscopiques se modifient spontanément du fait de l'agitation perpétuelle des molécules qui les composent. Toutefois les objets *isolés*, c'est-à-dire écartés de tout contact ou échange avec le reste de l'univers, y compris

l'émission ou l'absorption de rayonnement, évoluent vers un état asymptotique stable, appelé *état d'équilibre*. Le simple sens commun suffit à le comprendre: si un corps métallique est maintenu à l'écart de tout échange, il ne pourra s'oxyder puisqu'il faut pour cela une action de l'oxygène sur le corps. De même un liquide au repos dans un réservoir ne se mettra à couler que si on bascule ou perce le réservoir, l'air calme ne peut commencer à être agité par le vent que s'il est exposé à des masses d'air plus chaudes ou plus froides, etc. Si au lieu de mettre le corps métallique fraîchement poli à l'abri de l'oxygène et du monde extérieur, on isole ce corps *avec une certaine quantité d'oxygène* de tout le reste, il va s'oxyder progressivement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus assez d'oxygène pour que la corrosion se poursuive, et on atteint aussi un état d'équilibre. Pour le sens commun, forgé par l'expérience quotidienne, il est bien évident qu'une fois la surface métallique corrodée, il n'arrivera plus jamais que l'oxygène se retire spontanément du métal pour retrouver sa forme gazeuse, en rendant ainsi tout son brillant à la surface métallique. C'est pourquoi on dit que la corrosion est une évolution *irréversible*. Bien entendu, il est possible d'appliquer au métal un traitement chimique qui sépare à nouveau l'oxygène et le métal, mais cela brise alors l'isolement du système *corps métallique plus oxygène*.

Cette notion d'*état asymptotique stable* est essentielle pour comprendre l'irréversibilité. Plus précisément, ce qui est essentiel est que ces "états stables" ne sont stables que dans leur apparence macroscopique; l'état exact du mouvement des molécules, lui, n'est évidemment pas stable puisque l'agitation moléculaire ne s'arrête pas. Il s'agit d'une stabilité de *l'apparence macroscopique* qui est maintenue par le mouvement incessant des molécules. Pour clarifier la question on introduira un langage précis: l'état exact du mouvement des molécules sera appelé l'état *microscopique* du système, tandis que l'ensemble des paramètres caractérisant l'apparence macroscopique du système sera son état *macroscopique*. L'état asymptotique stable, ou état d'équilibre, est donc un état *macroscopique* du système. Les états microscopiques du système à l'équilibre sont évidemment instables et en perpétuelle transformation. Ceci sera examiné en détail à la section 4.

À la suite des travaux de Sadi Carnot (*Réflexions sur la puissance motrice du feu*, 1824) Rudolph Clausius a dégagé le concept de l'*entropie* d'un tel système isolé. L'entropie est une grandeur associée à l'état macroscopique du système; en langage mathématique on dirait que c'est une fonction de l'état macroscopique, à valeurs réelles. L'entropie permet d'exprimer l'irréversibilité des systèmes macroscopiques sous une forme quantitative: c'est le *second principe de la Thermodynamique*, qui affirme que l'entropie d'un système isolé ne peut jamais diminuer. Carnot analysait le principe des

L'irréversibilité

machines thermiques, qui produisent du mouvement à partir de la chaleur, en injectant de la vapeur ou de l'air sous pression dans un cylindre pour déplacer un piston. Il a constaté que la vapeur devait nécessairement se refroidir, et qu'avec une quantité de charbon donnée, l'énergie mécanique qu'on peut récupérer est d'autant plus élevée que la vapeur a plus refroidi. Plus précisément il établit la loi quantitative suivante : Si T_1 est la température (absolue, en degrés Kelvin) à laquelle on a chauffé la vapeur et T_0 la température à laquelle se refroidit cette vapeur après le passage dans le cylindre ou la turbine, l'énergie mécanique obtenue pour une quantité de chaleur fournie Q sera proportionnelle à $(1 - T_0/T_1) \times Q$ et non à Q seul. Cela veut dire que si par exemple on chauffe de l'air à 273 degrés Celsius (546 Kelvin) dans un cylindre pour qu'il pousse un piston et déplace ainsi un objet lourd, puis qu'on le refroidit à 0 degrés Celsius (273 Kelvin) pour que le piston se rétracte, le rapport $1 - T_0/T_1$ sera 0.5 et le travail mécanique de déplacement de l'objet lourd aura été la moitié de l'énergie calorifique dépensée pour chauffer l'air dans le cylindre. L'autre moitié se sera perdue dans le refroidissement de l'air. (N. B. cette perte par refroidissement est nécessaire, car sinon le piston ne se rétracte pas tout seul; il faudrait le pousser et donc perdre le travail mécanique qu'on vient de gagner).

Le processus *inverse* de celui de la machine thermique consisterait à produire la chaleur à partir du mouvement mécanique au lieu de l'obtenir en brûlant du charbon. On peut produire de la chaleur à partir du mouvement par frottement; on peut même convertir entièrement l'énergie mécanique en chaleur : dans ce cas le mouvement est complètement arrêté par l'effet des frottements. Or la loi de Carnot montre que, sauf si $T_0 = 0$ ou $T_1 = \infty$, la chaleur ne peut jamais être entièrement convertie en mouvement. De toute façon la condition $T_0 = 0$ est irréalisable, car pour que la vapeur puisse être refroidie à $T_0 = 0$ il faut maintenir un système de refroidissement bien plus coûteux que l'énergie produite par la machine. Ce constat fait par Carnot marque l'origine du problème théorique de l'irréversibilité : la transformation d'énergie mécanique en chaleur par les frottements n'est pas réversible, en ce sens qu'aucune machine thermique ne pourra retransformer intégralement la chaleur en le mouvement. La théorie (la Thermodynamique) interprète cela en disant que la transformation d'énergie mécanique en chaleur par les frottements augmente l'entropie; pour retransformer toute la chaleur en énergie mécanique il faudrait alors diminuer l'entropie. Quantitativement, si nous reprenons l'exemple ci-dessus avec la vapeur refroidie de 273 degrés Celsius à 0 degrés Celsius, on peut dire que 4184 joules de travail mécanique permettent d'échauffer par frottement 1 kilogramme d'eau de 1 degré, mais inversement, avec une machine thermique fonctionnant entre 273 et 0 degrés Celsius, cette même quantité de chaleur ne permettrait de récupérer que

2092 joules de travail mécanique. Bien entendu dans une machine réelle une grande partie de la chaleur fournie se perd aussi par les défauts d'isolation, en sorte qu'on récupérerait encore bien moins que ces 2092 joules ; la loi de Carnot concerne le cas idéal où on aurait entièrement éliminé ces pertes. Elle dit que même si ces pertes sont rendues infinitésimales, il restera toujours une irréversibilité de principe, car le fonctionnement même de la machine exige qu'une partie de la chaleur soit perdue par le refroidissement.

L'explication fondamentale du comportement des corps macroscopiques tels que la dilatation des gaz chauffés dans les machines thermiques, mais aussi l'écoulement des liquides, l'évaporation, la fusion ou la solidification, les échanges de chaleur, etc, a été trouvée dans le comportement *aléatoire* des mouvements moléculaires. C'est en appliquant la *loi des grands nombres* au mouvement chaotique d'un nombre immense de molécules qu'on retrouve le comportement des corps macroscopiques. La loi de Carnot mentionnée plus haut peut être déduite ainsi, de même que toutes les lois gouvernant les échanges de chaleur, l'agitation des fluides, etc. Quoique cette explication statistique ait déjà été proposée comme hypothèse par Daniel Bernoulli (*Hydrodynamica*, 1731), elle n'a commencé à devenir pleinement opératoire que dans la seconde moitié du *XIX*^e siècle. Les travaux fondateurs de cette *Mécanique statistique* ont été effectués pour l'essentiel par J. C. Maxwell ([2], 1860) et Ludwig Boltzmann ([1], 1872). L'irréversibilité mentionnée précédemment n'est qu'un aspect du comportement des corps macroscopiques, et au fond, elle ne joue qu'un rôle très marginal dans les préoccupations des physiciens car elle ne vaut que comme principe général et abstrait. Pour celui qui doit *calculer* ou décrire des phénomènes précis et particuliers, la *Mécanique statistique* est une science très technique dont le quotidien est bien éloigné des grands principes. Par contre, l'irréversibilité est le genre de problème qui a toujours fasciné les philosophes, ainsi que tous les amateurs passionnés de science, qui connaissent cette dernière bien plus par les ouvrages de vulgarisation que par l'étude approfondie et patiente de problèmes concrets mais ardu. De ce fait, le thème de l'irréversibilité inspire depuis Boltzmann toute une littérature pseudo- ou para-scientifique, pleine de confusion, de rêve, et de visions inexacts ou même carrément fausses.

Le point crucial de cette littérature est le *paradoxe de Loschmidt*. Après la publication par Ludwig Boltzmann de l'*interprétation moléculaire de l'entropie* ([1], 1872), quoique ce travail n'ait pas eu immédiatement un grand écho (probablement parce qu'il était mathématiquement très ardu), d'autres publièrent des critiques. Il s'agissait là d'une tradition de la Physique allemande, encouragée par les éditeurs des revues savantes : loin d'être polémiques ou liées à des rivalités, ces critiques favorisaient la

L'irréversibilité

discussion et l'approfondissement des idées [des polémiques, il y en eut aussi, car l'hypothèse moléculaire avait des adversaires]. Parmi celles faites à Boltzmann, deux sont devenues célèbres.

Le premier article [3] de ce type fut publié en 1876 par Joseph Loschmidt et contenait une vingtaine de critiques ou d'objections exigeant de la part de Boltzmann des explications plus détaillées; une seule de ces critiques est entrée dans l'Histoire sous le nom de *paradoxe de Loschmidt*; il s'agit du fait apparemment paradoxal que le système dynamique ait globalement un comportement irréversible alors que la Mécanique est entièrement réversible: pour tout mouvement d'un système de points matériels tels que les molécules, le mouvement inverse, c'est-à-dire celui qu'on verrait dans un film projeté en marche arrière, est également possible et tout aussi probable. Boltzmann avait répondu ([12] et [13]) à la question de Loschmidt, et sa réponse est essentiellement correcte. Elle peut certes être affinée par des connaissances plus récentes, mais rien ne change *sur le fond*. Ainsi Boltzmann postulait pour les molécules un mouvement newtonien, alors que la Mécanique statistique moderne postule un mouvement quantique, ce qui induit de grandes différences (statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein). Mais l'argument de Loschmidt et la réponse de Boltzmann à cet argument ne s'en trouvent pas affectés de manière vraiment essentielle: les mouvements microscopiques quantiques sont, tout comme les classiques, parfaitement réversibles, et la propriété statistique universelle qui explique l'irréversibilité est la même. La réponse de Boltzmann repose sur l'observation suivante: les états initiaux du système qui feraient diminuer l'entropie existent, certes, mais sont si prodigieusement rares qu'il est pratiquement impossible de les rencontrer ou de les produire. Toutefois sous cette forme succincte l'argument laisse planer trop de malentendus [et c'est ce qui explique la persistance des incompréhensions]. C'est bien pourquoi il faut ce chapitre entier pour discuter la question.

Un second article [11] de ce type fut publié en 1896 par Ernst Zermelo et reprenait pour la communauté de langue allemande des critiques de Henri Poincaré. L'argumentation de Poincaré est basée sur son *théorème du retour*: “un système dynamique de N points matériels qui évolue au cours du temps en restant borné repassera au bout d'un temps fini aussi près qu'on voudra de son état initial”. Autrement dit, “pour tout ε , il existe un temps T_ε au bout duquel le système repassera à une distance inférieure à ε de son état initial.”

L'argument de Zermelo repose sur ce théorème: si on part d'un état de faible entropie et que cette entropie croît comme le dit le second principe de la Thermodynamique, alors elle devra forcément décroître à nouveau pour

revenir au bout d'un temps T_ε près de sa valeur initiale. On trouvera dans les sections **5** et **6** de l'annexe quelques textes de Poincaré et des extraits de la réponse de Boltzmann.

L'explication de cet apparent paradoxe est plus simple que pour celui de Loschmidt: le théorème de Poincaré est juste; mais le temps T_ε au bout duquel le système repassera près de son état initial et où par conséquent l'entropie diminuera à nouveau est de l'ordre de 10^N pour un système de N particules. Si N est le nombre de molécules d'un litre de gaz \simeq nombre d'Avogadro $\simeq 10^{23}$, cela veut dire que T_ε serait de l'ordre de $10^{100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ années. La loi de croissance de l'entropie n'est vraie que pour des durées *pratiques* et ne doit pas être extrapolée ainsi à des durées dépourvues de sens physique. C'est ce que Boltzmann répondit à Zermelo (voir annexe, section **6**).

2. La nature microscopique des gaz.

Imaginons un gaz maintenu dans un récipient hermétique comme un nuage de poussières dont les grains sont les molécules. On va considérer un mouvement parfaitement newtonien pour le système de point matériels auquel on assimile l'ensemble des molécules du gaz. Les substitutions fréquentes des vitesses, chaque fois que la molécule frappe une paroi du récipient ou entre en collision avec une autre, crée un *brouillage* qui, au bout d'un certain temps (après plusieurs collisions) rend la distribution des molécules en apparence complètement aléatoire; c'est ce qu'on appelle le *chaos déterministe*. L'analyse mathématique détaillée de ce mouvement de points qui entrent mutuellement en collision, incluant le calcul de l'évolution des positions et des vitesses a été effectué pour la première fois en 1860, par J. C. Maxwell [2]. Ce texte de Maxwell est aujourd'hui encore l'exposé le plus clair, le plus rigoureux (malgré un raisonnement faux devenu célèbre, et corrigé six ans plus tard), et le plus pénétrant jamais écrit sur le sujet.

Nous avons déjà rencontré cette notion de brouillage en **I.5**, **II.5**, **IV.2**. Elle est essentielle pour la résolution du paradoxe de Loschmidt. En effet, le mouvement exact des molécules, c'est-à-dire leur mouvement newtonien mathématique, est réversible: en retournant toutes les vitesses (mais en conservant les positions), le système revient en arrière, en décrivant le mouvement exactement inverse de celui suivi jusque là; de sorte que, si le système était dans une configuration X à l'instant 0, qu'on le laisse évoluer jusqu'à l'instant T où l'on inverse toutes les vitesses, il reviendra en parcourant dans l'ordre inverse toutes les positions précédentes, et se retrouvera à l'instant $2T$ dans la configuration X inversée. Pour exprimer cela de manière précise il faut un vocabulaire précis. Ce qu'on entend par

L'irréversibilité

configuration est en fait la *configuration en phase*: c'est la donnée des positions *et des vitesses* de toutes les molécules. Cette donnée caractérise l'état *microscopique* du système; en fait l'état microscopique à un instant donné *est* la configuration en phase. Inverser la *configuration en phase*, c'est simplement retourner les vitesses (sans modifier les positions). Le système revient alors en arrière en retrouvant dans l'ordre inverse les positions antérieures, mais avec des vitesses opposées.

Dans ces conditions, comment se fait-il que l'on observe l'irréversibilité? C'est justement la question posée par Joseph Loschmidt. Si on prend un gaz, initialement (c'est-à-dire à l'instant 0) comprimé dans un vase, il va se répandre tout autour et tendre à remplir tout l'espace disponible, mais on ne verra *jamaïs* un gaz répandu dans une grande pièce se comprimer progressivement et venir se concentrer dans un vase en faisant le vide alentour. Or, c'est bien ce qui devrait se produire si, une fois le gaz uniformément répandu dans la grande pièce, on inversait exactement la vitesse de chacune des $N \sim 10^{23}$ molécules qui le composent. Mais il faut inverser *exactement* les N vitesses. Si une seule de ces $N \sim 10^{23}$ vitesses est mal inversée, le mouvement de retour commencera effectivement comme l'inverse du mouvement précédent (c'est-à-dire que le gaz commencera à se recomprimer après l'inversion des vitesses), mais cela ne durera pas: l'unique vitesse mal inversée modifiera peu à peu (et en fait assez rapidement) les vitesses des autres molécules à cause des innombrables chocs, jusqu'à ce que la totalité du système soit brouillée (par le phénomène du chaos déterministe) et ne ressemble plus du tout au mouvement inverse. Même si l'unique vitesse mal inversée diffère très peu de l'inversion exacte, cela suffira à créer le chaos au bout d'un temps très court; si la différence entre la vitesse mal inversée et l'inverse exact est ε , et si le nombre de molécules est N , ce temps sera de l'ordre de $(1/\varepsilon)10^{-N}$. Il faudrait donc prendre $\varepsilon \sim 10^{-N}$ pour que ce temps soit de l'ordre de la seconde. Cela signifie que l'erreur dans le retournement de la vitesse devrait porter sur la N ème décimale. Si N est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit $N \sim 10^{23}$, on voit ce que cela signifie!

On voit apparaître ici une des raisons pour lesquelles la parfaite réversibilité du mouvement microscopique des molécules ne se reflète pas au niveau des apparences macroscopiques: c'est parce qu'il est *essentiellement* impossible d'inverser les vitesses avec une telle précision. Cependant cette raison n'est pas la seule. Une autre est qu'il est tout aussi essentiellement impossible d'inverser (même approximativement) les vitesses de toutes les N molécules; ce serait possible s'il n'y avait que cinq ou dix molécules, mais la difficulté qui intervient ici croît exponentiellement avec leur nombre.

Ces deux raisons ont en commun qu'elles ne sont pas liées à la nature physique du gaz, mais aux limites humaines. On pourrait en faire abstraction pour se concentrer sur l'objet (le gaz) en tant qu'existant indépendamment de l'homme et de ses limites. Par exemple en tenant un raisonnement comme celui-ci (déjà cité au chapitre **I**) :

“Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.

Pierre-Simon Laplace

Essai philosophique sur les probabilités (1819)

3. Un modèle simple

Pour comprendre exactement le mécanisme probabiliste qui transforme la réversibilité des mouvements microscopiques en irréversibilité, le mieux est comme toujours de commencer par étudier un modèle simple, qui soit suffisamment analogue aux gaz pour avoir en commun avec ceux-ci la propriété qui fonde l'irréversibilité. Dans un échantillon macroscopique de gaz, il y a de l'ordre de 10^{23} molécules qui se déplacent en tous sens selon trois dimensions et entrent sans cesse en collision mutuelle. C'était du moins le modèle envisagé par James Maxwell en 1860. Contentons nous de deux dimensions et de 200 molécules qui, au lieu de se heurter entre elles, ne font que rebondir sur la paroi du récipient. Ce récipient sera (puisque nous sommes en deux dimensions) une courbe fermée ovale.

Un tel modèle, considérablement simplifié, peut-il avoir assez de ressemblance avec le gaz de Maxwell pour justifier son emploi ?

— La différence la plus flagrante semble être la disparité entre le nombre d'Avogadro ($\sim 10^{23}$) et 200. En fait ce sera la moins lourde de conséquences, car ici les molécules n'interagissent pas entre elles, mais seulement avec la cloison ; en sorte que si on en augmente le nombre, cela ne changera rien au mouvement des 200 premières. On peut donc se faire une idée juste de l'évolution de N particules en extrapolant ce qu'on voit advenir pour 200.

— Un défaut plus significatif est la disparition des collisions entre particules. Nous verrons cependant, en faisant fonctionner notre modèle (tout comme nous l'avons vu pour le modèle de roulette au chapitre **I** section **5**), que ce qui produit la *stochasticité* de l'évolution est le phénomène du chaos déterministe : des molécules qui au départ sont parfaitement ordonnées (en rang d'oignon) seront au bout d'un certain temps *en apparence*

L'irréversibilité

complètement désordonnées et leur disposition semblera aléatoire. Or, supprimer les innombrables collisions mutuelles ne fait que ralentir ce brouillage par le chaos, mais ne le fait pas disparaître. Au contraire, l'avoir ralenti va le rendre plus visible, tout comme un film au ralenti rend plus visibles les détails fins d'un mouvement.

Ainsi ce second défaut est en réalité, pour la présente étude, une qualité ! Il faut cependant garder à l'esprit que la disparition des collisions n'est sans conséquences *que pour la discussion de l'irréversibilité* : notre petit modèle permettra de comprendre la notion d'entropie, mais serait très mauvais, et même absolument insuffisant, pour illustrer le rôle des autres grandeurs thermodynamiques telles que la pression, la température, l'énergie, la densité. Les relations mathématiques entre ces grandeurs et l'entropie, qui sont l'essentiel de la Thermodynamique puisqu'elles en expriment les lois, disparaissent complètement dans notre modèle simpliste.

— La seule différence majeure et essentielle (pour ce qui concerne la présente discussion) entre les vraies molécules d'un gaz et les points matériels de notre modèle est que le vrai mouvement moléculaire est quantique et non classique. Mais ce défaut existait déjà dans les théories de Maxwell et Boltzmann. C'est pourquoi nous excluons ici la discussion sur la nature quantique de l'entropie ou les fondements quantiques de l'irréversibilité ; cela mènerait beaucoup trop loin ! Il s'agira essentiellement de comprendre l'origine du paradoxe de Loschmidt, formulé en 1876, entièrement dans le cadre de la Mécanique classique. Pour cela le petit modèle convient parfaitement. D'ailleurs le paradoxe de Loschmidt s'explique par un mécanisme stochastique qui intervient de la même façon dans le cas quantique.

— Enfin, les différences liées à la dimension sont sans conséquences.

Voici alors des simulations numériques. Les positions et vitesses des molécules sont représentées par des symboles tels que :

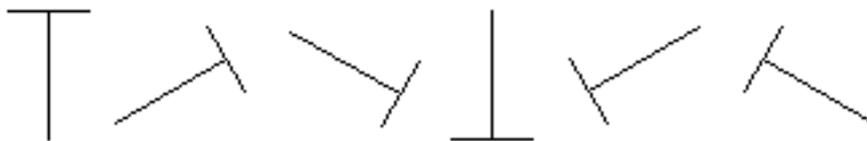


figure 64

de sorte que le pied du T pointe vers l'avant, le point d'intersection des deux segments du T représentant la position de la molécule et le pied du T le vecteur vitesse (ce vecteur reste constant en norme, les réflexions successives sur le bord du domaine ne modifiant que la direction du mouvement).

Au départ (instant $t = 0$) les molécules sont parfaitement alignées et équidistantes, comme ceci (les défauts de régularité qui apparaissent sont dûs aux arrondis):



figure 65

mais peu à peu les rebondissements successifs sur la paroi vont avoir pour effet de *brouiller* cet ordonnancement jusqu'à aboutir à un aspect entièrement désordonné. La rapidité de cette évolution dépend de la forme du récipient. Dans les figures 66 *a* à 66 *j* ci-après on voit l'état du mouvement à différents instants de $t = 0$ (66 *a*) à $t = 2000$ (66 *j*), lorsque le domaine est une ellipse.

On constate qu'un certain ordre partiel subsiste jusqu'à l'instant $t = 50$ (66 *g*), et dans une moindre mesure à l'instant $t = 200$ (66 *h*). Cette appréciation de "l'ordre" reste pour le moment mal définie et subjective, mais si cet "ordre" subsiste pendant un temps aussi long, c'est parce que l'ellipse est une courbe très particulière: le mouvement d'une particule qui rebondit sur une ellipse est un *mouvement non chaotique* (le système dynamique correspondant à ce mouvement est intégrable). En attendant plus longtemps encore ($t \sim 1000$) on a à première vue une *apparence* de désordonné, mais en regardant de plus près on verrait que certaines régions sont moins fréquentées que d'autres. On voit déjà à l'oeil nu sur la figure 66 *j* qu'il y a moins de points dans les régions proches des extrémités droite et gauche de l'ellipse. C'est que la plupart des trajectoires ne passent pas par ces points; en effet, selon que le point initial est situé entre les deux foyers ou à l'extérieur des foyers, les trajectoires seront comme sur les deux figures que voici (fig 67):

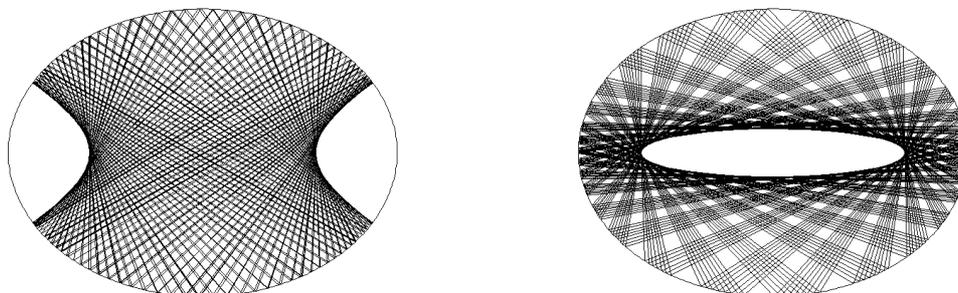


figure 67: trajectoires dans une ellipse.

L'irréversibilité

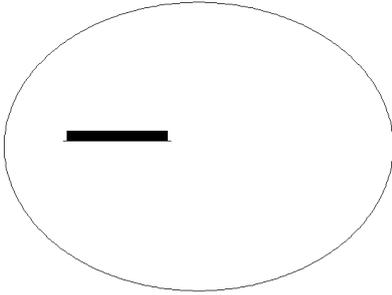


figure 66 a: $t = 0$.

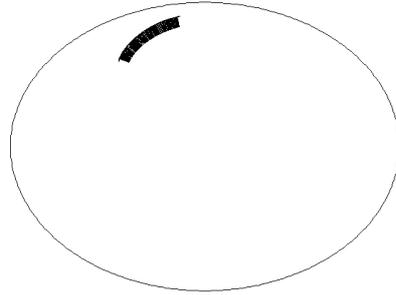


figure 66 b: $t = 0.25$.

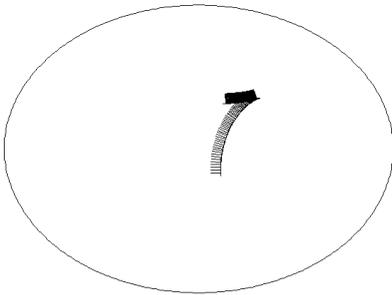


figure 66 c: $t = 1$.

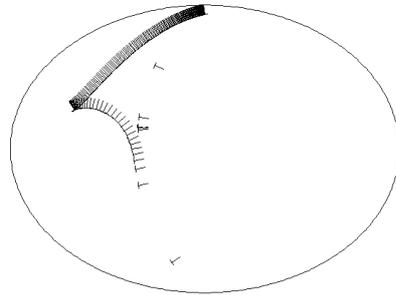


figure 66 d: $t = 3$.

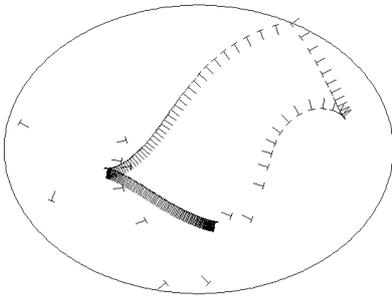


figure 66 e: $t = 8.00$.

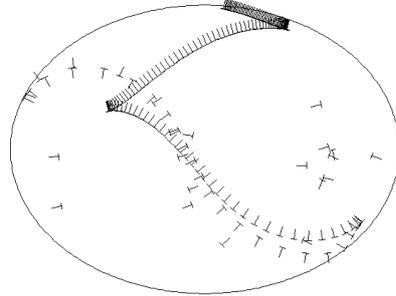


figure 66 f: $t = 16$.

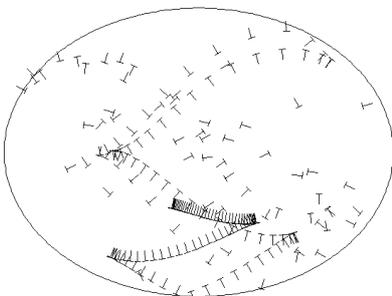


figure 66 g: $t = 50$.

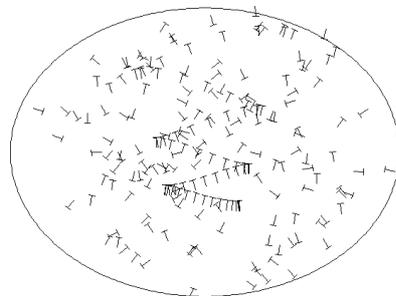


figure 66 h: $t = 200$.

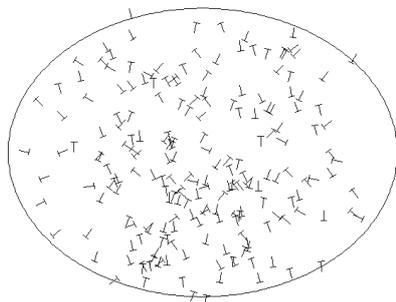


figure 66 i : $t = 1000$.

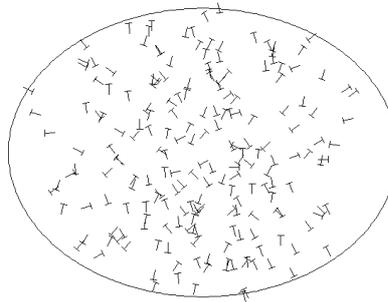


figure 66 j : $t = 2000$.

Or la majorité des points initiaux représentés sur la figure 66 a sont entre les deux foyers, en sorte que les trajectoires correspondantes sont comme sur la figure 67 à gauche.

Par conséquent, si on avait placé plus à gauche la rangée de points initiaux, en sorte que la majorité soit extérieure aux foyers, on verrait un vide dans la région centrale de l'ellipse.

Le phénomène illustré sur la figure 67 est semblable à ce qui se produit à l'intérieur d'un cercle et qui a été étudié en **I.5** (voir la figure 4).

Pour avoir une véritable évolution vers le désordre, et une similitude suffisante avec les gaz pour que le modèle discuté soit pertinent, il est essentiel d'avoir un système chaotique, qui garantit un brouillage suffisant. Pour cela, ni le cercle ni l'ellipse ne conviennent ; par contre l'*ovale de Cassini* convient très bien. Si on fait la même chose avec cette courbe, on voit en effet que la disparition de l'ordre est bien plus rapide. La différence est d'ailleurs flagrante en comparant les trajectoires obtenues pour l'ellipse (fig 67) à la figure 68, dont le caractère chaotique saute aux yeux. L'évolution vers un désordre apparent est alors bien plus rapide dans l'ovale de Cassini que dans l'ellipse, comme on le voit en comparant les figures 69 a à 69 p (pages suivantes) avec les figures 66 a à 66 j relatives à l'ellipse.

Cette fois, grâce à la chaotité du mouvement, on arrive dès $t = 50$ à une distribution apparemment faite au hasard. On peut s'en rendre compte visuellement en comparant avec une troisième série de figures (70 a, 70 b, 70 c, et 70 d), qui ont été fabriquées à l'aide d'une fonction **random**.

Comme on sait, les fonctions **random** ne produisent pas un hasard plus authentique que celui des figures 69, puisqu'elles exploitent elles aussi la chaotité et sont en réalité absolument déterministes.

Toutefois le point crucial pour la discussion qui va suivre n'est pas la similitude de nature entre les fonctions **random** et les trajectoires

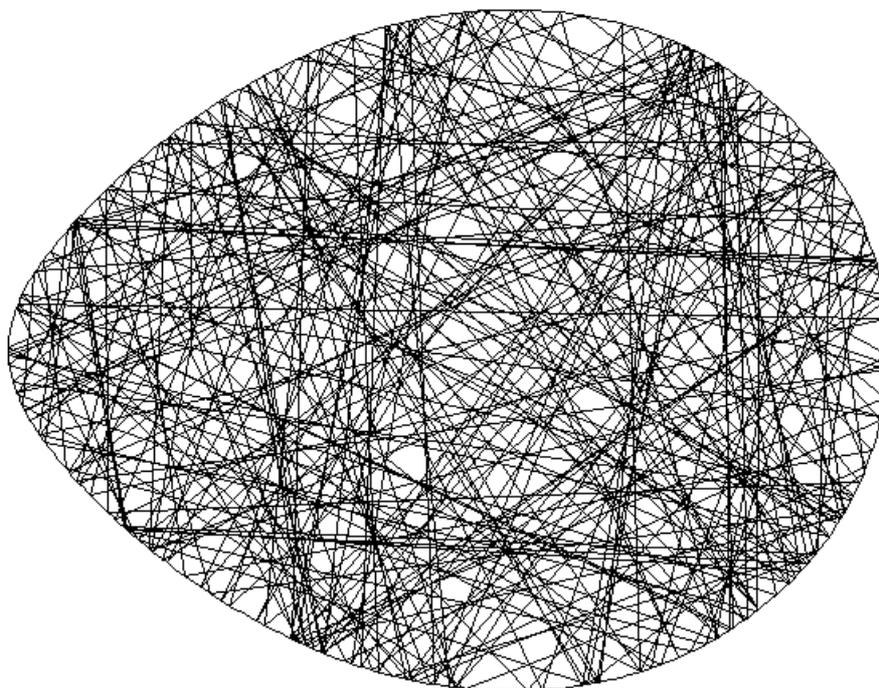


figure 68 : trajectoires dans l'ovide de Cassini.

chaotiques; mais que l'aspect désordonné de la distribution des molécules est purement subjectif: la ressemblance entre la distribution des figures 69 *m*, 69 *n*, 69 *o*, ou 69 *p*, et celles des figures 70 *a*, 70 *b*, 70 *c*, 70 *d* n'est qu'une apparence due à la non perception du fait pourtant essentiel que voici: si dans la figure 69 *m* on retourne chacune des 200 molécules, c'est-à-dire si on inverse la vitesse sans toucher à la position, on obtient une configuration qui aura l'extraordinaire propriété qu'après un temps $t = 200$, elle aboutit à un parfait ordonnancement (le rang d'oignon initial, avec vitesses pointant vers le bas), ce qui ne sera certainement pas le cas pour les configurations 70 *a*, 70 *b*, 70 *c*, 70 *d*. Autrement dit, la configuration 69 *m* n'est absolument pas une distribution "au hasard", c'est au contraire une distribution tout à fait exceptionnelle. On s'en doutait, puisqu'elle est l'effet d'un mouvement rigoureusement déterministe. C'est ce caractère exceptionnel des configurations comme 69 *m* (ou sa conjuguée obtenue en inversant les vitesses) qui est la clé du paradoxe de Loschmidt; mais pour en comprendre toutes les implications, il est indispensable de fixer un langage adéquat. Dans la section qui suit, on va donner un sens précis aux notions d'état *microscopique*, d'état *macroscopique*, et d'*entropie*, qui jusqu'ici n'avaient été qu'évoquées.

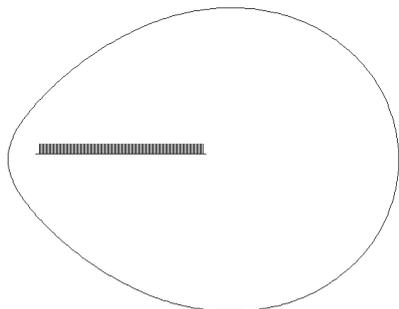


figure 69 a: $t = 0$.

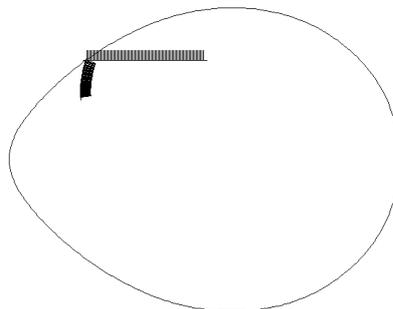


figure 69 b: $t = 0.16$.

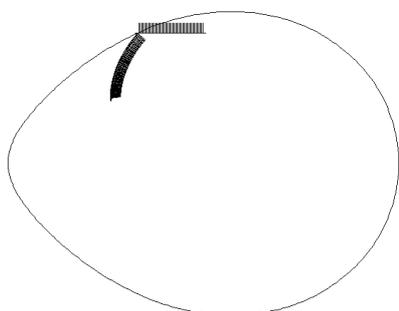


figure 69 c: $t = 0.21$.

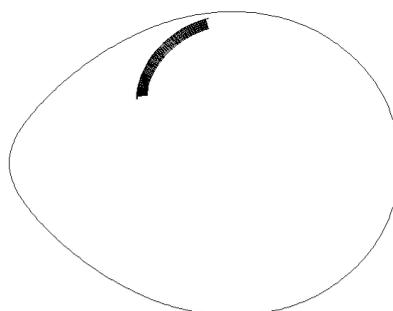


figure 69 d: $t = 0.25$.

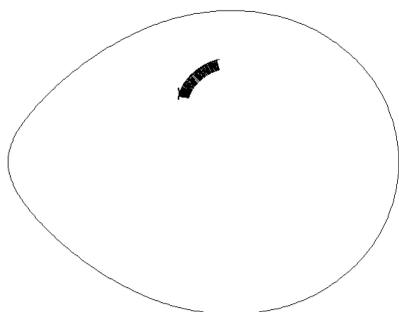


figure 69 e: $t = 0.32$.

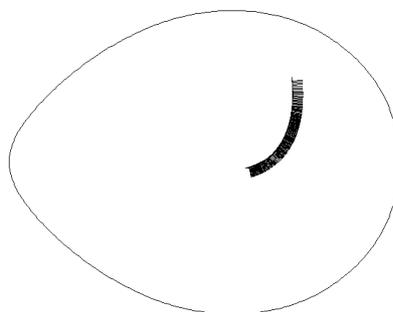


figure 69 f: $t = 0.50$.

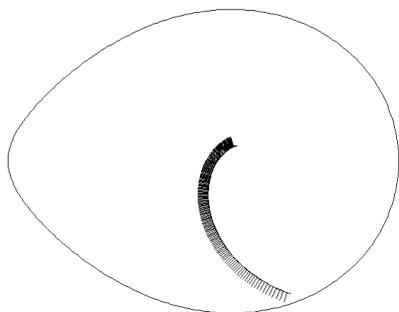


figure 69 g: $t = 1$.

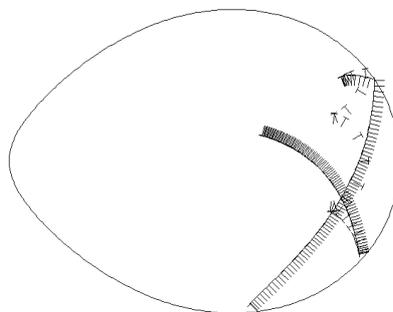


figure 69 h: $t = 2$.

L'irréversibilité

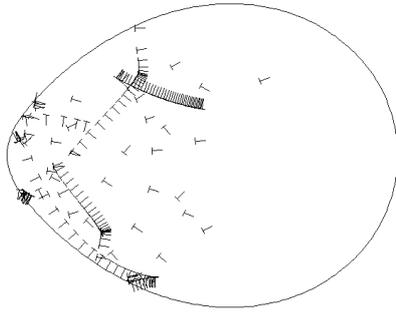


figure 69 *i*: $t = 3$.

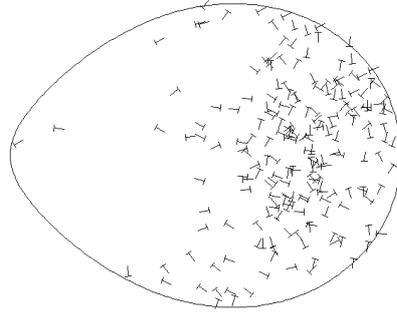


figure 69 *j*: $t = 8$.

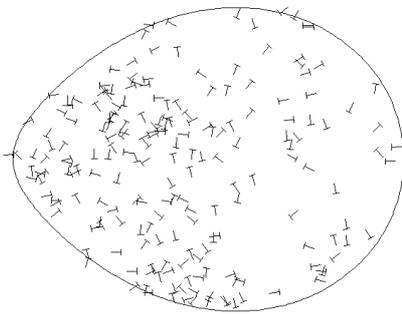


figure 69 *k*: $t = 16$.

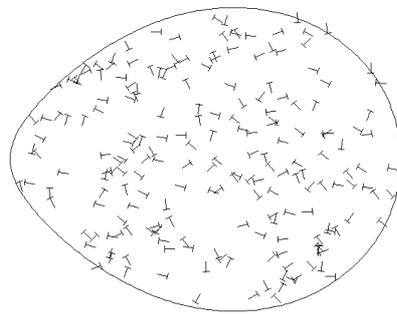


figure 69 *l*: $t = 50$.

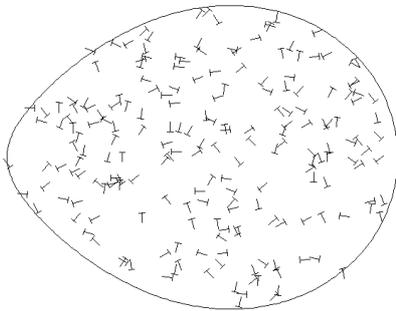


figure 69 *m*: $t = 200$.

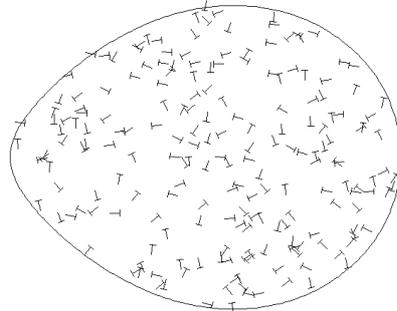


figure 69 *n*: $t = 900$.

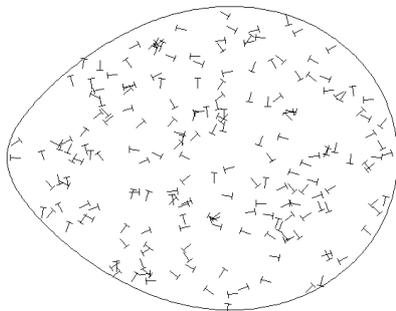


figure 69 *o*: $t = 2000$.

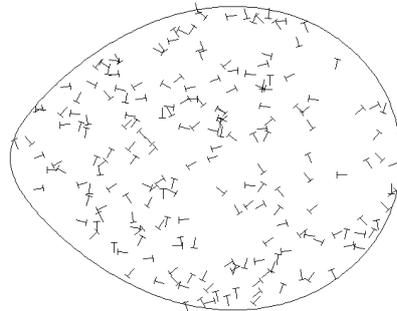


figure 69 *p*: $t = 2012$.

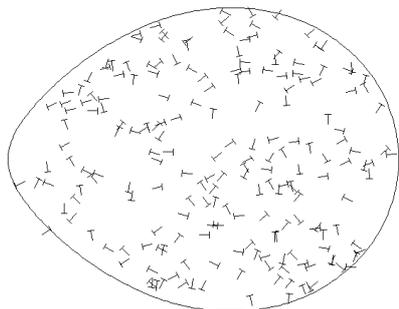


figure 70 a

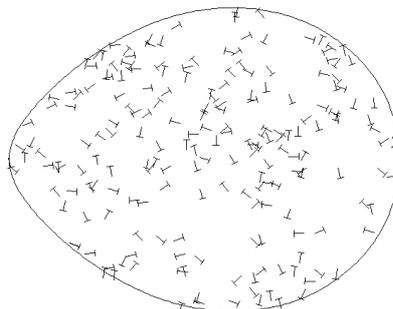


figure 70 b

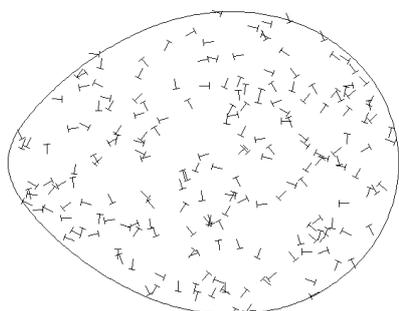


figure 70 c

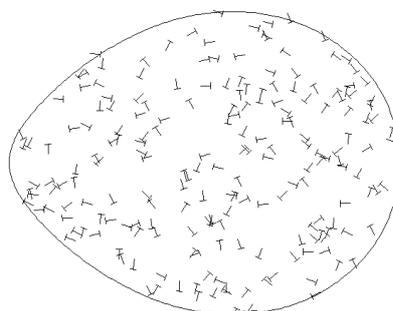


figure 70 d

figure 70 : configuration “au hasard”.

La position du point étant repérée par deux coordonnées x, y , et la direction par un angle θ , on a simplement pris $x = \mathbf{random}$, $y = \mathbf{random}$, $\theta = 2\pi \cdot \mathbf{random}$ (la fonction **random** retournant un flottant compris entre 0 et 1) et on n'a retenu que les points situés à l'intérieur de l'ovale.

4. Discussion du modèle.

On appellera *état microscopique* la donnée complète des positions et des vitesses de chacune des N molécules ; c'est la *configuration en phase* (les deux termes sont équivalents). Dans le petit modèle N est égal à 200, et il y a trois coordonnées pour chaque molécule (x, y , et θ) ; par conséquent un état microscopique est la donnée des $200 \times 3 = 600$ coordonnées correspondantes [En langage mathématique : c'est un élément de $(U \times [0, 2\pi])^{200}$, U étant le domaine bidimensionnel délimité par la courbe. Dans un vrai gaz $N \sim 10^{23}$, et il y a six coordonnées pour chacune (trois coordonnées de position dans l'espace, et les trois composantes du vecteur vitesse) ; un état microscopique est alors la donnée des $10^{23} \times 6$ coordonnées correspondantes. Pour pouvoir définir l'entropie, il est cependant nécessaire de *discrétiser* ces données, ce que nous allons faire dans le cadre du petit modèle. L'étendre au cas d'un vrai gaz ne changera conceptuellement rien.

L'irréversibilité

Une remarque au passage: la discrétisation est consubstantielle à la notion d'entropie; cette dernière ne peut prendre aucun sens sur la base d'un continuum d'états. Dans la réalité c'est la nature quantique des états microscopiques qui veut qu'ils soient naturellement discrets, sans qu'il soit nécessaire d'introduire une *discrétisation* artificielle. Le pas d'une telle discrétisation artificielle est arbitraire (changer sa valeur ne fait qu'ajouter une constante conventionnelle à l'entropie); il faut seulement qu'il soit petit (mais pas trop). Dans le cas quantique par contre, il n'y a pas de telle convention: le nombre d'états microscopiques est ce qu'il est et l'entropie est alors une grandeur absolue et non une grandeur définie à une constante additive près.

Pour discrétiser le petit modèle on supposera le domaine intérieur à la courbe (le récipient) découpé en petites cellules carrées, en sorte que les coordonnées x, y sont arrondies à la cellule la plus proche. Les figures ayant été réalisées numériquement il est naturel de considérer les pixels comme étant les cellules. L'échelle de ces figures est de 880 pixels par unité de longueur, ce qui fait que l'aire délimitée par la courbe ovoïde contient exactement 177 883 pixels. Alors le nombre de valeurs possibles pour (x, y) sera 177 883. Il faut aussi discrétiser l'angle. On supposera que celui-ci est simplement arrondi au *degré*; cette discrétisation qui découpe l'espace en pixels et l'angle en degrés, revient à découper l'espace des phases en pixels \times degrés, ce qu'on appelle des *cellules de phase*. Il y a en tout $Z = 360 \times 177\,883 = 64\,037\,880$ cellules de phase, en sorte que le nombre de possibilités de distribuer les 200 molécules sera $Z^{200} \simeq 1.94 \cdot 10^{1561}$. Autrement dit, il y a en tout environ $1.94 \cdot 10^{1561}$ états microscopiques possibles.

Un état *état macroscopique*, comme son nom l'indique, n'est défini que par des paramètres *macroscopiques*, donc indépendants de la connaissance détaillée des positions et vitesses des molécules. Par exemple l'information suivante:

“les molécules se répartissent uniformément
dans le récipient.” (1)

caractérise un état macroscopique; de même

“les molécules sont concentrées uniformément
sur le segment AB de l'axe horizontal, avec la
même vitesse.” (2)

Plus généralement, étant donnée une région \mathcal{R} du récipient,

“les molécules se répartissent uniformément dans la région \mathcal{R} , aucune ne se trouvant en dehors de cette région.” (3)

ou encore, étant donné un segment de courbe \mathcal{S} contenu dans le récipient :

“les molécules se répartissent uniformément le long de \mathcal{S} , avec leurs vitesses dirigées selon la normale au segment.” (4)

Ces spécifications ne prennent pas en compte les coordonnées et vitesses *individuelles* de chaque molécule : elles ne décrivent que des situations collectives. C'est cela qu'on appelle un *état macroscopique*. Le point crucial de cette définition est la notion de paramètre collectif. Par exemple la spécification (4) ne fait appel qu'aux paramètres qui décrivent le segment de courbe. Si c'est un segment de parabole, on donnera son équation $y = ax^2 + bx + c$, et les deux abscisses extrêmes du segment, x_0 et x_1 , en sorte que le segment sera l'ensemble des points x, y tels que $y = ax^2 + bx + c$ et $x_0 < x < x_1$. Les cinq paramètres a, b, c, x_0, x_1 sont alors les paramètres *macroscopiques* qui définissent l'*état macroscopique*. Ces paramètres ne contiennent d'information sur les coordonnées ou la vitesse d'aucune molécule particulière. Le fait que la vitesse est le vecteur normal à la courbe ne donne pas de renseignement sur les vitesses individuelles des molécules car on ne sait pas laquelle des molécules est à la base d'une normale particulière. Toutefois il peut arriver que la spécification macroscopique fournisse ce renseignement : par exemple la position initiale des molécules dans les figures 66a ou 69a correspond à un état macroscopique, caractérisé par une spécification du type (2) ci-dessus. Il s'agit d'un état macroscopique très particulier, car toutes les molécules ont exactement le même vecteur vitesse. Celui-ci devient alors un paramètre macroscopique dont la connaissance fournit évidemment aussi la vitesse de chaque molécule individuelle. Mais pas sa position. De la même façon, si toutes les molécules étaient au même endroit, les coordonnées de cet endroit deviendraient des paramètres macroscopiques, mais pas les vitesses (à moins qu'elles ne soient toutes égales, elles aussi).

Un même état macroscopique peut en général être réalisé par un grand nombre de configurations en phase, c'est-à-dire d'états microscopiques différents. On le comprend rien qu'en remarquant qu'une permutation entre les molécules ne change pas l'état macroscopique : par exemple si on prend la spécification (3) ci-dessus, on voit qu'elle demeure respectée si on ne fait

L'irréversibilité

qu'échanger les molécules entre elles. Par contre l'état microscopique n'est évidemment plus le même après permutation.

L'*entropie* d'un état macroscopique \mathcal{E} du système est alors définie comme étant le logarithme du nombre d'états microscopiques qui réalisent l'état macroscopique \mathcal{E} . Voyons cela sur les exemples (1), (2), (3), (4).

(1). Dans l'état (1), les molécules se répartissent uniformément sur l'ensemble du domaine ovoïde. Cela veut dire que la distance entre deux molécules voisines ne peut pas être trop petite, elle doit être du même ordre que la maille d'un quadrillage régulier de 200 mailles recouvrant l'ovoïde. Si Q est l'aire d'une telle maille, comptée en prenant pour unité la taille d'un pixel, et G le nombre de pixels contenus dans l'ovoïde (ici $G = 177\,883$), on doit avoir $Q = G/200 \simeq 889.415$. N'importe quelle répartition à peu près uniforme des molécules sur la surface de l'ovoïde doit avoir la propriété que chacune de ces molécules est seule dans une maille dont l'aire est à peu près 889 pixels. Tout se passe donc en gros comme si on devait placer les 200 molécules dans deux cents mailles ayant chacune une aire égale à 889 ou 890 pixels, de manière à n'avoir qu'une seule molécule par maille. Le nombre de possibilités est $Q^{200} \times 200! = G^{200} \times 200!/200^{200} \simeq 5.22 \cdot 10^{964}$. Comme les vitesses sont indifférentes puisque seule la place des molécules est prise en compte, et qu'il y a 360 vitesses en tout pour *chaque* molécule, on voit que le nombre d'états microscopiques est

$$\nu_1 = [360 \times Q]^{200} \times 200! \simeq 0.95 \times 10^{1476}$$

dont le logarithme (népérien) est environ 3398.56.

(2). Pour simplifier supposons que la longueur du segment soit 200 pixels. Le nombre de possibilités de ranger les 200 molécules est alors $200!$. La vitesse est imposée pour chaque molécule, il n'y a donc pas d'autre possibilité, en sorte que

$$\nu_2 = 200!$$

dont l'entropie est environ 863.23. Le calcul de l'entropie pour le cas où la longueur du segment n'est pas 200 est laissé en exercice (indication: c'est un problème de dénombrement du type traité au chapitre **II**, section **4**).

(3). On peut appliquer le raisonnement de (1) en remplaçant l'ovoïde par la région \mathcal{R} ; si $G_{\mathcal{R}}$ est le nombre de pixels couverts par cette région on aura

$$\nu_3 = [360 \times G_{\mathcal{R}}/200]^{200} \times 200!$$

En désignant par σ le rapport $G_{\mathcal{R}}/G$ (qui est aussi l'aire de \mathcal{R} en proportion de l'aire totale de l'ovoïde) on voit que $\nu_3 = \sigma^{200} \times \nu_1$ et l'entropie sera $3398.56 + 200 \ln \sigma$ ($\sigma < 1$ donc $\ln \sigma < 0$).

(4). La réponse est la même que pour (2) : le fait d'avoir une courbe au lieu d'une droite ne change combinatoirement rien.

On voit que l'entropie est bien la "mesure du désordre" comme on le dit dans la science populaire : les structures très ordonnées telles que (2) ou (4) ont une entropie bien plus petite que (1), tandis que (3) qui est un peu ordonné a une entropie un peu plus petite que (1). La structure la plus ordonnée possible est celle où toutes les molécules sont au même endroit avec la même vitesse ; comme on l'a signalé plus haut, cet endroit et cette vitesse uniques constituent les paramètres macroscopiques d'un tel état, et déterminent aussi les positions et vitesses individuelles de chaque molécule. Il n'y a que dans ce cas extrême que les paramètres macroscopiques déterminent les positions et vitesses individuelles de *chaque* molécule. Cela entraîne qu'il n'y a qu'un seul état microscopique sous-jacent possible, et par conséquent l'entropie de cet état macroscopique extrême est 0. Cela correspond à l'ordre maximal : on ne peut pas imaginer un état macroscopique plus ordonné que celui où la position et la vitesse de chaque molécule individuelle sont fixées.

C'est la notion d'état macroscopique, caractérisé par des paramètres macroscopiques, qui est la clé du paradoxe de Loschmidt. Ce paradoxe cesse de paraître paradoxal dès lors qu'on a compris ce qu'est un état macroscopique. Et pour bien comprendre ce qu'est un état macroscopique, le mieux est peut-être de voir ce qui *n'est pas* un état macroscopique. Je propose donc d'examiner la réversibilité microscopique en montrant qu'elle fait intervenir des états qui *ne sont pas* des états macroscopiques.

Considérons un système de molécules qui évolue d'un état \mathcal{B} (relativement ordonné) vers un état \mathcal{A} d'entropie maximale. L'argument de Loschmidt consistait à dire que, si on inverse le sens du temps, le système va revenir à l'état \mathcal{B} , donc pour chaque évolution qui fait croître l'entropie, il y en a une autre, symétrique, qui la fait décroître. Il y a donc "autant" d'évolutions microscopiques qui font croître l'entropie que d'évolutions microscopiques qui la font décroître et par conséquent on ne comprend plus pourquoi le premier cas est plus probable que le second (et encore moins pourquoi c'est *toujours* le premier cas qui se produit dans la nature).

Reprenons cet argument de Loschmidt dans le cadre de notre petit modèle. Supposons qu'à l'instant 0 on dispose les molécules dans l'état macroscopique de la figure 69a, en rang d'oignon sur l'axe horizontal, les vitesses, toutes identiques, pointées vers le haut. Il s'agit d'un état macroscopique du type (2), que nous pouvons appeler l'état \mathcal{B} . Lorsque le système évolue, il se trouvera à l'instant $t = 200$ dans la configuration de la figure 69m. Il s'agit d'une configuration en phase puisque les vitesses

L'irréversibilité

sont marquées, donc cette figure représente un état microscopique : chaque molécule est représentée par un T qui indique sa position et son vecteur vitesse (il manque la numérotation des molécules, mais leur trajectoire permettrait de les identifier). L'état macroscopique qui correspond à la configuration de la figure 69 *m* est un état du type (1) (les molécules sont réparties au hasard, à peu près uniformément), qui a l'entropie maximale, et qu'on appellera donc l'état \mathcal{A} . Aux instants ultérieurs ($t > 200$) l'état microscopique reste le même (figures 69 *n*, 69 *o*, et 69 *p*), mais évidemment l'état microscopique change à chaque instant. On a vu qu'il y avait $\nu_1 \simeq 10^{1476}$ états microscopiques différents qui donnent tous la même apparence macroscopique, celle de l'état \mathcal{A} . Lorsque le système continue d'évoluer après l'instant $t = 200$, il passe successivement par d'autres états microscopiques qui font tous partie de cet ensemble de ν_1 états microscopiques. Ce nombre ν_1 est énorme : au bout d'un temps t de l'ordre de un milliard, le système n'aura parcouru que quelques centaines de milliards d'états microscopiques, sur ν_1 en tout. Pour avoir une chance qu'il ait parcouru une proportion notable de ces ν_1 états microscopiques, il faudrait attendre que $t \sim 10^{1476}$. Et ici on considère un système de 200 molécules seulement ; avec 10^{23} (\sim nombre d'Avogadro) molécules, le nombre ν_1 serait de l'ordre de $10^{756\,916\,605\,020\,625\,000\,000\,000}$, et il faudrait donc attendre un temps du même ordre que ce nombre.

N'importe quel état macroscopique plus ordonné que \mathcal{A} a une entropie plus faible, mais l'entropie n'étant que le logarithme du nombre d'états microscopiques sous-jacents, le nombre de ces états sera énormément plus faible. On a vu que l'entropie de \mathcal{A} est environ 3398 ; un état \mathcal{A}' d'entropie 3300 aura $e^{98} \simeq 10^{43}$ fois moins d'états microscopiques sous-jacents. On comprend donc pourquoi il est extrêmement peu probable que le système tombe précisément sur un de ces très rares états macroscopiques de plus faible entropie. C'est bien ce qu'on observe : si on laisse le programme qui simule l'évolution représentée sur les figures 69 *a* à 69 *p* tourner, on devra attendre vraiment très longtemps avant de voir apparaître "spontanément" un état macroscopique de plus faible entropie. Le temps qu'il faudra attendre sera évidemment inconcevablement plus long pour 10^{23} molécules que pour 200. Si on désigne par δ la durée moyenne d'un état microscopique, c'est-à-dire le temps pendant lequel le système reste dans une cellule de phase (δ est de l'ordre de 10^{-12} secondes pour un gaz, de 10^{-2} pour le petit modèle), alors on peut dire que le temps moyen au bout duquel se produira spontanément une baisse d'entropie de ΔS est en gros $T = \delta \times \exp\{\Delta S\}$. Après un temps petit devant T une diminution de ΔS est pratiquement impossible, mais au bout d'un temps qui serait grand devant T (ne serait-ce que $100 \times T$), une diminution d'entropie de ΔS devient par contre presque certaine. Il s'agit

évidemment du même phénomène que celui qui a été étudié à la section **V.4**. Le paradoxe de Loschmidt n'existerait pas si l'espérance de vie des humains était de l'ordre de $10^{756\,916\,605\,020\,625\,000\,000\,000}$ années. Mais la loi de croissance de l'entropie serait alors fausse.

En revenant à l'inversion du temps, on arrive à la conclusion suivante : si on retourne en arrière, c'est-à-dire si à l'instant $t = 200$ on inverse brusquement toutes les vitesses dans la configuration de la figure 69 *m*, le système reviendra effectivement à la configuration de la figure 69 *a* (avec vitesses inversées) à $t = 400$. Mais ce que dit le second principe de la Thermodynamique, c'est justement qu'on ne peut pas effectuer une telle inversion *dans les systèmes physiques*. Aucun physicien ne peut en laboratoire produire une telle inversion. Pour réussir une telle expérience, il faudrait, après avoir laissé le système évoluer pendant un certain temps, retourner les vitesses de chaque molécule individuelle *sans rien perturber d'autre*. Il faudrait aussi que ce retournement soit extrêmement précis : la moindre erreur ferait qu'au retour on retrouverait une configuration entièrement différente de celle qui est attendue, c'est-à-dire la configuration initiale inversée. Il n'existe aucun moyen physique d'effectuer une telle inversion. En réalité, ce que dit le second principe de la Thermodynamique n'est pas tant que l'entropie est toujours croissante (ceci en est une formulation mathématique et abstraite) ; le sens concret de ce principe est :

Il est impossible d'effectuer, sur un système matériel, une inversion exacte des vitesses individuelles des molécules.

Essayons d'imaginer concrètement ce que serait une expérience de ce type, c'est-à-dire une expérience mettant en défaut le second principe. On voudrait préparer un système (par exemple un gaz) de manière que :

- a) L'état macroscopique immédiatement après la préparation est d'entropie maximale ;
- b) Si après la préparation on laisse évoluer le système à l'abri de toute influence extérieure, il évoluera vers un état macroscopique de moindre entropie.

Pour mieux comprendre revenons à notre petit modèle ; on voudrait qu'au départ la configuration soit analogue à celle de la figure 69 *m*, et qu'après évolution elle devienne analogue à celle de la figure 69 *a*. Pour que cela ait une chance de marcher il faut évidemment prendre les configurations avec les vitesses inversées. On voit aisément sur le petit modèle que la préparation doit obligatoirement consister à réaliser la configuration de la figure 69 *m* (avec vitesses inversées). Si on se trompe dans cette préparation, on ne retrouvera pas la configuration de la figure 69 *a* mais une autre, qui avec une

L'irréversibilité

quasi certitude sera d'entropie maximale. Pour retrouver la configuration de 69 *a* (avec vitesses inversées) il faudra viser extrêmement juste.

Une petite remarque en passant : dans ce petit modèle, si on se trompe sur une seule des 200 vitesses, les 199 autres étant correctes, il n'y aura qu'une seule molécule qui ne reviendra pas sur sa position de la figure 69 *a*. Mais cela est uniquement dû au fait que ce modèle trop simpliste ne comporte pas de collision entre molécules : l'évolution de chaque molécule étant indépendante des autres, une erreur sur une seule molécule n'aura aucune conséquence sur les 199 autres. Dans un vrai gaz, les molécules entrent en collision des milliards de milliards de fois par seconde. Alors la moindre erreur sur une molécule se répercute rapidement sur l'évolution de toutes les autres. D'autre part le petit modèle est numérique et non physique : il est possible de créer *numériquement* un état initial qui évoluera en faisant diminuer l'entropie, il suffit pour cela de calculer d'abord l'évolution de 69 *a* vers 69 *m*, avec les valeurs des positions et des vitesses dans un tableau, puis d'effectuer numériquement l'inversion. Le second principe dit qu'il n'existe pas de procédure analogue pour un système physique.

Et voilà la solution du paradoxe de Loschmidt. Le nombre d'états microscopiques susceptibles de donner l'apparence macroscopique de la figure 69 *m* est $\nu_1 \sim 10^{1476}$. Mais parmi ces ν_1 états microscopiques, il n'y en a que $\nu_2 = 200! \sim 10^{375}$ qui correspondent à la configuration précise de la figure 69 *m*, celle qui, après retournement, est en mesure de revenir à la configuration en rang d'oignons. Cela résulte de la symétrie par retournement du temps.

En effet, la symétrie par retournement du temps des équations de la Mécanique, qui est invoquée dans l'argument de Loschmidt, se traduit ainsi : à chaque état microscopique C_0 , correspond un *unique* état microscopique C_t qui est le résultat de l'évolution de C_0 après un temps t , et vice-versa. En termes mathématiques :

Théorème : *la transformation*

$$f : C_0 \mapsto C_t$$

est une bijection.

Démonstration : Il suffit de montrer que f possède un inverse f^{-1} . Or, si on appelle \overline{C} l'état obtenu en inversant toutes les vitesses de l'état C , la symétrie par retournement du temps peut s'énoncer sous la forme suivante :

“Si C_t est le résultat de l'évolution mécanique de C_0 après le temps t , alors $\overline{C_0}$ est le résultat de l'évolution mécanique de $\overline{C_t}$ après le temps t .”

Traduit en langage mathématique cela se dit, en désignant par Q la transformation $C \mapsto \overline{C}$:

$$f^{-1} = Q \circ f \circ Q$$

c'est-à-dire que f a un inverse, qui est la composition

$$f^{-1} : C_t \mapsto \overline{C}_t \mapsto \overline{C}_0 \mapsto C_0$$

C.Q.F.D.

C'est là la seule traduction logique de la symétrie par retournement du temps. Le fait que la transformation f soit inversible, donc bijective, entraîne évidemment que

le nombre d'états microscopiques distincts résultant de l'évolution pendant un temps donné d'un ensemble de n états microscopiques initiaux, est exactement égal à n .

ou, de manière équivalente en passant aux conjugués:

le nombre d'états microscopiques distincts qui, après évolution rétrograde pendant un temps donné, redonneront un ensemble de n états microscopiques initiaux, est exactement égal à n .

C'est donc la symétrie par retournement du temps qui permet de dire que

parmi les $\nu_1 \sim 10^{1476}$ états microscopiques susceptibles de donner l'apparence macroscopique de la figure 69 m, il y en a exactement $\nu_2 = 200! \sim 10^{375}$ qui redonneront par retour la configuration en rang d'oignons initiale."

Résumons tout cela sous la forme d'un argument général, non lié au petit modèle: si on veut préparer un système qui au départ se trouve dans un état macroscopique \mathcal{A} d'entropie maximale $S_{\mathcal{A}}$ afin qu'il évolue vers un état macroscopique \mathcal{B} d'entropie $S_{\mathcal{B}} < S_{\mathcal{A}}$, il faut le préparer dans un état microscopique extrêmement particulier: parmi les $\nu_{\mathcal{A}} = \exp\{S_{\mathcal{A}}\}$ états microscopiques susceptibles de donner l'apparence macroscopique \mathcal{A} , il faut en réaliser un parmi ceux qui évolueront vers \mathcal{B} ; d'après ce qu'on vient de voir, le nombre de ces états microscopiques est $\nu_{\mathcal{B}} = \exp\{S_{\mathcal{B}}\}$, puisqu'ils sont en bijection avec les états microscopiques qui produisent l'apparence \mathcal{B} .

Il en résulte que la proportion de ces états microscopiques exceptionnels parmi tous ceux qui produisent l'apparence macroscopique \mathcal{A} est égale à $\nu_2/\nu_1 = \exp\{S_{\mathcal{B}} - S_{\mathcal{A}}\}$. Dans le cas du petit modèle et de l'évolution entre les figures 69 a et 69 m, cette proportion est $\nu_2/\nu_1 \simeq 10^{-590}$

C'est le problème de cette préparation qui est omis dans le raisonnement de Loschmidt. Le second principe de la Thermodynamique ne dit pas

L'irréversibilité

qu'*aucun* des états microscopiques sous-jacents à un état macroscopique \mathcal{A} ne peut conduire à un état macroscopique \mathcal{B} de moindre entropie; il dit que :

a) de tels états microscopiques sont extrêmement peu nombreux (au regard de tous ceux qui fournissent l'apparence macroscopique de \mathcal{A});

b) il est impossible d'en aménager un (par des manipulations sur le corps).

On peut préciser davantage en énonçant au lieu de b) :

c) il n'est possible de préparer que des états macroscopiques, sans contrôle aucun de l'état microscopique précis qui le réalisera.

La partie a) du principe est la conséquence rigoureuse de la symétrie par retournement du temps, comme on l'a vu ci-dessus. La partie b) ou c) est un fait empirique du même type que

"Il est impossible de réaliser un mouvement perpétuel"

dont on sait que c'est une formulation alternative de la conservation de l'énergie, ou que

"Tous les hommes sont mortels"

Bien sûr, dans le programme numérique qui calcule l'évolution des 200 molécules du petit modèle, il est possible de "préparer" n'importe quel état microscopique; si on donne aux variables les valeurs initiales correspondant à la configuration de la figure 69 *m*, avec les vitesses en sens opposé, et qu'on laisse le programme calculer, les 200 molécules viendront bien sagement se ranger en rang d'oignon après un temps $t = 200$. Mais il est impossible de réaliser une telle initialisation de manière *physique*, avec un gaz ou avec tout autre corps matériel. C'est cela que dit le second principe. Le second principe ne s'applique pas aux simulations numériques, car ces dernières permettent de contrôler les états microscopiques.

Prenons un exemple fréquemment invoqué dans les manuels de Physique, celui d'un gaz qui au départ est concentré dans la moitié gauche d'un réservoir (immédiatement après que l'expérimentateur ait retiré une cloison de séparation), et qui ensuite se répand dans la partie laissée vide. L'état macroscopique initial est extrêmement peu probable, en ce sens que, si on voulait attendre qu'il se produise spontanément par le seul fait du hasard, il faudrait attendre pendant un temps fantastique: la probabilité étant 2^{-N} (pour N molécules), ce temps serait de l'ordre de 2^N (si $N = 10^{23}$, $2^N \sim 10^{301\,030\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$) Si l'expérimentateur pouvait préparer un gaz dans l'un des états microscopiques exceptionnels où les molécules, quoique distribuées uniformément entre les deux moitiés du récipient, le

seraient de manière à évoluer vers l'état où toutes les molécules seront dans la moitié gauche du récipient, il obtiendrait évidemment une violation de la loi de croissance de l'entropie. Mais parmi tous les états pour lesquels la distribution est uniforme, il n'y en a qu'une proportion 2^{-N} qui soit un tel état exceptionnel. Ces états exceptionnels ne forment pas un état macroscopique, ou plus exactement celui qu'ils forment (la distribution uniforme) est réalisé *aussi* par d'autres états microscopique non exceptionnels, qui sont 2^N fois plus nombreux. L'expérimentateur ne peut pas, en agissant sur des paramètres macroscopiques (les seuls qui soient sous son contrôle), préparer le gaz dans un de ces états exceptionnels. C'est ce que dit la partie b) du second principe.

Ainsi, ce qui n'a pas été pris en compte dans le paradoxe de Loschmidt, et c'est justement cela qui crée le paradoxe, c'est que les états microscopiques susceptibles de conduire à une diminution d'entropie sont des états qu'il est impossible de préparer. La symétrie de la Mécanique par rapport à l'inversion du temps, qui était à la base du raisonnement, existe bien. Mais elle s'applique de la manière suivante: puisque les états microscopiques susceptibles de conduire à une diminution d'entropie sont des états absolument exceptionnels, alors par inversion du temps on peut dire de manière équivalente que *les états microscopiques réalisés au cours de l'évolution mécanique à partir d'un état initial d'entropie non maximale sont aussi des états absolument exceptionnels*. Ces états restent, tout au long de l'évolution, inclus dans un ensemble de $\exp\{S_{\mathcal{B}}\}$ états microscopiques exceptionnels (\mathcal{B} étant l'état macroscopique initial), mais leur apparence macroscopique change, et devient celle d'un état macroscopique qu'une infinité d'autres états microscopiques *non exceptionnels* réaliseraient tout aussi bien. Or, pour cette infinité d'autres états microscopiques, l'inversion du temps ne conduit pas du tout à une diminution de l'entropie.

Une fois admis l'énoncé b) ou c), qui interdit l'accès au contrôle microscopique des paramètres, il ne reste plus qu'une possibilité de réaliser un de ces états microscopiques exceptionnels qui évoluerait vers une entropie moindre: compter sur la chance. Puisqu'il n'y a aucun contrôle possible, on peut essayer de réaliser un grand nombre de fois un état macroscopique d'entropie maximale, en espérant qu'une fois, par hasard, ce soit un "bon" état microscopique qui le sous-tende. Mais l'énormité des nombres tels que ν_1 rend cette entreprise absolument utopique. On a vu plus haut, dans le cadre du petit modèle, qu'il faudrait réaliser $10^{1476}/10^{375} = 10^{1101}$ fois un état macroscopique d'entropie maximale pour avoir une chance de le voir sous-tendu par un "bon" état microscopique. Pour un corps formé de 10^{23} molécules il faudrait répéter l'essai environ $10^{756\,916\,605\,020\,625\,000\,000\,000}$ fois.

5. Conclusion.

L'expérience de pensée qui consisterait à préparer un état microscopique exceptionnel a été imaginée par Maxwell en 1867 (voir [7]) sous la forme d'un très petit système capable d'observer instantanément la vitesse de chaque molécule et d'effectuer une sélection ou correction de trajectoire. Un tel système — appelé depuis *démon de Maxwell* — permettrait, en sélectionnant les positions et vitesses individuelles de chaque molécule, de préparer n'importe quel état microscopique voulu à l'avance, en particulier ces états exceptionnels qui évoluent en faisant décroître l'entropie.

Dans beaucoup d'ouvrages de Physique statistique, on évoque l'idée du démon de Maxwell, puis on montre par des arguments plus ou moins quantitatifs selon les auteurs, que le second principe *interdit* l'existence d'un tel démon. L'argumentation consiste à montrer que la mise en oeuvre du démon de Maxwell coûte plus cher en entropie que ce qu'elle est censée en économiser. Cela revient à poser la croissance de l'entropie comme axiome, et à en déduire l'impossibilité d'un démon de Maxwell. Mais entre deux assertions logiquement équivalentes, poser l'une comme axiome et l'autre comme conséquence est affaire de pure convention. Il serait tout aussi logique de postuler l'impossibilité d'un démon de Maxwell pour en déduire la croissance de l'entropie. Comme on sait, on peut de manière tout à fait analogue démontrer l'impossibilité du mouvement perpétuel à partir de l'axiome de la conservation de l'énergie, mais beaucoup d'auteurs du *XIX^e* siècle ont préféré poser l'impossibilité du *perpetuum mobile* comme axiome premier, d'où se déduit la conservation de l'énergie.

Du point de vue de la seule logique, il est donc parfaitement indifférent de poser la croissance de l'entropie comme principe premier, ou de formuler le second principe par les énoncés a) et b) ci-dessus. Je soutiens cependant que la première formulation est au moins en partie responsable de la confusion qui entoure depuis toujours le problème de l'irréversibilité, et que je mentionnais à la fin de l'introduction. La formulation du second principe par les énoncés a) et b) a en effet deux avantages. Le premier avantage est de montrer très clairement la signification concrète, pratique, expérimentale, du second principe de la Thermodynamique, alors que la formulation par la croissance de l'entropie, plus éloignée des conditions pratiques, entretient une confusion, notamment par le fait que l'entropie n'est croissante que pendant des temps physiques, et non au sens mathématique. Cela permet aussi de séparer deux aspects complémentaires du second principe : l'énoncé a) exprime l'aspect purement probabiliste (celui qui est mis en avant dans l'interprétation statistique de l'entropie) ; l'énoncé b) exprime l'aspect empirique et phénoménologique (celui qui provient des limites humaines).

Le second avantage est de rendre moins mystérieuse la manière dont la réversibilité des mouvements microscopiques se traduit par l'irréversibilité des évolutions macroscopiques et donc d'éclaircir aisément le paradoxe de Loschmidt.

Les lois de la Physique sont des lois objectives du monde, mais elles concernent le monde phénoménal, tel qu'il est perçu par des êtres tels que nous. Les lois de la Thermodynamique décrivent le comportement des corps macroscopiques à l'aide de paramètres que nous pouvons manipuler et mesurer. Pour des êtres ayant la taille des molécules la physique serait très différente, elle montrerait un autre aspect du monde, objectif lui aussi, mais complémentaire. Le second principe contient cette dualité : les lois physiques expriment des propriétés de l'objet (le monde), mais aussi des propriétés du sujet qui observe le monde et établit ces lois. Le but de la Physique est certes de transcender la perception humaine pour atteindre une vérité plus profonde et inhumaine, et c'est bien ce que fait l'interprétation moléculaire de la Thermodynamique. Mais les limites humaines qui conditionnent la nature des lois physiques ne sont pas tant celles de la perception que celles de la complexité : la description exacte et complète du mouvement microscopique (peu importe ici que ce soit la classique ou la quantique), c'est-à-dire du mouvement individuel de toutes les molécules, ne nous est pas seulement interdite par nos facultés de perception, mais aussi par nos facultés de traitement de données. Or la complexité est bien plus difficile à transcender que la perception. C'est bien pourquoi il ne peut pas y avoir une Physique des mouvements moléculaires détaillés et c'est aussi pourquoi les lois de la Physique sont des lois que nous pouvons écrire et utiliser, et qui concernent des objets que nous pouvons observer et manipuler. Une loi dont la formulation exigerait $10^{639201738}$ symboles mathématiques ne peut pas être une loi de la Physique (ne serait-ce que parce jamais personne ne la découvrira). Pour échapper à ce second principe, Laplace devait invoquer "une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée".

L'énoncé b) exprime un fait empirique incontestable : il est impossible de préparer un état microscopique, on ne peut préparer que des états macroscopiques. Cet énoncé est consubstantiel au second principe.

Beaucoup d'ouvrages (en général des ouvrages non techniques, mais plutôt orientés vers les implications philosophiques) font état du fait qu'on n'a jamais pu prouver l'irréversibilité *mathématiquement*. On veut signifier par là qu'il n'y a aucun *théorème* qui fonde l'irréversibilité des évolutions macroscopiques sur la réversibilité des mouvements microscopiques. La tradition pseudo-scientifique que je mentionnais dans l'introduction se réclame

L'irréversibilité

de ce constat, qui est juste, et qui est d'ailleurs souvent rapporté par des auteurs à la compétence d'ailleurs incontestable, pour se justifier : “on n'a jamais pu le démontrer, donc vous voyez bien que le problème est encore ouvert, et par conséquent susceptible de nouvelles recherches que justement nous nous proposons de mener”. Or il est évident qu'un tel théorème ne peut pas exister, puisque les démonstrations mathématiques ne peuvent pas prendre en compte des faits empiriques tels que b). Et quand on démontre mathématiquement la seule partie a) du second principe, il est parfaitement logique qu'on ne puisse pas résoudre le paradoxe de Loschmidt ! Mais cela ne signifie pas que le paradoxe de Loschmidt demeure un problème ouvert. Il est parfaitement résolu par la prise en compte de b) et le raisonnement présenté à la section précédente.

En conclusion, je propose d'énoncer les principes de la Thermodynamique sous la forme que voici, qui me paraît beaucoup plus claire. Elle se prête en tous cas beaucoup moins aux malentendus que j'ai décrits dans cet article. Il ne s'agit pas de *remplacer* les énoncés usuels par ceux ci-dessous, mais de les compléter ou de les commenter par ceux ci-dessous.

Premier principe de la Thermodynamique :

“Il est impossible de réaliser un mouvement perpétuel”.

Deuxième principe de la Thermodynamique :

“Il est impossible de réaliser un démon de Maxwell”.

(i.e. il n'est possible de préparer que des états macroscopiques, sans contrôle aucun de l'état microscopique précis qui le réalisera.)

L'IRRÉVERSIBILITÉ : Annexes

On regroupé ici un choix de textes historiques. Le lecteur qui aura fait l'effort de les lire attentivement se rendra compte que ce qu'on appelle "le problème de l'irréversibilité" n'a pratiquement pas évolué au cours des âges. Chacun des auteurs cités est obligé à son époque de répéter ce que les précédents ont dit, parce qu'apparemment cela n'a pas été compris. Ce ne le sera probablement jamais. Ce constat a déjà été fait par d'autres auteurs. Par exemple un chapitre du livre de Rudolph Peierls, *Surprises in Theoretical Physics* [7], commence ainsi :

We turn next to one of the most fundamental questions of statistical Mechanics, to which the answer has been known to some for a long time, but does not appear to be known very widely even today. The question is about the precise origin of the irreversibility in statistical mechanics.

[7], page 73.

Je suis bien conscient que la résolution du «paradoxe de Loschmidt» demande une argumentation beaucoup trop longue pour retenir l'attention de lecteurs pressés; il m'a fallu un chapitre entier pour y parvenir. Il faut donc s'attendre à la persistance d'idées fausses, mais plus aptes à franchir la barrière de la communication. Je n'ai aucune illusion quant à l'impact de ce chapitre, qui ne sera lu en profondeur que par quelques esprits vraiment curieux et passionnés. Pour eux, j'ajoute cette annexe, qui rassemble quelques textes écrits par les plus grands, et à laquelle j'assigne un double objectif :

a) ces textes historiques sont un bon complément au chapitre, car chaque auteur apporte un éclairage différent ;

b) ces textes montrent que leurs auteurs, en leur temps, avaient déjà tout expliqué et tout dit.

1. Extrait de [4], (pages 18 – 20) :

<p>Si un système isolé est dans une situation sensiblement non uniforme, il évoluera en fonction du temps pour se rapprocher de la situation ultime la plus uniforme où il est en équilibre (à l'exception de fluctuations qui ont peu de chances d'être importantes).</p>
--

Irréversibilité

La conclusion [encadrée ci-dessus] affirme que quand un système macroscopique isolé évolue en fonction du temps, il tend à le faire dans une direction bien définie: depuis un état de moindre désordre vers une situation de

L'irréversibilité

plus grand désordre. Nous pourrions observer le processus du changement en filmant le système. Supposons maintenant que nous projetions le film à l'envers (c'est-à-dire que nous passions le film dans le projecteur en marche arrière) nous observerions alors sur l'écran le même *processus remontant le temps* c'est-à-dire le processus qui apparaîtrait si l'on imaginait que la direction du temps a été renversée. Le film sur l'écran serait vraiment très curieux en ce sens qu'il présenterait un processus par lequel un système évolue depuis un état de grand désordre vers une situation moins désordonnée, chose que l'on n'observe jamais en réalité. En regardant simplement le film sur l'écran, nous pourrions conclure, avec une complète certitude, que le film est projeté à l'envers.

Un processus est dit irréversible si le processus obtenu en changeant le signe du temps (celui qu'on observerait en projetant le film à l'envers) est tel qu'il n'apparaît pratiquement jamais en réalité. Mais tous les systèmes macroscopiques hors équilibre évoluent vers l'équilibre, c'est-à-dire vers une situation de plus grand désordre. (. . .)

Notons bien qu'il n'y a rien dans les lois de la mécanique régissant le mouvement des particules du système qui indique un sens privilégié pour l'écoulement du temps. En effet, imaginons que l'on prenne un film du gaz isolé en équilibre (. . .)

Commentaire : Ici il est fait référence à un "film", en fait une simulation numérique du mouvement de 40 molécules dans une boîte rectangulaire. Cette simulation est une des grandes innovations didactiques du *Berkeley Physics Course* (pages 9 et 24 – 25), dont la force visuelle ne peut être reproduite en citation; c'est pourquoi j'introduis ce commentaire. On peut mesurer le degré de désordre en donnant simplement en fonction du temps le *nombre de molécules situées dans la moitié gauche de la boîte*. La relation entre ce nombre et l'entropie n'est pas clairement définie, mais pour l'argumentation il suffit que les deux quantités aient le même type de comportement, qu'elles soient croissantes ou décroissantes en même temps et maximales ou minimales en même temps. Il s'agit donc de comprendre pourquoi on aboutit à l'irréversibilité alors que ce film est parfaitement réversible :

En regardant le film projeté sur l'écran, nous n'aurions aucun moyen de dire si le projecteur fonctionne dans le sens normal ou à l'envers. La notion de sens privilégié pour l'écoulement du temps n'apparaît que lorsque l'on considère un système macroscopique isolé dont nous avons de bonnes raisons de *penser* qu'il est dans une situation très spéciale non désordonnée à un certain temps t_1 . Si le système n'a pas été perturbé pendant longtemps et s'il atteint cette situation par le jeu des rares fluctuations à l'équilibre, il n'y a, en fait, rien qui indique le sens du temps. (. . .)

Suite du commentaire : Cette dernière phrase est capitale : supposons que le système ne subit aucune rupture de son mouvement normal (mouvement newtonien avec collisions mutuelles ou avec la paroi de la boîte, mais surtout pas avec autre chose, comme par exemple une nouvelle paroi séparant la boîte en deux). Cela exprime le fait que le système est isolé.

Il peut alors arriver que “par hasard” à un instant t_1 toutes les molécules se trouvent dans la moitié droite de la boîte. Cela n’arrive pas souvent : avec quarante molécules, en admettant qu’entre deux vues successives du “film” les molécules se soient déplacées en moyenne sur une distance de l’ordre du dixième de la largeur de la boîte, il faut laisser passer au moins 10^{13} vues instantanées pour avoir une chance d’observer cela. Avec 8 molécules, il suffirait de 2500 images, et avec 10^{24} molécules il faudrait quelque $10^{300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ images. Pour un film au format 16 mm, cela correspond à une durée de projection de l’ordre de 100 secondes pour 8 molécules, de 10 000 ans pour 40 molécules, $10^{300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ années pour 10^{24} molécules. Si vous regardez le film de 40 molécules pendant 10 000 ans, ne ratez pas l’instant où toutes les molécules seront dans la moitié gauche de la boîte (attention, l’événement ne dure qu’une fraction de seconde), car il serait dommage d’avoir attendu cet instant pendant 6000 ans et de le rater. Il n’aurait en effet guère de chances de se reproduire avant 10 000 nouvelles années. Lorsque cet événement se sera produit, découpez le morceau de film qui commence une minute avant et se termine une minute après et projetez le à l’endroit ou à l’envers. Il vous sera effectivement impossible de savoir lequel des deux sens de projection est plus réaliste que l’autre.

Mais dans aucune situation concrète de la vie réelle vous ne pourrez attendre $10^{300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ années pour voir un gaz se concentrer spontanément dans une moitié de récipient. Si vous voulez mettre un gaz dans une bouteille vous le ferez passer par un tuyau, poussé par une pompe. D’où la conclusion :

Le système évolue toujours vers une situation de plus grand désordre, que le temps se déroule en avant ou en arrière. La seule autre possibilité pour amener le système dans une situation particulière non désordonnée à un instant t_1 , c’est une interaction avec un autre système à un instant antérieur à t_1 [c’est-à-dire une *préparation*]. Mais dans ce cas, le sens du temps est indiqué par la connaissance de cette interaction avec un autre système à un autre instant précédant t_1 .

Les textes suivants parlent de la même chose, avec seulement des différences de style.

2. Extrait de [5], (vers la fin) :

Ce n’est en aucune façon le signe avec lequel on compte les temps qui constitue la différence caractéristique entre un état organisé et un état dénué d’organisation. Si, dans l’état que l’on a adopté comme état initial de la représentation mécanique de l’univers, on venait à inverser exactement les directions de toutes les vitesses sans changer ni leurs grandeurs ni les positions des parties du système ; si l’on parcourait, pour ainsi dire, à reculons, les différents états du système, ce serait encore un état non probable par lequel on

débuterait et un état plus probable qu'on atteindrait par la suite. C'est seulement pendant le laps de temps qui conduit d'un état initial très peu probable à un état ultérieur beaucoup plus probable, que les états se transforment d'une façon différente dans la direction positive des temps et dans la direction négative.

Et un peu plus loin

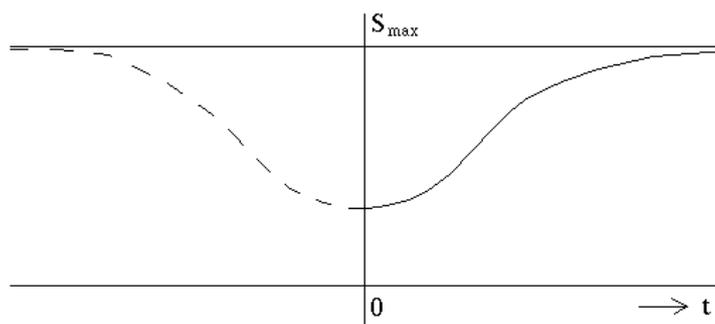
Pour l'univers tout entier, les deux directions du temps sont donc impossibles à distinguer, de même que dans l'espace, il n'y a ni dessus ni dessous. Mais, de même qu'en une région déterminée de la surface de notre planète, nous considérons comme le dessous la direction qui va vers le centre de la Terre, de même un être vivant dans une phase déterminée du temps et habitant un tel monde individuel, désignera la direction de la durée qui va vers les états les moins probables autrement que la direction contraire : la première sera pour lui le passé ou le commencement, et la seconde l'avenir ou la fin.

3. Extraits de [6] pages 75 – 81.

Peierls reprend d'abord le problème des molécules enfermées dans une boîte divisée par la pensée en deux moitiés (“the two chambers problem”) :

Some textbooks explain this paradox [Loschmidt's paradox] by saying that, whereas particle mechanics makes predictions about the motion of individual particles, statistical mechanics makes probability statements about large ensembles of particles. This is true, but it does not explain why the use of probabilities and statistics should create a difference between past and future where none existed before.

The real answer is quite different. Suppose from $t = 0$ when we assumed the particles distributed at random within each container and to move in random directions, we follow the particle trajectories, not for positive times, but negative t , i.e., into the past. This will give a curve for the entropy looking like the broken curve in figure [hereafter], and it will be the mirror image of the solid curve.

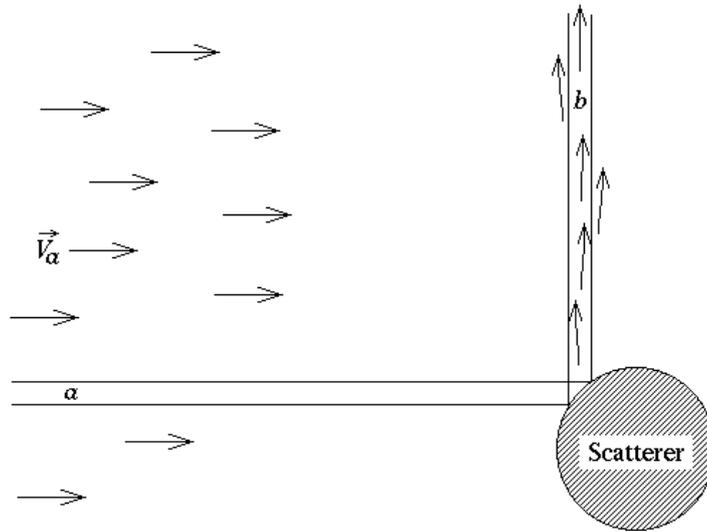


We see therefore that the symmetry in time is preserved fully in these two calculations. However, the solid curve to the right describes a situation which occurs in practice, and therefore provides the answer to a realistic question, whereas the broken curve to the left does not.

The situation to which the broken, left-hand curve would be applicable would be the following: Arrange for particles at $t = 0$ to be distributed in given numbers over the two chambers [the two parts of the box], their positions being random in each chamber, and their velocities having a Maxwell-Boltzmann

distribution. Ensure that prior to $t = 0$, at least after some finite $-T$, there was no external interference, and observe the state of affairs at $t = -T$. This is evidently impossible; the only way in which we can influence the distribution of molecules at $t = 0$ is by taking action prior to that time.

On reconnaît dans ce passage essentiellement le même argument que dans [4], [5], [6] cités ci-dessus. Mais Peierls aborde encore le problème par un autre côté (le “Stoßzahl Ansatz” de Boltzmann, “l’argument du nombre de collision”). Considérons un flux de molécules en mouvement uniforme de vitesse \vec{v}_a ; cela correspond à un état macroscopique d’entropie non maximale. Dans ce flux, découpons par la pensée un cylindre étroit parallèle à la direction de ce flux, le cylindre a comme sur la figure ci-après :



Les molécules du cylindre a , qui ont toutes la même vitesse \vec{v}_a , rebondissent sur l’obstacle diffuseur (“the scatterer”, hachuré sur la figure), en sorte que leurs vitesses après cette collision sont diverses puisque le diffuseur est supposé courbe. Par conséquent dans le cylindre b de la figure, il ne reste plus qu’une partie des molécules qui avant la collision étaient dans le cylindre a , mais elles s’ajoutent à celles qui étaient en dehors du cylindre a et qui ont poursuivi leur trajectoire à la vitesse \vec{v}_a sans rencontrer de diffuseur.

The Stosszahl Ansatz of Boltzmann now consists in the seemingly innocuous assumption that ρ_a [the density in cylinder a] equals the average density of molecules of this type anywhere in the gas, i.e., that there is nothing exceptional about the particular cylinder we have defined.

This assumption is the origin of irreversibility, because if it is true, the corresponding statement about the cylinder labeled b in the figure is *not* true. The only special thing about cylinder a is that it contains the molecules which are going to collide with the scatterer; cylinder b contains those which have just collided. In non-equilibrium conditions, for example in the presence of a drift

L'irréversibilité

motion in the a direction, there will be more molecules in the gas as a whole moving in the a direction than in the b direction. Scattering by the center will therefore tend to increase the number in the b direction. If ρ_a is the same as elsewhere in the gas, ρ_b must then be greater than the average.

If the scattering is compared to the time-reversed situation, we see a difference. To reverse the direction of time, we have to replace each molecule in b by one of the opposite velocity, and have them scattered by the target to travel in the direction opposite to that of a . The number would not be changed, and if ρ_b in the cylinder b differs from the average over the whole gas, it will also differ from what, with Boltzmann, we should assume about the inverse process.

It seems intuitively obvious that the molecules should not be influenced by the fact that they are going to collide, and very natural that they should be affected by the fact that they have just collided. But these assumptions, which cause the irreversibility, are not self-evident. If we assume, however, that the state of the gas was prepared in some manner in the past, and that we are watching its subsequent time development, then it follows that correlations between molecules and scattering centers will arise only from past, but not from future, collisions. This shows that the situation is, in principle, still the same as in our two-chamber problem.

L'argument n'est peut-être pas développé avec la clarté maximale, donc j'ajoute une petite explication supplémentaire. L'idée est ici la suivante: si au départ les molécules ont toutes la même vitesse \vec{v}_a , tout le monde comprend que, à cause du diffuseur, les vitesses après collision seront désordonnées. En retournant le temps, l'intuition sera choquée que des vitesses désordonnées aboutissent à un flux ordonné, parce que ce processus inverse donnera l'impression que les molécules du cylindre b devaient *savoir* comment elles allaient rebondir sur le diffuseur, et devaient ajuster leur vitesse de telle manière qu'après collision elle devienne égale à $-\vec{v}_a$. Elles devaient donc se déterminer d'après leur futur. Peierls veut ainsi montrer que l'inversion est contraire à la causalité.

We have recognized the origin of the irreversibility in the question we ask of statistical mechanics, and we have seen that their lack of symmetry originates in the limitations of the experiments we can perform. (. . .) As long as we have no clear explanation for this limitation, we might speculate whether the time direction is necessarily universal, or whether we could imagine intelligent beings whose time runs opposite to ours (. . .)

En attendant que l'on découvre l'explication de cette limitation, je propose de l'intégrer sans explication parmi les principes fondamentaux: *il est impossible de réaliser un démon de Maxwell*, tout comme on a fait pour l'inertie en attendant d'en trouver l'explication.

4. Extraits de [7] (chapitre 12). Ce passage de *Theory of Heat* se trouve quelques pages avant la fin. La partie qui décrit ce qui sera plus tard appelé *démon de Maxwell* — par Lord Kelvin, et avec la postérité que l'on sait — est extrêmement célèbre (“Imaginons cependant un être dont les facultés

seraient si pénétrantes . . . ”). Cependant la citation ci-dessous commence un peu avant ce passage célèbre et finit un peu au-delà afin de montrer qu’en 1871 Maxwell avait parfaitement compris que le point crucial du second principe n’est pas tant la croissance mathématique de l’entropie, que l’impossibilité de réaliser un état microscopique prédéfini. Cette lucidité pourra être confrontée à la confusion du débat qui perdure depuis 130 ans.

Un des faits les plus solidement établis de la Thermodynamique est que, dans un système qui est enfermé à l’intérieur d’une cloison ne permettant ni variation de volume ni échange de chaleur, et dont la température et la pression ont partout la même valeur, il est impossible de produire un écart de température sans fournir du travail. C’est là tout le sens du second principe de la thermodynamique; ce dernier est sans aucun doute vérifié tant que nous ne manipulons les corps que par grandes masses et que nous ne disposons pas du pouvoir d’identifier et de manipuler les molécules individuelles qui composent ces masses. Imaginons cependant un être dont les facultés seraient si aigües qu’il serait en mesure de suivre chaque molécule dans son mouvement, tout en étant comme nous mêmes de conformation essentiellement finie; alors il lui serait possible de réaliser ce qui nous est impossible. Car nous avons vu que les molécules d’un gaz de température uniforme contenu dans un récipient ne sont nullement animées de vitesses uniformément distribuées, bien que la vitesse moyenne soit pratiquement la même sur n’importe quel sous-ensemble suffisamment gros d’entre elles. Imaginons donc qu’un tel récipient soit divisé en deux parties *A* et *B* par une cloison séparatrice, dans laquelle serait pratiquée une petite ouverture et qu’un tel être capable de voir les molécules individuelles ouvre ou ferme cette ouverture de manière à ne laisser passer de *A* vers *B* que les seules molécules rapides, et de *B* vers *A* les seules molécules lentes. Cet être est ainsi en mesure de relever la température de la partie *B* au détriment de la partie *A* sans dépense de travail, ce qui est en contradiction avec le second principe.

Ce n’est là qu’un exemple parmi d’autres, dans lequel les conclusions que nous avons tirées de notre expérience avec les corps composés d’un grand nombre de molécules pourraient cesser d’être applicables à des méthodes d’observation et d’investigation plus fines telles que pourraient les mettre en oeuvre des êtres capables de percevoir et manipuler individuellement ces molécules que nous ne pouvons manipuler que par grandes masses.

Et puisqu’en les manipulant par masses nous n’avons aucun accès aux molécules individuelles, nous sommes bien obligés de recourir au calcul statistique; ce pas accompli, nous abandonnons la méthode dynamique rigoureuse, par laquelle nous calculons le détail de chaque mouvement individuel.

N. B. Le passage ci-dessus est l’origine historique du *démon de Maxwell*; c’est en effet dans *Theory of Heat* de 1871 que cette idée est publiée pour la première fois. Elle était cependant reprise d’une lettre de Maxwell à Peter Guthrie Tait en 1867.

5. Voici maintenant deux extraits de H. Poincaré. Le principal argument avancé par Poincaré est celui du nécessaire retour de n’importe quel système dynamique à des états déjà occupés dans le passé. Il s’agit de la propriété

L'irréversibilité

des systèmes dynamiques que, ou bien les trajectoires sont périodiques, ou bien elles remplissent de manière dense l'hypersurface d'énergie. Si le système a occupé à l'instant $t = 0$ un état microscopique défini par les valeurs de toutes les coordonnées et impulsions, alors au bout d'un temps fini T il repassera *aussi près qu'on voudra* de cet état initial après s'en être écarté. Ainsi, si l'entropie avait une valeur non maximale S_0 à $t = 0$, elle redescendra inévitablement à cette valeur à l'instant T , après avoir été maximale entretemps. Cet argument a été repris notamment par E. Zermelo dans [11] (voir extraits de [12] et [13] ci-dessous). On ne reproduira pas ici les travaux de Poincaré sur ce point, ils sont bien trop techniques et de toute façon sont fort connus. On les trouvera dans [9], mais aussi dans n'importe quel ouvrage actuel sur le chaos.

L'extrait qui suit concerne un autre théorème qui affirme qu'une fonction des coordonnées et des vitesses d'un système dynamique ne peut en aucun cas être monotone.

Extraits de [9] :

Parmi les tentatives qui ont été faites pour rattacher aux théorèmes généraux de la Mécanique les principes fondamentaux de la Thermodynamique, la plus intéressante est, sans contredit, celle que M. Helmholtz a développée dans son Mémoire sur la statique des systèmes monocycliques (Journal de Crelle, t. **97**) et dans son Mémoire sur le principe de la moindre action (Journal de Crelle, t. **100**). L'explication proposée dans ces deux Mémoires me paraît satisfaisante en ce qui concerne les phénomènes réversibles.

Les phénomènes irréversibles se prêtent-ils de la même manière à une explication mécanique; peut-on, par exemple, en se représentant le monde comme formé d'atomes, et ces atomes comme soumis à des attractions dépendant des seules distances, expliquer pourquoi la chaleur ne peut jamais passer d'un corps froid sur un corps chaud? Je ne le crois pas, et je vais expliquer pourquoi la théorie de l'illustre physicien ne me semble pas s'appliquer à ce genre de phénomènes.

Poincaré expose alors sa démonstration d'un théorème qui sera fréquemment invoqué dans la suite (voir plus bas les extraits de [14]). En voici le principe. Le système étant un système dynamique, on peut avoir les équations du mouvement exact de toutes les molécules sous la forme hamiltonienne; si les x_j sont les coordonnées et les p_j les impulsions des molécules, on aura [$H(x, p)$ étant l'hamiltonien du système] :

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad ; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad .$$

Si $S(t)$ est l'entropie comme fonction du temps on peut écrire

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial S}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) =$$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial S}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right)$$

et ceci doit être positif. Si un état quelconque du système correspond à l'équilibre, appelons $p_j^{(0)}$ et $x_j^{(0)}$ les coordonnées correspondantes et considérons le développement de Taylor des fonctions S et H en puissances de $p_j - p_j^{(0)}$ et $x_j - x_j^{(0)}$. Le terme linéaire est nul à cause du choix de l'origine. Poincaré écrit [j'ai modifié ses notations pour respecter les usages actuels] :

Pour ces valeurs ($p_j^{(0)}$ et $x_j^{(0)}$), les dérivées du premier ordre de S s'annulent, puisque S doit atteindre son maximum. Les dérivées de H s'annulent également, puisque ce maximum est une position d'équilibre et que dx_j/dt et dp_j/dt doivent s'annuler.

Si donc nous développons S et H suivant les puissances croissantes des $p_j - p_j^{(0)}$ et $x_j - x_j^{(0)}$, les premiers termes qui ne s'annuleront pas seront ceux du deuxième degré. Si, de plus, on considère les valeurs de p_j et de x_j assez voisines de $p_j^{(0)}$ et $x_j^{(0)}$ pour que les termes du troisième degré soient négligeables, S et H se réduiront à deux formes quadratiques en $p_j - p_j^{(0)}$ et $x_j - x_j^{(0)}$.

La forme H pourra être définie ou indéfinie. L'expression

$$\sum_j \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial S}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right)$$

sera encore une forme quadratique par rapport aux $p_j - p_j^{(0)}$ et aux $x_j - x_j^{(0)}$.

Pour que l'inégalité $dS/dt > 0$ soit satisfaite, il faudrait que cette forme fût définie et positive; or il est aisé de s'assurer que cela est impossible si l'une des deux formes S et H est définie, ce qui a lieu ici.

Nous devons donc conclure que les deux principes de l'augmentation de l'entropie et de la moindre action (entendu au sens hamiltonien) sont inconciliables. Si donc M. von Helmholtz a montré, avec une admirable clarté, que les lois des phénomènes réversibles découlent des équations ordinaires de la Dynamique, il semble probable qu'il faudra chercher ailleurs l'explication des phénomènes irréversibles et renoncer pour cela aux hypothèses familières de la Mécanique rationnelle d'où l'on a tiré les équations de Lagrange et de Hamilton.

Extraits de [10] :

Maxwell admet que, quelle que soit la situation initiale du système, il passera toujours une infinité de fois, je ne dis pas par toutes les situations *compatibles avec l'existence des intégrales, mais aussi près qu'on voudra* d'une quelconque de ces situations.

C'est ce qu'on appelle le *postulat de Maxwell*. Nous le discuterons plus loin. (. . .)

Et plus loin :

Tous les problèmes de Mécanique admettent certaines solutions remarquables que j'ai appelées périodiques et asymptotiques et dont j'ai parlé ici même dans un précédent article [9].

L'irréversibilité

Pour ces solutions, le postulat de Maxwell est *certainement faux*.

Ces solutions, il est vrai, sont très particulières, elles ne peuvent se rencontrer que si la situation initiale est tout à fait exceptionnelle.

Il faudrait donc au moins ajouter à l'énoncé du postulat cette restriction, déjà bien propre à provoquer nos doutes: *sauf pour certaines situations initiales exceptionnelles*.

Ce n'est pas tout: si le postulat était vrai, le système solaire serait instable; s'il est stable, en effet, il ne peut passer que par des situations peu différentes de sa situation initiale. C'est là la définition même de la stabilité.

Or, si la stabilité du système solaire n'est pas démontrée, l'instabilité l'est moins encore et est même peu probable.

Il est possible et même vraisemblable que le postulat de Maxwell est vrai pour certains systèmes et faux pour d'autres, sans qu'on ait aucun moyen certain de discerner les uns des autres.

Il est permis de supposer *provisoirement* qu'il s'applique aux gaz tels que la théorie cinétique les conçoit; mais cette théorie ne sera solidement assise que quand on aura justifié cette supposition mieux qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

On comprendra mieux l'ampleur du malentendu entre Poincaré (éminent représentant de la *Physique mathématique*) et la Physique réelle en évaluant *quantitativement* les grandeurs dont seules l'"existence", ou la "finitude", sont ici évoquées. En effet, le théorème de Poincaré sur l'éternel retour d'un système dynamique au voisinage de son état initial est un théorème qui s'énonce sous la forme:

"pour tout ε , il existe un temps T_ε au bout duquel le système repassera à une distance inférieure à ε de son état initial."

Poincaré interprète le second principe d'une manière analogue: pour lui, affirmer la croissance de l'entropie, c'est affirmer que pour tout $t' > t$ on doit avoir $S(t') \geq S(t)$. Or le principe *physique* est très différent; il dit que pour toute durée *physique* l'entropie ne peut diminuer que d'une valeur infime, et pendant un temps très bref. Le théorème de Poincaré affirme qu'il existe un temps T_ε au bout duquel l'entropie reprendra sa valeur initiale, mais il ne dit pas que ce temps est de l'ordre de $10^{300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ années, ni que la durée du retour à la valeur initiale est de l'ordre d'une fraction de seconde. Le vrai second principe ne dit pas sans autre précision que l'entropie est une fonction croissante du temps. Si on veut l'énoncer sous une forme vraiment complète, cela donne ceci:

a) *Pour tout état initial du système sauf un nombre infime, et pendant des durées ayant un sens physique [donc incomparablement plus courtes que 10^N , N étant le nombre de molécules], l'entropie du système ne s'écarte pas notablement d'une fonction croissante.*

b) *Pendant chaque seconde de la durée d'existence physique du système*

isolé, l'entropie ne cesse de croître et décroître des millions de fois, en effectuant des oscillations qui sont toujours imperceptibles, car il est absolument impossible qu'un écart notable se produise spontanément et "par hasard" avant des temps bien supérieurs à $10^{\sqrt{N}}$.

6. Et voici la réponse de Boltzmann aux arguments de Poincaré. Ces derniers ont été rapportés aux physiciens de langue allemande par E. Zermelo (Wiedemanns Annalen, 1896, vol. **57**, p. 485 et vol. **59**, p. 793).

Extraits de [12]:

Le mémoire de M. Zermelo "*Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie*" montre que mes travaux sur le sujet n'ont malgré tout pas été compris; en dépit de cela, je dois cependant me réjouir de cette publication comme étant la première manifestation de l'intérêt suscité par ces travaux en Allemagne.

Le théorème de Poincaré discuté au départ par M. Zermelo est bien entendu juste, mais son application à la théorie de la chaleur ne l'est pas. J'ai déduit la loi de répartition des vitesses de Maxwell du théorème probabiliste qu'une certaine grandeur \mathcal{H} (en quelque sorte la mesure de l'écart de l'état du système par rapport à l'état d'équilibre) ne peut, pour un gaz en repos dans un récipient, que diminuer. La meilleure façon d'illustrer le mode de décroissance de cette grandeur sera d'en représenter la courbe de variation, en portant le temps t en abscisse et la quantité $\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}_{\min}$ en ordonnée; on obtiendra ainsi ce que j'appelle la courbe \mathcal{H} . (. . .)

La courbe reste alors la plupart du temps tout près de l'axe des abscisses. Ce n'est qu'à des instants extrêmement rares qu'elle s'en écarte, en formant ainsi une bosse, et il est clair que la probabilité d'une telle bosse décroît rapidement avec sa hauteur. À chacun des instants pour lesquels l'ordonnée de la courbe est très petite, règne la distribution des vitesses de Maxwell; on s'en écarte notablement là où il y a une grosse bosse. M. Zermelo croit alors pouvoir déduire du théorème de Poincaré que le gaz ne peut se rapprocher constamment de la distribution de Maxwell que pour certaines conditions initiales très particulières, en nombre infime comparé à celui de toutes les configurations possibles, tandis que pour la plupart des conditions initiales il ne s'en rapprocherait pas. Ce raisonnement ne me semble pas correct. (. . .)

Si l'état [microscopique] initial du gaz correspond à une très grosse bosse, c'est-à-dire s'il s'écarte complètement de la distribution des vitesses de Maxwell, alors il s'en rapprochera avec une énorme probabilité, après quoi il ne s'en écartera plus qu'infinitésimalement pendant un temps gigantesque. Toutefois, si on attend encore plus longtemps, une nouvelle bosse notable de la courbe \mathcal{H} finira par se produire à nouveau et si ce temps est suffisamment prolongé on verra même se reproduire l'état initial. On peut dire que, si le temps d'attente est infiniment long au sens mathématique, le système reviendra infiniment souvent à l'état initial.

Ainsi M. Zermelo a entièrement raison quand il affirme que le mouvement est, au sens mathématique, périodique [ou quasi-périodique]; mais loin de contredire mes théorèmes, cette périodicité est au contraire en parfaite harmonie avec eux.

(Vienne, le 20 mars 1896)

Cette argumentation magistrale se poursuit, mais je l'interromps ici avec regret pour éviter de rendre cette anthologie trop longue.

Extraits de [13], suite de la réponse de Boltzmann aux objections de Zermelo.

Imaginons que nous retirions brusquement une cloison qui séparait deux gaz de nature différente enfermés dans un récipient [par exemple azote d'un côté et oxygène de l'autre]. On aurait du mal à trouver une autre situation où il y aurait davantage de variables aussi indépendantes les unes des autres, et où par conséquent l'intervention du Calcul des probabilités serait plus justifiée. Admettre que dans un tel cas le Calcul des probabilités ne s'applique pas, que la plupart des molécules ne s'entremêlent pas, qu'au contraire des parties notables du récipient contiendraient nettement plus d'oxygène, d'autres plus d'azote, et ce pendant longtemps, est une thèse que je suis bien incapable de réfuter en calculant dans le détail le mouvement exact de trillions [10^{12}] de molécules, dans des millions de cas particuliers différents, et d'ailleurs je ne veux pas le faire; une telle vision ne serait pas assez fondée pour remettre en question l'usage du Calcul des probabilités, et les conséquences logiques qui s'ensuivent.

D'ailleurs le théorème de Poincaré ne contredit pas l'usage du Calcul des probabilités, au contraire il parle en sa faveur, puisque ce dernier enseigne lui aussi que sur des durées fantastiques surviendront toujours de brefs instants pendant lesquels on sera dans un état de faible probabilité et de faible entropie, où par conséquent se produiront à nouveau des états plus ordonnés et même des états très proches de l'état initial. En ces temps prodigieusement éloignés dans le futur, n'importe quel écart notable de l'entropie par rapport à sa valeur maximale demeurera évidemment toujours hautement improbable, mais l'existence d'un très bref écart sera lui aussi [sur une telle durée prodigieusement longue] toujours hautement probable.

En effet, le Calcul des probabilités enseigne bien que si par exemple on jette une pièce mille fois il est très peu probable d'avoir mille fois face (la probabilité en est $2^{-1000} \simeq 10^{-301}$); mais si on la jette 10^{302} fois, alors on n'a qu'une chance sur 45 000 de ne *jamais* avoir une série de mille faces consécutives.

(reprise de la citation) Il est clair aussi, d'après cet exemple [celui de l'oxygène et de l'azote], que si le processus se déroule de façon irréversible pendant un temps observable, c'est parce qu'on est parti délibérément d'un état improbable.
(. . .)

(Vienne, le 16 décembre 1896)

7. Extraits de [14] pages 205 – 207. Cet extrait de *la nouvelle alliance* est particulièrement lumineux. Cependant on le comparera aux textes de Maxwell et Boltzmann ci-dessus pour constater que ce qui est expliqué là en 1979 était déjà bien compris par les pères fondateurs. Il est cependant prévisible que l'effort d'explication tenté par Prigogine et Stengers restera aussi vain que les efforts de Boltzmann, et que d'autres auteurs devront le répéter à nouveau en 2079.

Dès la publication du travail de Boltzmann en 1872, des objections furent opposées à l'idée que le modèle proposé ramenait l'irréversibilité à la dynamique. Retenons ici deux d'entre elles, l'une de Poincaré, l'autre de Loschmidt.

L'objection de Poincaré porte sur la question de la symétrie de l'équation de Boltzmann.

Pour éviter de rendre la citation trop longue ou d'avoir à donner trop d'explications, je signale simplement qu'il s'agit ici de l'équation établie par Boltzmann pour la fonction de distribution $f(r, v, t)$ qui représente le nombre de molécules du système ayant, à l'instant t , la vitesse v et la position r . Boltzmann a montré que la fonction $\mathcal{H} = \int f \log f \, dv$ ne peut que diminuer, et a postulé que l'entropie du système est la même chose que $-k\mathcal{H}$ (k constante de Boltzmann).

Un raisonnement correct [écrit Poincaré] ne peut mener à des conclusions en contradiction avec les prémisses. Or, comme nous l'avons vu, les propriétés de symétrie de l'équation d'évolution obtenue par Boltzmann pour la fonction de distribution contredisent celles de la dynamique. Boltzmann ne peut donc pas avoir déduit l'entropie de la dynamique, il a introduit quelque chose, un élément étranger à la dynamique. Son résultat ne peut donc être qu'un modèle phénoménologique, sans rapport direct avec la dynamique.

Poincaré était d'autant plus ferme dans sa position qu'il avait étudié dans une brève note s'il était possible de construire une fonction M des positions et des moments, $M(p, q)$, qui aurait les propriétés de l'entropie (ou plutôt de la fonction \mathcal{H}): alors qu'elle même serait positive ou nulle, sa variation au cours du temps ne pourrait que la faire décroître ou la maintenir à une valeur constante. Sa conclusion fut négative — dans le cadre de la dynamique *hamiltonienne* une telle fonction n'existe pas. Comment, d'ailleurs s'en étonner? Comment les lois réversibles de la dynamique pourraient-elles engendrer, de quelque manière que ce soit, une évolution irréversible? C'est sur une note découragée que Poincaré termine ses célèbres *Leçons de Thermodynamique*: il faudra sans doute faire appel à d'autres considérations, au calcul des probabilités. Mais comment justifier cet appel à des notions étrangères à la dynamique?

Remarque 1 : Ce passage [voir aussi les citations directes de Poincaré ci-dessus] met l'accent sur une des sources possibles de confusion. Le résultat de Poincaré est un théorème *mathématique*: “il ne peut pas exister de fonction $M(p, q)$ qui soit à la fois décroissante et toujours positive”. Or l'entropie, ou toute fonction qui en tient lieu (comme \mathcal{H}), ou toute autre fonction caractérisant un état *macroscopique* (comme “le nombre de molécules situées dans la partie gauche du récipient”, etc.) n'est pas une fonction monotone, à cause des fluctuations. Lorsqu'on dit que le système est parvenu à l'équilibre et y reste, c'est-à-dire que l'entropie est devenue maximale, cela signifie qu'elle continue presque éternellement à osciller autour de son maximum théorique et non qu'elle reste mathématiquement égale à ce maximum ou continue de s'en approcher sans cesse davantage et *en croissant*. Ces oscillations sont très petites si le nombre N de molécules est grand (leur

écart-type est de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, mais il peut s'en produire d'importantes si on attend pendant un temps de l'ordre de 10^N . Il est donc essentiel de bien comprendre ceci : l'entropie n'est pas une fonction croissante dans le sens mathématique du terme ; c'est seulement une fonction croissante dans un sens pratique. On peut l'exprimer en disant que *sur des durées raisonnables, et à de petites fluctuations près* elle ne peut décroître. La véritable entropie d'un système physique réel n'est donc pas concernée par le théorème de Poincaré. C'est ce que Boltzmann s'est efforcé d'expliquer dans [12] et [13].

Suite de la citation (page 206) :

L'objection de Loschmidt permet, quant à elle, de mesurer les *limites de validité* du modèle cinétique de Boltzmann. Il note en effet que ce modèle ne peut rester valable après un renversement du sens des vitesses $v \mapsto -v$. *Du point de vue de la dynamique*, il n'y a pas d'échappatoire : les collisions, se produisant en sens inverse, "déferont" ce qu'elles ont fait, le système retournera vers son état initial. Et la fonction \mathcal{H} , qui dépend de la distribution des vitesses, devra bien croître elle aussi jusqu'à sa valeur initiale. Le renversement des vitesses impose donc une évolution *antithermodynamique*. Et en effet, la simulation sur ordinateur confirme bien une *croissance de \mathcal{H}* après l'inversion des vitesses sur un système dont les trajectoires sont calculées de manière exacte.

Il faut donc admettre que la tentative de Boltzmann n'a rencontré qu'un succès partiel : certaines conditions initiales, notamment celles qui résultent de l'opération d'inversion des vitesses, peuvent engendrer, en contradiction avec le modèle cinétique, une évolution *dynamique* à \mathcal{H} croissant. Mais comment distinguer les systèmes auxquels le raisonnement de Boltzmann s'applique de ceux auxquels il ne s'applique pas ?

Ce problème une fois posé, il est facile de reconnaître la nature de la limitation imposée au modèle de Boltzmann. Ce modèle repose en fait sur une hypothèse statistique qui permet l'évaluation du nombre moyen de collisions — "le chaos moléculaire" .

Remarque 2 : le terme "chaos" n'est pas employé ici dans le sens précis qu'il a acquis depuis, et devrait être remplacé — ici et dans la suite — par "stochasticité". En effet c'est le mouvement dynamique exact des molécules qui est chaotique ("chaos déterministe") et l'hypothèse statistique qu'il est question d'introduire consiste à éliminer l'exactitude déterministe des conditions initiales et de les supposer simplement aléatoires.

(reprise de la citation) Cette hypothèse suppose qu'*avant* la collision, les molécules ont des comportements indépendants les uns des autres, ce qui revient à dire qu'il n'y a aucune corrélation entre leurs vitesses. Or, si on impose au système de "remonter le temps", on crée une situation tout à fait anormale : certaines molécules sont désormais "destinées" à se rencontrer en un instant déterminable à l'avance et à subir à cette occasion un changement de vitesse prédéterminé. Aussi éloignées qu'elles soient les unes des autres au moment de l'inversion des vitesses, cette opération crée donc entre elles des corrélations, elles ne sont plus indépendantes. L'hypothèse du chaos [stochasticité] moléculaire ne peut être faite à propos d'un système qui a subi l'opération d'inversion des vitesses.

L'inversion des vitesses est donc une opération qui crée un système *hautement organisé*, au comportement apparemment finalisé : l'effet des diverses collisions produit, comme par harmonie préétablie, une évolution globale "antithermodynamique" (par exemple la ségrégation spontanée entre molécules lentes et rapides si, à l'instant initial, le système avait été préparé par la mise en contact de deux gaz de températures différentes). Mais accepter la possibilité de telles évolutions antithermodynamiques, même rares, même exceptionnelles (aussi exceptionnelles que la condition initiale issue de l'inversion des vitesses), c'est mettre en cause la formulation du second principe : il existe des cas où par exemple une différence de température pourrait se produire "spontanément". Nous devons alors préciser les circonstances dans lesquelles un processus irréversible pourrait devenir réversible, voire même annuler un processus irréversible qui s'est produit dans le passé. Le principe cesse d'être un principe pour devenir une généralisation de portée limitée.

Remarque 3 : Prigogine et Stengers parlent donc ici d'une *mise en cause* du second principe, et d'une limitation de sa portée. La limitation étant que, pour un système dynamique *chaotique* (au sens actuel de ce terme : chaotique = rigoureusement déterministe, mais avec extrême sensibilité aux conditions initiales), l'entropie n'est pas une fonction croissante dans *absolument* tous les cas. En réalité c'est plutôt un problème d'interprétation de l'énoncé du second principe. Il y a un "second principe pour mathématiciens" qui stipule que l'entropie est une fonction du temps t qui tend en croissant vers une limite lorsque t tend vers l'infini. Ce principe est faux car il existe des états microscopiques du système qui le mettent en défaut (les états "*hautement organisés*, au comportement apparemment finalisé"). Même si on écarte ces états exceptionnels, la démonstration de Poincaré prouve en outre que l'entropie n'est jamais rigoureusement croissante au sens mathématique, mais on pourrait aisément corriger ce dernier défaut en énonçant par exemple : "l'entropie ne s'écarte jamais notablement d'une fonction croissante". La difficulté qui demeurera cependant toujours est que, même ainsi énoncé, on ne pourra pas garantir avec l'absolue certitude mathématique que la fonction reste croissante pendant des durées aussi grandes qu'on veut. Pourtant, pour la quasi totalité des états, la fonction restera croissante pendant des durées si longues qu'elles en perdent tout sens physique. Ainsi, en tant que "généralisation de portée limitée" (et non principe digne de ce nom) le second principe pourrait s'énoncer :

Pour tout état microscopique initial du système sauf un nombre infime, et pendant des durées courtes devant 10^N (N étant le nombre de molécules), l'entropie du système ne s'écarte pas notablement d'une fonction croissante.

Voir plus haut les commentaires à propos de [11].

Cela dit, le fait de juger cet énoncé comme trop réduit ou trop limité pour mériter le nom de principe est une affaire de convention. Car les durées

(non courtes devant 10^N) pour lesquelles il ne s'applique pas n'ont aucune existence pratique, et les fluctuations qui produisent les oscillations non monotones de l'entropie sont bien plus petites que ce qu'on a l'habitude, dans les théories physiques, de considérer comme nul.

Les états "*hautement organisés*, au comportement apparemment finalisé" ont une probabilité si inconcevablement petite de se produire spontanément qu'ils ne se produisent jamais (Émile Borel), et la seule possibilité de les rencontrer en Physique serait de les préparer. Pour avoir un principe *physique* et non un principe pour purs mathématiciens, censé s'appliquer dans le ciel des idées, il suffit de dire qu'on ne peut pas préparer de tels états et d'inclure cette impossibilité dans l'énoncé du principe. Cela ne le fait pas tomber d'un piédestal, mais a au contraire l'avantage d'en dégager le véritable sens, celui d'une propriété de la nature et non d'une vision de l'esprit.

Pages 211 – 213, est présentée l'"interprétation subjectiviste" de l'irréversibilité [que les auteurs vont ensuite critiquer]:

Mélangeons [proposait Gibbs], une goutte d'encre noire à de l'eau pure. Bientôt l'eau devient grise en une évolution qui, pour nous, est l'irréversibilité même; cependant, pour l'observateur aux sens assez aigus pour observer non pas le liquide macroscopique mais chacune des molécules qui constituent la population, le liquide ne deviendra jamais gris; l'observateur pourra suivre les trajectoires de plus en plus délocalisées des "molécules d'encre" d'abord rassemblées dans une petite région du système, mais l'idée que le milieu d'hétérogène est irréversiblement devenu homogène, que l'eau est "devenue grise" sera, de son point de vue, une illusion déterminée par la grossièreté de nos moyens d'observation, une illusion subjective. Lui-même n'a vu que des mouvements, réversibles, et ne voit rien de gris, mais du "noir" *et* du "blanc" . (. . .) Selon cette interprétation, la croissance de l'entropie ne décrit pas le système lui-même, mais seulement notre connaissance du système. Ce qui ne cesse de croître c'est l'ignorance où nous sommes de l'état où se trouve le système, de la région de l'espace des phases où le point qui le représente a des chances de se trouver. À l'instant initial, nous pouvons avoir beaucoup d'informations sur un système, et le localiser assez précisément dans une région restreinte de l'espace des phases, mais, à mesure que le temps passe, les points compatibles avec les conditions initiales pourront donner naissance à des trajectoires qui s'éloignent de plus en plus de la région de départ. L'information liée à la préparation initiale perd ainsi irréversiblement sa pertinence jusqu'au stade ultime où on ne connaît plus du système que les grandeurs que l'évolution dynamique laisse invariantes. Le système est alors à l'équilibre (. . .) La croissance de l'entropie représente donc la dégradation de l'information disponible; le système est initialement d'autant plus loin de l'équilibre que nous le connaissons mieux, que nous pouvons le définir plus précisément, le situer dans une région plus petite de l'espace des phases.

Cette interprétation subjectiviste de l'irréversibilité comme croissance de l'ignorance (encore renforcée par l'analogie ambiguë avec la théorie de l'information) fait de l'observateur le vrai responsable de l'asymétrie temporelle qui

caractérise le devenir du système. Puisque l'observateur ne peut embrasser d'un seul coup d'oeil les positions et les vitesses des particules qui constituent un système complexe, il n'a pas accès à la vérité fondamentale de ce système : il ne peut connaître l'état instantané qui en contient à la fois le passé et le futur, il ne peut saisir la loi réversible qui, d'instant en instant, lui permettrait d'en déployer l'évolution. Et il ne peut pas non plus manipuler le système comme le fait le démon de Maxwell, capable de séparer les particules rapides et les particules lentes, et d'imposer ainsi à un système une évolution antithermodynamique vers une distribution de température de moins en moins uniforme.

La thermodynamique est certes la science des systèmes complexes, mais, selon cette interprétation, la seule spécificité des systèmes complexes, c'est que la connaissance qu'on a d'eux est toujours approximative et que l'incertitude déterminée par cette approximation va croissant au cours du temps. (. . .)

Cependant, l'objection est immédiate : dans ce cas, la thermodynamique devrait être aussi universelle que notre ignorance. C'est là la pierre d'achoppement de l'ensemble des interprétations "simples" de l'entropie, en termes d'incertitude sur les conditions initiales ou sur les conditions aux limites. Car, l'irréversibilité *n'est pas une propriété universelle*; articuler dynamique et thermodynamique nécessite donc la définition d'un critère *physique* de différenciation entre les systèmes, selon qu'ils peuvent ou non être décrits thermodynamiquement, nécessite une définition de la complexité en termes physiques et non en termes de manque de connaissance.

À partir de là les auteurs insistent sur le caractère objectif de l'irréversibilité ou plutôt de la complexité (page 213 et après) : le comportement des corps macroscopiques est bien réel et physique, la complexité est une qualité réelle et physique qui décidera si le corps aura un comportement thermodynamique ou un mouvement mécanique, etc. Ils ont bien raison, mais cela nous éloignerait de notre sujet.

RÉFÉRENCES.

- [1] **Ludwig Boltzmann** *Weitere Studien über Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*. Wiener Berichte **66** (1872), p. 275.
- [2] **James Clerk Maxwell** *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases*. Phil. Mag. **19** (1860), pp. 19.
- [3] **Joseph Loschmidt** *Über das Wärmegleichgewicht eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwere*. Wiener Berichte **73**, (1876), pp. 139.

L'irréversibilité

- [4] **Frederik Reif** *Cours de Physique de Berkeley: tome 5, Physique statistique*. Armand Colin, Paris (1972), pour l'édition française.
- [5] **Ludwig Boltzmann** *Leçons sur la théorie des gaz*. Réédition Jacques Gabay, Paris, (1987).
- [6] **Rudolf Peierls** *Surprises in Theoretical Physics*. Princeton University Press (coll. Princeton series in Physics), Princeton, New Jersey (1979).
- [7] **James Clerk Maxwell** *Theory of Heat*. Longmans & Green, London (1871).
- [8] **Henri Poincaré** *Sur le problème des trois corps*. Revue générale des Sciences pures et appliquées II, vol **8** (15 janvier 1891), page 529.
- [9] **Henri Poincaré** *Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la Thermodynamique*. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, vol **108** (18 mars 1889), pages 550 – 553.
- [10] **Henri Poincaré** *Sur la théorie cinétique des gaz*. Revue générale des Sciences pures et appliquées, vol **5** (1894), pages 513 – 521.
- [11] **Ernst Zermelo** *Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie* Wiedemanns Annalen, vol **57** p.485 et vol **59** p.793 (1896).
- [12] **Ludwig Boltzmann** *Entgegnung auf die Wärmethoretischen Betrachtungen des Hrn. E. Zermelo*. Wiedemanns Annalen, vol **57** (1896), pages 773 – 784.
- [13] **Ludwig Boltzmann** *Zu Hrn. Zermelos Abhandlung "Über die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge"*. Wiedemanns Annalen, vol **60** (1897), pages 392 – 398.
- [14] **Ilya Prigogine, Isabelle Stengers** *La nouvelle alliance*. NRF Gallimard, Paris (1979).

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

1.

Ouvrages de référence sur le Calcul des probabilités et la Statistique :

William Feller

An Introduction to Probability Theory and its Applications.

John Wiley & Sons, New York 1st ed. 1950.

Maurice G. Kendall, Alan Stuart

The Advanced Theory of Statistics. (3 vol.)

Charles Griffin & co ltd., London 1976.

Alfred Rényi

Calcul des probabilités.

Dunod, Paris 1^{re} éd. 1966 ; rééd. J. Gabay 1992.

B. L. van der Waerden

Mathematische Statistik.

Springer-Verlag, Berlin 1st ed. 1957.

2.

Autres ouvrages de référence sur les différents thèmes abordés :

Joseph Bertrand

Calcul des probabilités.

Gauthier-Villars, Paris 1^{re} éd. 1888

Émile Borel

Le hasard

Librairie Félix Alcan, Paris 1^{re} éd. 1914

Bibliographie générale

Jorge Luis Borges

Fictions.

(trad. française de P. Verdevoye, Ibarra, et R. Caillois)
coll. folio, Gallimard, Paris 1989 (1^{re} éd. 1957)

Jean-Paul Delahaye

Information, complexité, et hasard.

Éditions Hermès, Paris 1994

Richard P. Feynman

Lectures on Physics tome 3 *Mécanique quantique.*

(trad. française de B. Equer et P. Fleury)

Bilingua Addison-Wesley (version bilingue) 1st ed. 1970.
Interéditions, Paris (version française seulement) 1979.

David Hume

Enquête sur l'entendement humain.

(trad. française d'André Leroy)

Flammarion, Paris 1983 (1^{re} éd. Aubier-Montaigne 1947).

Donald Knuth

The Art of Computer Programming.

Vol 2, *Seminumerical Algorithms*

Addison-Wesley 1969.

G. Lenoir

La mucoviscidose.

Doin, Paris, 1935

Jean Marc Levy-Leblond, Françoise Balibar

Quantique, rudiments.

Interéditions, Paris 1^{re} éd. 1984.

Eugène Lukacs

Fonctions caractéristiques.

(trad. française de A. Rosengard)

Dunod, Paris 1^{re} éd. 1964

François Lurçat

Niels Bohr et la Physique quantique.

Éd. du Seuil, Paris, 2001 (2^{re} éd.)

1^{re} éd.: *Niels Bohr*, Éd. Critérion, Paris, 1990

Gustave Malécot

Les mathématiques de l'hérédité.

Masson, Paris 1^{re} éd. 1948

Edward Nelson

Radically Elementary Probability Theory.

Princeton University Press, Princeton 1st ed. 1989

Platon

La République.

(trad. française de Émile Chambry)

Les Belles Lettres, Paris 1989 (1^{re} éd. 1933).

Henri Poincaré

Calcul des probabilités.

Gauthier-Villars, Paris 2^{re} éd. 1912 (1^{re} éd. 1903)

Réédition Jacques Gabay, Paris, 1987)

La valeur de la science.

Ernest Flammarion, Paris 1^{re} éd. 1910

Frederick Reif

Cours de Physique de Berkeley. tome 5 Physique statistique.

(trad. française de Pierre Turon)

Armand Colin, Paris 1^{re} éd. 1972.

Bibliographie générale

3.

Articles originaux cités dans le présent ouvrage
(sauf chapitre **XIV** qui a sa propre bibliographie) :

J. S. Bell

On the Einstein Podolski Rosen Paradox.

Physics, vol. **1** (1964) pages 195 – 200.

Niels Bohr

Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik.

Naturwissenschaften, vol. **16** (1928) pages 245 – 271.

Niels Bohr

Physique atomique et connaissance humaine.

(recueil d'articles)

Éd. Gauthier-Villars, Paris, 1972

Émile Borel

Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo

vol. **27** (1909) pages 247 – 270.

Émile Borel

Emploi du théorème de Bernoulli pour le calcul d'une infinité de coefficients. Application au problème de l'attente à un guichet.

Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, Paris, mars 1942

John F. Clauser and Abner Shimony

Bell's Theorem : experimental tests and implications.

Reports on Progress in Physics, vol. **41**, 1978 pages 1181 – 1927.

A. Einstein, B. Podolski, N. Rosen

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ?

Physical Review, vol. **47** (1935) pages 777 – 780.

Werner Heisenberg

Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.

Zeitschrift für Physik, vol. **43** (1927) pages 172 – 198.

J. Harthong: probabilités et statistique

Max Planck

Über eine Verbesserung der Wienschen Spectralgleichung.

Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft

Band **2** (1900) pages 237 – 245.

Max Planck

Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum.

Annalen der Physik

vol. **4** (1901) pages 553 – 563.