

L'approche fréquentielle pour l'analyse de systèmes et la conception de régulateurs

Sébastien Boisgérault - ISIA

14 avril 2002



Harry Nyquist (1889-1976), à droite de l'image, en présence de deux autres scientifiques des Bell Labs, John Pierce et Rudolf Kompfner.

Harry Nyquist était un physicien et un *electrical engineer* d'origine suédoise dont les travaux au sein d'AT&T donnèrent lieu à des contributions théoriques et pratiques fondamentales dans le domaine des communications.

Il est en particulier l'auteur de deux résultats majeurs de l'automatique et du traitement du signal. Le **critère de stabilité de Nyquist** (1932) permet de déterminer si l'utilisation d'une rétroaction négative engendre ou non un système stable. Quant au **théorème d'échantillonnage de Nyquist** (1928), il détermine la fréquence minimale d'un procédé d'échantillonnage devant conserver toute l'information des signaux analogiques d'entrée.

FAMOUS SCIENTISTS - ELECTRICITY, ELECTRONICS, ELECTROCHEMISTRY.

URL: <http://www.geocities.com/bioelectrochemistry>

Table des matières

1	Dynamique des signaux et systèmes	4
1.1	Stabilité des signaux.	4
1.2	Stabilité des systèmes.	6
1.3	Dynamique des systèmes.	7
1.3.1	Systèmes du premier ordre (stables).	8
1.3.2	Systèmes du second ordre (sans zéro, stables).	9
1.3.3	Systèmes complexes.	12
2	Précision des systèmes linéaires.	13
2.1	Bande passante. Définition.	13
2.2	Précision d'un système bouclé.	13
2.3	Comportement permanent.	14
2.4	Signaux de consignes quelconques.	14
3	Stabilité des systèmes linéaires.	16
3.1	Stabilité des boucles de rétroaction - Le critère de Nyquist . . .	16
3.1.1	Énoncé et démonstration	17
3.1.2	Lieu de Nyquist - Application du lemme de Cauchy à un domaine non borné.	18
3.2	Critère de Nyquist - Utilisation et extensions.	19
3.2.1	Conditions d'applications du théorème de Nyquist.	22
3.3	Marges de stabilité	25
3.3.1	Principe général.	25
3.3.2	Marge de gain, marge de phase.	25
3.3.3	Marge de module.	28
4	Conception de contrôleurs	29
4.1	Contrôleur proportionnel.	30
4.2	Contrôleur proportionnel-dérivé ou à avance de phase	30
4.3	Contrôleur proportionnel-intégral ou à retard de phase	34

Introduction. L'approche fréquentielle des systèmes linéaires consiste à analyser et modifier les propriétés des systèmes en se basant sur leur réponse harmonique. Pour un système stable, la sortie $y(t)$ résultant de l'entrée sinusoïdale

$$u(t) = \sin(\omega t), t \geq 0 \quad (1)$$

prend la forme

$$\begin{cases} y(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)) + z(t), t \geq 0 \\ z(t) \text{ signal transitoire} \end{cases} \quad (2)$$

Par conséquent, la réponse permanente des systèmes à une entrée sinusoïdale est caractérisée par la donnée des fonctions $A(\omega) \geq 0$ et $\phi(\omega)$, grandeurs qui sont reliées de façon très simple à la fonction de transfert $G(s)$ du système :

$$G(i\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} A(\omega) = |G(i\omega)| \\ \phi(\omega) = \angle G(i\omega) \end{cases} \quad (3)$$

La calcul de Laplace fait donc partie intégrante de la théorie fréquentielle et son objet fondamental est la fonction (complexe) $G(i\omega)$; seules les valeurs de $G(s)$ pour s sur l'axe imaginaire sont requises: c'est le domaine associé au calcul de Fourier.

Disons tout de suite un mots des caractéristiques des outils et critères de cette théorie classique¹.

- Les tests et méthodes utilisés ont une interprétation graphique, basée sur l'une ou l'autre des représentations existantes de la réponse harmonique (diagramme de Nyquist, de Bode, etc.).
- Les relations entre les différentes grandeurs caractéristiques du système et de la régulation sont simples et permettent des analyses et des conceptions rapides. En contrepartie, elles sont rarement exactes; une conception soignée de régulateur supposera une deuxième phase de vérification et de réglage fin des paramètres.

Les limitations de cette approche tiennent essentiellement à la complexité des systèmes. On ne considérera dans ce document que

- **Les systèmes monovariabiles** ou SISO (pour *single-input single output*). L'entrée u et la sortie y des systèmes étudiés seront supposées scalaires.
- **Les systèmes "simples"**. Ce que l'on entend par là, c'est que les diagrammes fréquentiels doivent *quelques* caractéristiques indésirables, intervenant à plages bien distinctes de fréquence.

Dans le cas contraire, l'utilisation de techniques graphiques serait délicate et les tentatives de correction influeraient sur trop de caractéristiques simultanément pour que leur effet soit réellement prévisible.

Il existe par ailleurs des théories permettant de dépasser ces limitations

- **La théorie des systèmes multivariabiles**, donc des systèmes MIMO (*multi-input multi-output*), utilisant une approche fréquentielle et généralisant les objets et résultats du cadre monovariabiles, existe bel est bien. Elle est complétée par
- **La théorie \mathcal{H}_∞** qui fournit des outils d'analyse et de conception pour gérer les systèmes complexes, et ce de façon systématique.

Ces notions ne seront pas présentées dans le cadre de ce cours introductif.

1. La synthèse de régulateur basée sur l'approche fréquentielle que l'on présente dans ce chapitre est souvent appelé **contrôle classique** car la théorie est antérieure au **contrôle moderne** né dans les années 60, basé sur la représentation par modèle d'état et la commande optimale. Ces terminologies paraissent désormais un peu vieillottes au regard des progrès effectués depuis cette période.

1 Dynamique des signaux et systèmes

Le chapitre précédent a présenté le calcul de Laplace comme un outil permettant de gérer simplement, de façon algébrique, les signaux reliés par des équations différentielles, et donc les systèmes dynamiques. Cette simplicité suppose une étape de traduction : la transformée de Laplace associe à un signal temporel son équivalent dans le domaine de Laplace.

Ce qui renforce considérablement l'intérêt de cette théorie, c'est que de nombreuses caractéristiques des signaux et des systèmes sont accessibles directement dans le domaine de Laplace, sans que la traduction inverse est soit nécessaire. On présente dans cette section les méthodes qui permettent d'accéder aux propriétés des signaux à partir de leur expression dans le domaine de Laplace.

1.1 Stabilité des signaux.

Propriété 1 Un signal rationnel et causal est borné si et seulement si

- Tous ses pôles sont de partie réelle négative ou nulle.
- Les éventuels pôles sur l'axe imaginaire sont simples.

Il est évanescent (il a pour limite 0 quand t tend vers $+\infty$) si et seulement si

- Tous ses pôles sont de partie réelle strictement négative.

Démonstration – La démonstration est basée sur la décomposition de $X(s)$ en éléments simples qui est de la forme

$$X(s) = \sum_{\lambda} \sum_{n=1}^{n_{\lambda}} \frac{C_{\lambda,n}}{(s-\lambda)^n}$$

La première somme porte sur tous les pôles λ du signal et n_{λ} est la multiplicité de λ . La forme temporelle du signal est

$$x(t) = \sum_{\lambda} P_{\lambda}(t) e^{\lambda t}, \text{ avec } P_{\lambda}(t) = \sum_{n=1}^{n_{\lambda}} \frac{C_{\lambda,n}}{(n-1)!} t^{n-1} \quad (4)$$

Caractère nécessaire. Les contributions des pôles de partie réelle strictement négative $-\sigma = \Re(\lambda)$ au signal sont toutes évanescentes car

$$|P_{\lambda}(t) e^{\lambda t}| = |P_{\lambda}(t)| e^{-\sigma t} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

De même, les contributions des pôles sur l'axe imaginaire, de la forme $\lambda = \pm i\omega$, sont bornées lorsque leur multiplicité est égale à 1 car

$$|C_{i\omega,1} e^{\pm i\omega t}| = |C_{i\omega,1}|$$

Comme une somme de termes évanescents (resp. bornés) est évanescente (resp. bornée), nous avons montré le caractère nécessaire de la caractérisation par les pôles des signaux bornés et évanescents.

Caractère suffisant. Cette preuve réalisée en deux étapes. La première étape contient l'essentiel de l'idée de la démonstration. La seconde étape est un peu plus technique et utilise un résultat qui ne sera énoncé que dans la section 1.2 ; nous conseillons au lecteur de ne l'aborder qu'en seconde lecture.

- Première étape - Nous montrons que si un signal $x(t)$ présente un et un seul pôle réel λ , ou bien un pôle λ et son conjugué $\bar{\lambda}$, de partie réelle positive ou nulle (resp. de

partie réelle strictement positive ou de partie réelle nulle mais de multiplicité supérieure strictement à 1), alors il ne tend pas vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ (resp., il est non-borné).

En utilisant (4), que λ soit réel ou non, on peut écrire le signal sous la forme

$$x(t) = y(t) + \Re(P_\lambda(t)e^{\lambda t})$$

où le signal $y(t)$ qui rassemble les contributions de tous les pôles hormis λ (et $\bar{\lambda}$ le cas échéant) est évanescent (resp. borné). Il est immédiat que si $\lambda = \sigma + i\omega$ est de partie réelle positive ou nulle, le terme $\Re(P_\lambda(t)e^{\lambda t})$ ne tend pas vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ puisque

$$P_\lambda(t)e^{\lambda t} \sim C e^{i\omega t} t^{n_\lambda - 1} e^{\sigma t}, C \neq 0$$

et donc $x(t)$ n'est pas évanescent. Respectivement, si λ est de partie réelle nulle ($\lambda = i\omega$) mais de multiplicité n_λ supérieure strictement à 1, on a

$$P_\lambda(t)e^{\lambda t} \sim C e^{i\omega t} t^{n_\lambda - 1}, C \neq 0$$

et donc la partie réelle de $P_\lambda(t)e^{\lambda t}$ n'est pas bornée, et donc le signal $x(t)$ non plus.

- Seconde étape - Cette étape est nécessaire pour montrer que les contributions non évanescentes ou non bornées de différents pôles ne peuvent se compenser pour donner naissance à un signal évanescent ou borné.

Pour montrer cela, on fait un raisonnement par l'absurde fondé sur des opérations de filtrage destinées à nous ramener au cas d'une unique contribution non évanescente ou non bornée.

Supposons qu'un signal $x(t)$ possède plusieurs pôles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (éventuellement $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$), de parties réelles strictement positives ou de parties réelles nulles et de multiplicités strictement plus grandes que 1 et soit borné. Posons $\lambda = \lambda_n$ et notons n_λ la multiplicité associée. Le système de fonction de transfert

$$H(s) = \left[\frac{s - \lambda}{s + 1} \right]^{n_\lambda}, \text{ resp. } H(s) = \left[\frac{(s - \lambda)(s - \bar{\lambda})}{(s + 1)^2} \right]^{n_\lambda} \quad (5)$$

est stable (cf propriété 2). Par conséquent, si l'on choisit $x(t)$ comme entrée du système, la sortie correspondante est bornée et ne possède plus λ_n (et $\bar{\lambda}_n$) comme pôle. De proche en proche, en itérant cette opération, on pourrait construire un signal borné ne possédant qu'un pôle non-borné, mais cela contredirait le résultat démontré dans la première étape; le signal $x(t)$ est donc nécessairement non-borné.

La démonstration pour les contributions non évanescentes est semblable: il suffit de montrer que le système (5) associe une sortie évanescente à toute entrée évanescente et bornée. Voilà le schéma de cette démonstration:

1) le système (5) est stable (cf. section 1.2), par conséquent

$$G = \int_0^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

2) Un calcul élémentaire sur l'opérateur de convolution montre l'inégalité

$$|y(t)| \leq G \max_{a \geq T} |u(a)| + \left[\int_{t-T}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \right] \max_{a \in \mathbb{R}_+} |u(a)|$$

Le premier terme du membre de droite peut être rendu arbitrairement petit en augmentant T . Faire tendre t vers $+\infty$ permet de faire tendre le second terme vers 0. ■

Tout le monde s'accordera à qualifier un signal décroissant très rapidement vers 0 de stable. A contrario un signal comme une pseudo-sinusoïde dont l'amplitude croît exponentiellement avec le temps sera qualifiée d'instable. Le choix de la terminologie est plus délicat lorsque l'on considère des signaux

persistants mais bornés comme les sinusoïdes ou la fonction échelon. Nous ne trancherons donc pas dans ce cas précis. Par contre, nous adopterons la définition suivante

Définition 1 Un nombre complexe s est **stable** si sa partie réelle est strictement négative, **instable** sinon.

On parlera ainsi de pôles ou de zéros stables ou instables. Le choix de qualifier les imaginaires purs d'instables est discutable à la lumière de la discussion précédente. Ce choix permet toutefois de simplifier la caractérisation de la stabilité des systèmes (cf. section 1.2).

REMARQUE : les zéros n'ont aucune influence sur la stabilité d'un signal, seule compte la position des pôles. Par contre ils peuvent avoir une influence très importante sur l'allure du signal (cf section 1.3.3).

1.2 Stabilité des systèmes.

Définition 2 - Stabilité entrée-sortie. Un système linéaire est **stable** si tout signal d'entrée borné engendre une sortie bornée. Un système est **instable** s'il n'est pas stable.

Propriété 2 Un système linéaire de fonction de transfert rationnelle est stable si et seulement

- (Critère en Laplace) - **Tous ses pôles sont stables.**
ou bien, ce qui est équivalent
- (Critère en temporel) - **Sa réponse impulsionnelle est sommable.**

Par la suite, nous utiliserons quasi exclusivement la caractérisation basée sur la position des pôles du système. Notons toutefois que la seconde caractérisation constitue encore un critère de stabilité pour des systèmes dont la transformée de Laplace n'est pas rationnelle².

Démonstration – Remarquons tout d'abord que les deux caractérisations énoncées (par les pôles et par la réponse impulsionnelle) sont équivalentes : c'est un résultat classique concernant la transformation de Laplace.

Preuve directe (par l'absurde) : si le système possède un (ou des) pôle(s) de partie réelle *strictement* positive, de nombreuses entrées bornées engendrent une sortie instable. Par exemple, la fonction échelon

$$u(t) = e(t) \text{ de transformée } U(s) = 1/s$$

fait l'affaire. En effet, la transformée de Laplace de la sortie $y(t)$ est donnée par la relation $Y(s) = H(s)/s$ et par conséquent, $Y(s)$ contient toujours le(s) pôle(s) de partie réelle strictement positive.

2. Avec le bémol suivant : la notion de stabilité qu'elle caractérise alors n'est pas la stabilité entrée-bornée sortie-bornée de la définition 2, mais la stabilité entrée-bornée sortie-bornée *uniforme* : non seulement toute entrée bornée doit produire une sortie bornée mais de plus le facteur d'amplification maximal, c'est-à-dire le ratio borne de la sortie sur borne de l'entrée, doit être fini.

Cette distinction n'a aucune importance pour les systèmes rationnels dans la mesure où ces deux notions de stabilité se confondent.

Si maintenant les seuls pôles instables du système sont sur l'axe imaginaire, un signal sinusoïdal (et donc borné) bien choisi produit une sortie instable. Supposons que $\lambda = i\omega$ (et donc son conjugué) soit un pôle du système ω . Alors, le signal

$$u(t) = \cos(\omega t), \text{ de transformée } U(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

fait l'affaire. En effet, la sortie $y(t)$ présente désormais un pôle d'ordre supérieur ou égal à 2 en $\lambda = i\omega$, sur l'axe imaginaire. Elle est donc non bornée (cf ppté 1).

Réciproque: La réponse impulsionnelle du système est par hypothèse sommable

$$G = \int_0^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

Par conséquent, si l'entrée $u(t)$ que l'on souhaite appliquer au système est bornée par la valeur M , la sortie $y(t)$ vérifie

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}_+, |y(t)| = \left| \int_0^t h(\tau) u(t - \tau) dt \right| \leq GM$$

Le signal de sortie $y(t)$ est donc borné. ■

EXERCICE : Montrer que la caractérisation de la stabilité donnée par la propriété 2 est encore valable si l'on substitue à l'hypothèse de stabilité du système l'hypothèse plus faible suivante

Définition 3 - Stabilité entrée-sortie - définition alternative. Un système linéaire est **stable** si tout signal d'entrée *rationnel et causal* borné engendre une sortie bornée.

EXERCICE : Montrer que pour tout système rationnel et causal stable, toute entrée évanescence et bornée produit une sortie évanescence (et bornée). Cette propriété caractérise-t-elle les systèmes stables?

1.3 Dynamique des systèmes.

Le comportement d'un système linéaire peut être caractérisé par de nombreuses représentations graphiques, chacune ayant un intérêt qui lui est propre. Elles peuvent être réparties en

- **Représentations temporelles.** Les plus classiques sont les réponses impulsionnelles et indicelles, qui sont respectivement les sorties correspondant à une impulsion ou bien un échelon en entrée.
- **Représentations fréquentielles.** Appartiennent à cette catégorie les diagrammes de Bode présentés ci-dessous ainsi que les diagrammes de Nyquist (cf. section 3.1)

Le diagramme de Bode d'un système de fonction de transfert $G(s)$ est le graphe du module et de l'argument du nombre complexe $G(i\omega)$ en fonction de $\omega \in \mathbb{R}_+$.

- Le **module** $|G(i\omega)|$ est représenté sur une échelle log-log ; on représente ce que l'on appelle le gain en décibels, c'est-à-dire

$$|G(i\omega)| \text{ en dB} = 20 \log_{10} |G(i\omega)| \tag{6}$$

en fonction non pas de ω , mais de $\log_{10} \omega$.

- L'argument de $G(i\omega)$ est appelé la **phase** du système et noté $\angle G(i\omega)$. Ce nombre n'est déterminé qu'à un multiple de 2π près

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|e^{i\phi(\omega)} \text{ avec } \phi(\omega) = \angle G(i\omega) \quad (7)$$

La détermination de la phase est choisie de telle sorte que $\angle G(i\omega)$ dépende continument de ω . On représente également $\angle G(i\omega)$ en fonction du log de ω .

Présentons l'allure de ces différents diagrammes pour les systèmes les plus élémentaires.

1.3.1 Systèmes du premier ordre (stables).

Il s'agit des systèmes que l'on peut mettre sous la forme

$$G(s) = K \frac{1}{Ts + 1} \quad (8)$$

- $K = G(0) \in \mathbb{R}$ est le gain statique du système.
- $T > 0$ est la constante de temps ou temps caractéristique du système.

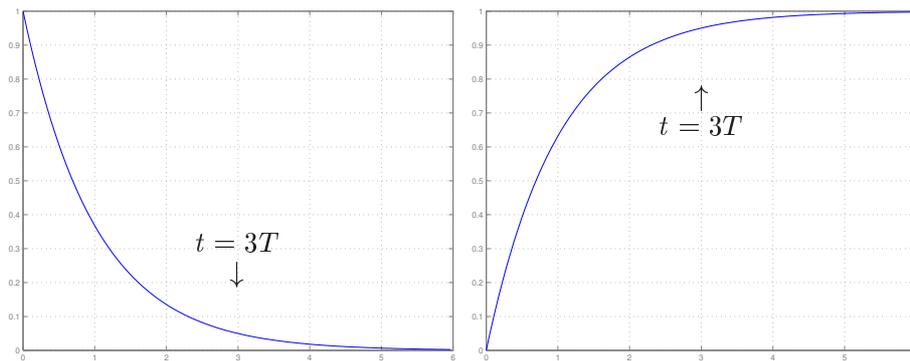


FIG. 1 – Réponses impulsionnelle (à gauche) et indicielle (à droite) d'un système du premier ordre ($K = 1, T = 1$).

Il apparaît immédiatement que les réponses impulsionnelles et indicielles (cf. figure 1), dont l'expression est

$$g(t) = \frac{K}{T}e^{-t/T} \text{ et } i(t) = K(e(t) - e^{-t/T}) \quad (9)$$

se stabilisent "au bout de quelques T " : pour $t \geq 3T$, l'écart entre la réponse et sa valeur finale est inférieur à 5% de cette valeur finale. Dans le cas de la réponse indicielle, une fois le signal stabilisé, sa valeur est égale à K fois la valeur de l'entrée, ce qui justifie la terminologie de gain statique.

Notons que les diagrammes de Bode des systèmes du 1er ordre peuvent être approximés de façon simple par ce que l'on appelle des diagrammes asymptotiques. Pour le système (8), cela revient à poser

$$|G(i\omega)| \text{ [dB]} \simeq \begin{cases} 20 \log_{10} K & \text{si } \omega \leq 1/T \\ 20 \log_{10}(K/T) - 20 \log_{10} \omega & \text{si } \omega \geq 1/T \end{cases} \quad (10)$$

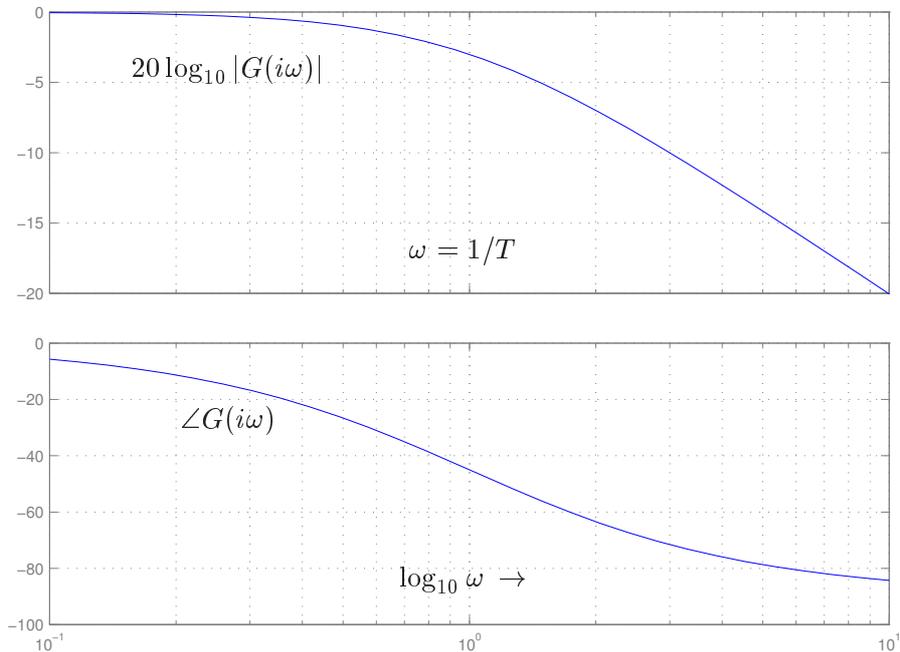


FIG. 2 – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre ($K = 1, T = 1$).

$$\angle G(i\omega) \simeq \begin{cases} 0 \text{ degrés} & \text{si } \omega \leq 1/T \\ -90 \text{ degrés} & \text{si } \omega \geq 1/T \end{cases} \quad (11)$$

L'approximation du module est de bonne qualité lorsque ω est éloigné de la pulsation critique $\omega = 1/T$ alors que l'approximation de la phase est de toute façon très grossière.

Ces relations asymptotiques montrent en particulier que sur une échelle log-log, le module de la fonction de transfert d'un système du premier ordre décroît avec une pente de -20 . On dit que la pente est de -20 db/décade, une décade désignant une plage de pulsations de la forme $[\omega, 10 \times \omega]$.

1.3.2 Systèmes du second ordre (sans zéro, stables).

Tout système possédant deux pôles conjugués

$$\lambda = +\sigma + i\omega \text{ et } \bar{\lambda} = +\sigma - i\omega, \text{ avec } \sigma \leq 0, \omega > 0 \quad (12)$$

et ne possédant pas de zéro peut être mis sous la forme standard

$$G(s) = \frac{K}{(s/\omega_n)^2 + 2\xi(s/\omega_n) + 1} \quad (13)$$

déterminée par les paramètres K, ξ et ω_n

- $K = G(0) \in \mathbb{R}$ est le gain statique du système.
- $\xi \in [0, 1]$ est le coefficient d'amortissement du système.
- $\omega_n \geq 0$ est la pulsation propre (ou naturelle, ou non amortie) du système.

La position des pôles est reliée à ces paramètres par les relations

$$\sigma = -\omega_n \xi \text{ et } \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (14)$$

Plus simplement, ω_n est la distance (commune) des pôles à l'origine et ξ le sinus de l'angle θ représenté sur la figure 3.

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \text{ et } \xi = \sin \theta \quad (15)$$

Les paramètres listés précédemment ont des actions bien précises sur le com-

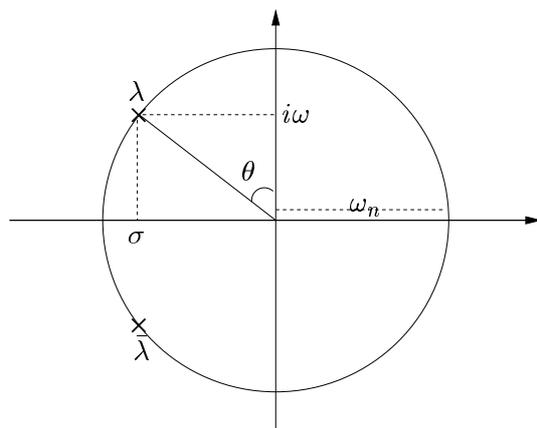


FIG. 3 – Paramètres du second ordre et position des pôles.

portement du système :

- ω_n détermine la vitesse de réaction du système. En réponse à un échelon, le premier passage du signal de sortie à moins de 10% de sa valeur finale a lieu à $t = t_r$ où

$$t_r \simeq \frac{1.8}{\omega_n} \quad (16)$$

la valeur t_r est le **temps d'élévation** (*time rise*).

- σ détermine le **temps d'établissement** (ou *settling time*) du système : après $t = t_s$ secondes, t_s valant

$$t_s \simeq \frac{4.6}{\sigma} \quad (17)$$

la réponse du système à un échelon ne s'écarte plus de plus que 1% de sa valeur finale.

- ξ caractérise le caractère oscillatoire du système : le **dépassement** (*overshoot*) de la réponse à un échelon unitaire est donné par

$$M = e^{-\pi \xi / \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (18)$$

Il est d'autant plus important que ξ est proche de 0, c'est-à-dire que le système est amorti, et d'autant plus faible que ξ est proche de 1.

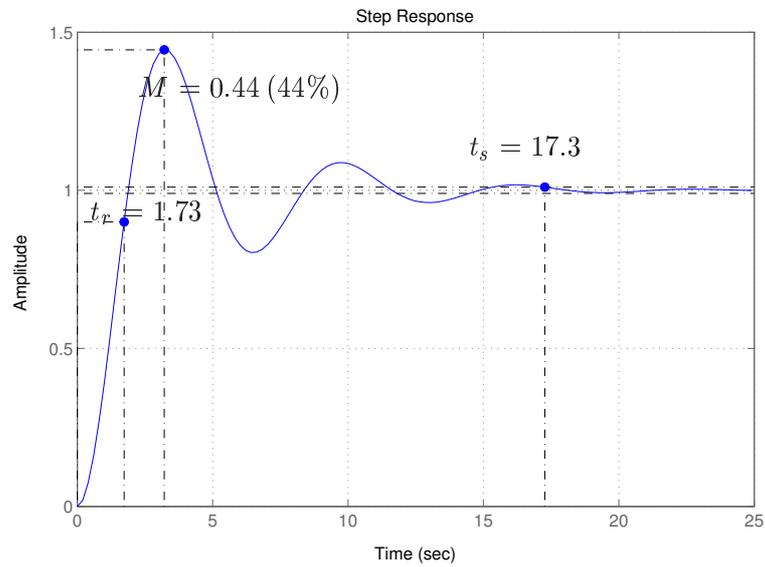


FIG. 4 – Réponses indicielle d'un système du second ordre ($K = 1$, $\omega_n = 1$, $\xi = 0.25$).

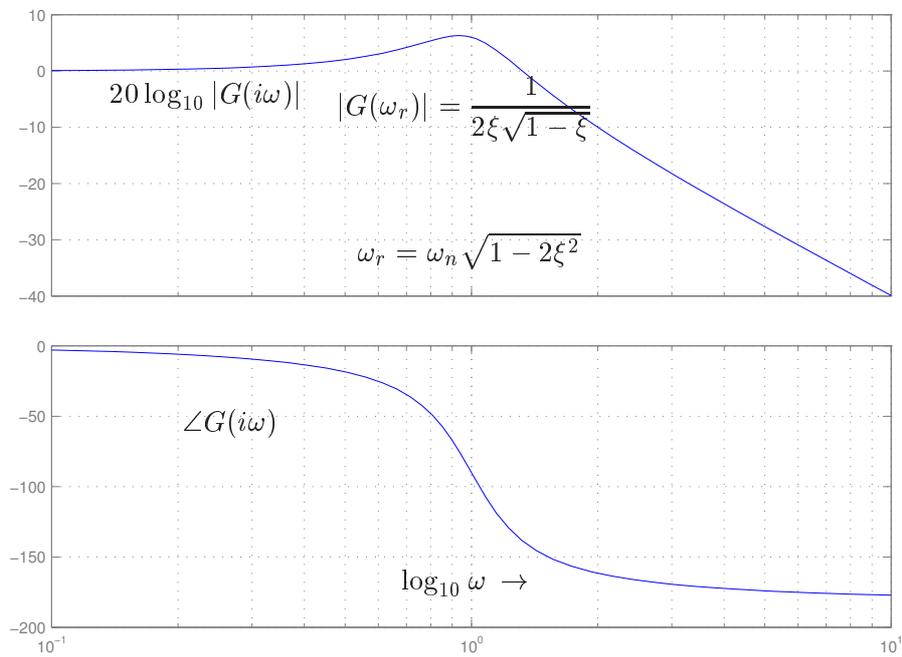


FIG. 5 – Diagramme de Bode d'un système du second ordre ($K = 1$, $\omega_n = 1$, $\xi = 0.25$). Le paramètre ξ est plus petit que $1/\sqrt{2}$; le diagramme de Bode présente donc une résonance en $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

1.3.3 Systèmes complexes.

Les systèmes du premier et du second ordre que nous avons présentés dans les sections précédentes peuvent fournir des informations simples mais approximatives concernant le comportement de systèmes plus complexes, d'ordre plus élevé ou comportant des zéros.

Pour un système d'ordre supérieur ou égal à 2, l'influence des pôles rapides ($\Re(s)$ très négatif) se fera uniquement sentir dans les premiers instants de la réponse du système. Asymptotiquement, seules les contributions des pôles lents ($\Re(s)$ proche de 0) subsistent. On peut donc en première approximation se fier à ces seuls pôles pour se faire une idée du comportement du système.

Toutefois, ce raisonnement doit être affiné en tenant compte du poids respectif de chaque pôle dans la réponse du système ou, ce qui revient au même, de la position des zéros de la fonction de transfert comme l'illustre l'exemple suivant.

EXEMPLE. Considérons le système de fonction de transfert

$$G(s) = \frac{5}{5s+1} - \frac{1}{s+1} = \frac{4}{5s^2+6s+1} \quad (19)$$

La décomposition en éléments simples du système met en évidence que la réponse impulsionnelle résulte de la compétition entre une dynamique lente (constante de temps $T = 5$, associée au pôle -0.2) et une dynamique rapide (constante de temps $T = 1$, associée au pôle -1). Cette dernière a donc peu d'effet à long terme comme cela est visible sur la figure 6, à gauche. Par contre,

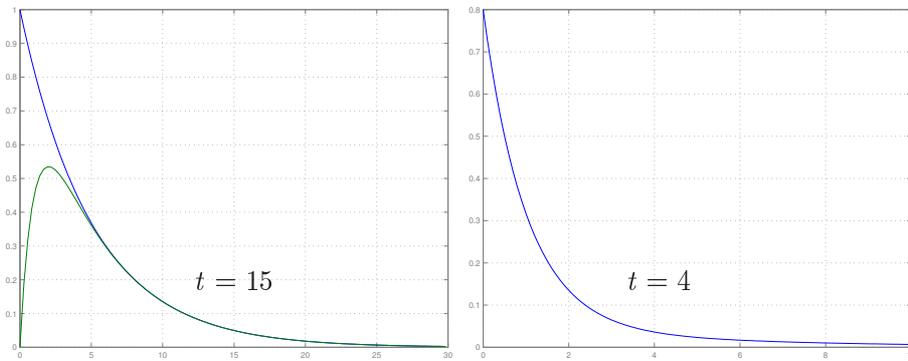


FIG. 6 – Réponses impulsionnelles de $\frac{4}{5s^2+6s+1}$ et de $\frac{5}{5s+1}$ (à gauche), de $\frac{4s+1}{5s^2+6s+1}$ (à droite).

si le système a un zéro en $s = -0.25$ ($T = 4$) comme c'est le cas si

$$G(s) = \frac{4s+1}{5s^2+6s+1} \quad (20)$$

la contribution de la dynamique lente est sensiblement amoindrie; en effet le calcul du coefficient en facteur de $1/(s+1/5)$ est obtenu par

$$\lim_{s \rightarrow -1/5} (s+1/5)G(s) = 1/20$$

La présence d'un zéro en $s = -0.25$ rend en effet le terme $(s + 1/5)G(s)$ petit dans le voisinage et donc en $s = -0.2$. La réponse impulsionnelle se stabilise donc plus vite que le simple examen des pôles du système ne le laissait supposer.

2 Précision des systèmes linéaires.

Nous introduisons dans cette section la notion de bande passante qui est une mesure fondamentale de la précision d'un système bouclé et également un facteur critique dans la détermination de la stabilité de ces systèmes.

2.1 Bande passante. Définition.

La notion de bande passante d'un système admet de nombreuses définitions différentes. Dans tous les cas, elle déterminent la plages des pulsations ω qui correspondent à de "grandes" valeurs du module de la fonction de transfert. La définition suivante a le mérite de la simplicité.

Définition 4 La **bande passante** d'un système linéaire de fonction de transfert $P(s)$ est l'ensemble des pulsations ω telles que

$$|P(i\omega)| > 1 \quad (21)$$

La variation la plus courante de cette définition consiste à changer la valeur 1 qui détermine le seuil dans l'équation (21), parfois de façon implicite en supposant que la bande passante réunit les pulsations telles que $|P(i\omega)|$ soit "très grand" devant 1.

Très souvent, la bande passante d'un système a la forme $[0, \omega_c]$. La pulsation ω_c est alors appelée pulsation de coupure du système.

2.2 Précision d'un système bouclé.

L'objectif de régulation le plus courant consiste à faire en sorte qu'un système reproduise en sortie aussi fidèlement la consigne donnée par le signal d'entrée.

Le cas des entrées sinusoïdales est particulièrement instructif. Toute sinusoïde u de pulsation ω peut être décrite par un nombre complexe, noté $u(\omega)$ et défini comme suit

$$u(t) = A \sin(\omega t + \phi) \rightarrow u(\omega) = Ae^{i\phi} \quad (22)$$

C'est ce que l'on appelle la notation complexe (*phasor notation*). La sortie y associée à une entrée u sinusoïdale de pulsation ω est également une sinusoïde de pulsation ω , caractérisée par

$$y(\omega) = G(i\omega)u(\omega) \quad (23)$$

Le signal d'erreur $e = y - u$ satisfait donc

$$e(\omega) = (G(i\omega) - 1)u(\omega) \quad (24)$$

Cela met en évidence que, à $|u(\omega)|$ fixé, l'erreur à la pulsation ω est d'autant plus petite que $G(i\omega) - 1$ est petit. Or, si la régulation a été obtenue, comme

c'est probable, par un bouclage unitaire du système de fonction de transfert $P(s)$, alors cet écart entre $G(i\omega)$ et 1 est donné par

$$G(i\omega) - 1 = \frac{1}{1 + P(i\omega)} \quad (25)$$

Lorsque $|P(i\omega)|$ est grand, cet écart est petit, c'est donc de façon évidente que la bande passante du système en boucle ouverte caractérise la précision du système bouclé : la relation (24) implique la relation en décibels

$$|e(\omega)| \text{ en dB} \leq |u(\omega)| \text{ en dB} + 20 \log_{10}(|1 - G(i\omega)|) \quad (26)$$

$$\leq |u(\omega)| \text{ en dB} - 20 \log_{10}(|1 + P(i\omega)|) \quad (27)$$

Par conséquent, si $|P(i\omega)| \geq 100$, l'amplitude de l'erreur est à peu près atténuée de 40 dB par rapport au signal d'entrée. Si le système présente un pôle en $s = i\omega$, $|P(i\omega)| = +\infty$ et par conséquent l'erreur de suivi à cette pulsation s'annule.

2.3 Comportement permanent.

Un cas particulier important concerne **l'erreur statique**, c'est-à-dire la limite de $e(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$: si le signal de consigne a pour limite u_∞ en $+\infty$, alors $\lim_{s \rightarrow 0} sU(s) = u_\infty$ et par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = (G(0) - 1)u_\infty$$

Si le système en boucle ouverte a un pôle en 0, alors cette erreur s'annule.

2.4 Signaux de consignes quelconques.

Les informations données par les relations (24) et (26) ne concernent a priori que les signaux sinusoïdaux. Pourtant, on peut également les utiliser pour déterminer la qualité du suivi associé des signaux d'entrée plus généraux. En effet, ces relations restent valables si l'on substitue aux notations complexes $u(\omega)$, $y(\omega)$, $e(\omega)$, spécifiques aux signaux harmoniques, les transformées de Fourier $U(i\omega)$, $Y(i\omega)$, $E(i\omega)$ qui ont une portée générale. On rappelle que la connaissance de la transformée de Fourier $X(i\omega)$ d'un signal $x(t)$ permet de reconstruire ce dernier comme "superposition" d'exponentielles complexes par la formule

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (28)$$

L'énergie du signal d'erreur constitue une mesure naturelle de la qualité du suivi. Elle est définie comme

$$\mathbb{E}(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt \quad (29)$$

ou encore, en fréquentiel, par

$$\mathbb{E}(e) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |E(i\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |G(i\omega) - 1|^2 |U(i\omega)|^2 d\omega \quad (30)$$

Par conséquent, si l'essentiel de l'énergie du signal d'entrée se trouve dans la bande passante du système en boucle ouverte, alors

- Dans la bande passante, $|P(i\omega)| \gg 1$, donc $G(i\omega) \approx 1$.

– En dehors de la bande passante, $U(i\omega) \approx 0$.

Par conséquent, l'erreur de suivi en boucle fermée sera faible. Augmenter la bande passante du système permet donc d'améliorer la précision du système en réponse à des consignes de plus en plus rapides.

EXEMPLE. Considérons le système résultant du bouclage unitaire du système de fonction de transfert $P(s) = 3/(s + 1)$. Examinons la qualité de sa réponse à un créneau de durée T variable. Dans les domaines de Laplace et fréquentiel, ce signal de consigne est donné par

$$U(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad \text{et} \quad U(i\omega) = 2 \left| \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega} \right|$$

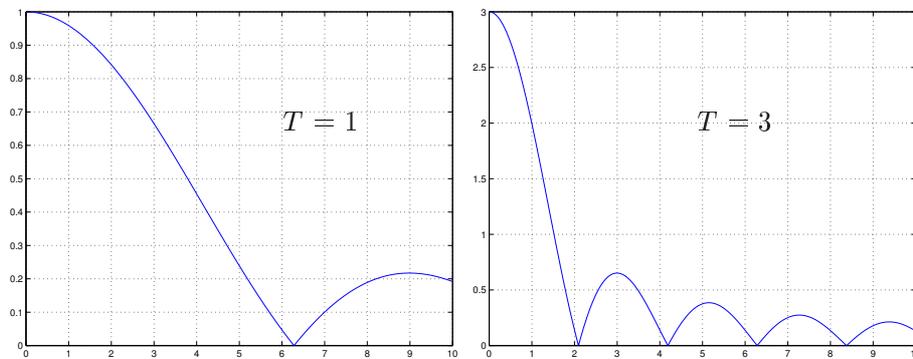


FIG. 7 – Tracés de $|U(i\omega)|$ pour $T = 1$ et $T = 3$.

Le tracé du module de la transformée de Fourier de la consigne montre que l'énergie du signal se concentre aux basses fréquences lorsque T augmente et au contraire s'étale sur une bande de plus en plus large lorsque T diminue. La bande passante du système en boucle ouverte, caractérisée par

$$|P(i\omega)| \geq 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \omega \leq 2\sqrt{2}$$

est une bande de basse fréquence. Par conséquent, la qualité du suivi augmente lorsque T augmente.

Lorsque la durée T devient suffisamment grande, l'écart résiduel entre la consigne et la sortie est quasiment l'erreur statique du système, donnée par

$$\frac{1}{1 + P(0)} = \frac{1}{4}$$

ce qui est confirmé par la figure 8 (en bas).

Si préalablement au bouclage, on amplifie le système par un gain statique $K > 1$, alors on augmente la bande passante de la boucle ouverte et on réalise ainsi de bien meilleures performances sur le suivi du signal de période $T = 1$, et l'on diminue l'erreur statique (fig. 8 en haut à droite).

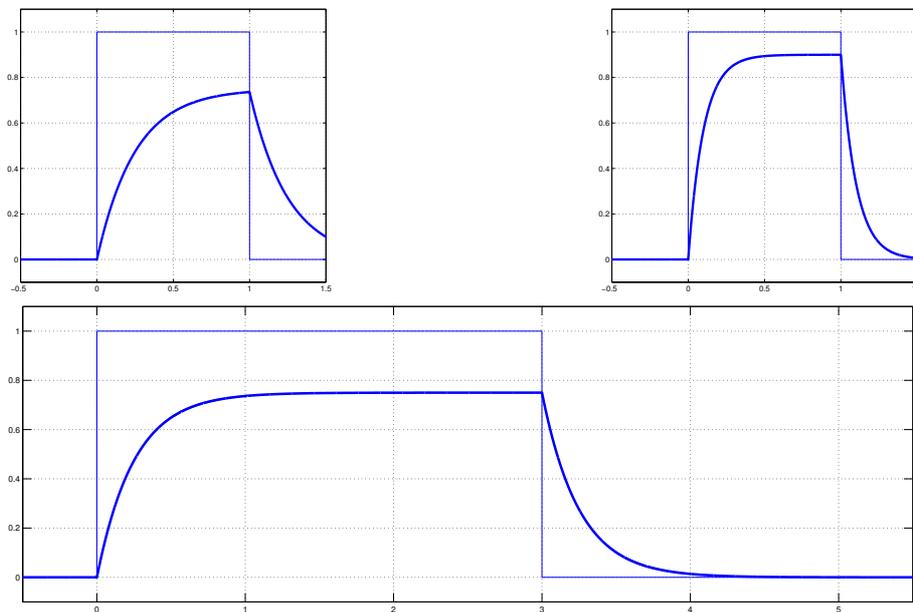


FIG. 8 – Tracés des réponses à un créneau - consigne trait fin, réponse trait gras. En haut à gauche : $T = 1$. En haut à droite : $T = 1$. En bas : $T = 3$. En haut à droite : $T = 1$ et système en b.o. amplifié ($\times 3$) avant rétroaction.

3 Stabilité des systèmes linéaires.

3.1 Stabilité des boucles de rétroaction - Le critère de Nyquist

Nous savons déjà déterminer si l'utilisation d'une rétroaction génère un système stable : il suffit de déterminer les pôles de la fonction de transfert de la boucle fermée pour pouvoir conclure. Il s'agit néanmoins d'un critère de test a posteriori, qui permet difficilement de déterminer la classe des contrôleurs qui engendrent un système bouclé stable.

Le critère de stabilité de Nyquist permet de résoudre ce problème. Il s'agit d'un critère graphique que nous énonçons dans la section suivante.

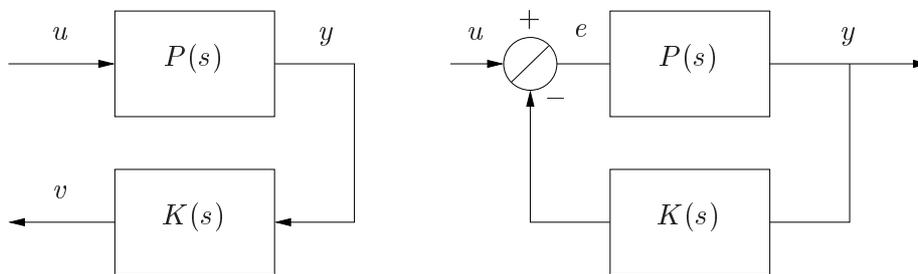


FIG. 9 – Schéma avec le contrôleur dans la boucle de rétroaction. Système en boucle ouverte (à gauche) et en boucle fermée (à droite).

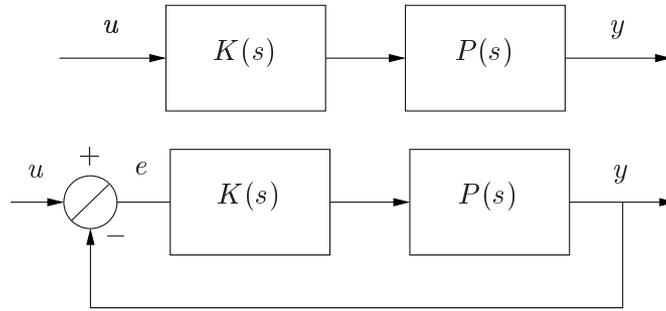


FIG. 10 – Schéma avec le contrôleur dans la boucle directe. Système en boucle ouverte (en haut) et en boucle fermée (en bas).

3.1.1 Énoncé et démonstration

Le critère de Nyquist est basé sur un résultat classique de la théorie des fonctions d'une variable complexe que nous rappelons sans démonstration

Lemme 1 (Cauchy) - Soit $F(s)$ une fraction rationnelle et γ un lacet simple de \mathbb{C} , orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, qui délimite une zone bornée U de \mathbb{C} . On suppose que

- la fonction $F(s)$ possède Z zéros et P pôles dans U .
- aucun pôle ni zéro n'est présent sur la frontière de U .

Alors, l'image du lacet γ par la fonction f effectuée autour de l'origine N tours dans le sens des aiguilles d'une montre, avec

$$N = Z - P \quad (31)$$

Remarque - Vérification du signe. En cas d'hésitation entre la relation (exacte) $N = Z - P$ et la relation $N = P - Z$, (erronée, du moins avec les conventions d'orientation adoptées), on peut utiliser un des deux exemples simples suivants pour lever l'incertitude.

- Prenons $F(s) = s$, et choisissons pour U le disque centré en 0 et de rayon 1 par exemple. Le lacet γ , donné par

$$\gamma(t) = e^{-it}, t \in [0, 2\pi] \quad (32)$$

délimite bien la région bornée U , est simple (il passe une seule fois par chaque point de cette frontière), est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, et ne passe sur aucun pôle ou zéro de F . L'image de ce lacet par F , c'est-à-dire $F \circ \gamma$, est tout simplement γ . Par conséquent, $N = 1$. D'autre part, la région U contient un zéro de F (en $s = 0$), et aucun pôle, donc $Z - P = 1$.

- Prenons $F(s) = 1/s$, et choisissons U et γ comme dans l'exemple précédent. Le lacet $F \circ \gamma$, image de γ par F , vérifie

$$[F \circ \gamma](t) = \frac{1}{e^{-it}} = e^{it}, t \in [0, 2\pi] \quad (33)$$

Il fait donc 1 tour autour *mais dans le sens contraire des aiguilles d'une montre*, par conséquent $N = -1$. D'autre part, la région U ne contient aucun zéro de F et un pôle, de multiplicité 1 en $s = 0$, donc $Z - P = -1$.

3.1.2 Lieu de Nyquist - Application du lemme de Cauchy à un domaine non borné.

Le lemme de Cauchy est utilisé en automatique pour tester la présence de pôles instables dans une boucle de rétroaction. L'ensemble ouvert U que nous souhaitons donc considérer est le demi-plan droit ouvert

$$U = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 0\} \quad (34)$$

... mais cet ensemble est non-borné ! Le lemme de Cauchy ne peut donc être appliqué tel quel : il est nécessaire de faire appel à un argument de "passage à la limite" qui sera valable lorsque

$$F(\infty) = \lim_{|s| \rightarrow +\infty} F(s) \neq 0 \quad (35)$$

Nous cherchons à appliquer le théorème de Nyquist aux ensembles bornés

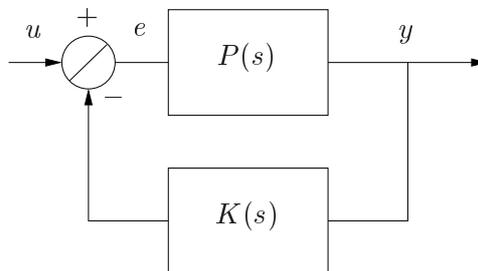
$$U_n = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 0, |s| < n\}$$

Pour un n assez grand, U_n contient tous les zéros et pôles de $F(s)$ que peut contenir U et par conséquent le nombre de tours fait par l'image du lacet γ_n délimitant la frontière de U_n par F devient constant. Par ailleurs, l'image toute entière de la portion circulaire de γ_n , c'est-à-dire $t \in [-\pi, \pi] \mapsto F(ne^{-it})$ converge vers $F(\infty)$. Comme $F(\infty)$ diffère de 0, le lacet fermé que constitue la limite de la contribution rectiligne, c'est-à-dire

$$\gamma : \omega \in \mathbb{R} \mapsto F(i\omega) \quad (36)$$

fait le même nombre de tours de 0 que γ_n pour n assez grand. Ce chemin est appelé **Lieu de Nyquist** de F .

Propriété 3 - Critère de Nyquist. Considérons le système ci-dessous résultant de l'adjonction d'un feedback de fonction de transfert $K(s)$ au système de fonction de transfert $P(s)$



Supposons que

- Il n'existe aucune simplification pôle-zéro dans le produit des fractions rationnelles $P(s)$ et $K(s)$.

- Le produit $P(s)K(s)$ n'a aucun pôle sur l'axe imaginaire.
- Le produit $P(\infty)K(\infty)$ est différent de -1 .

Alors, le système en boucle fermée est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $\omega \in \mathbb{R} \mapsto P(i\omega)K(i\omega)$ vérifie les propriétés suivantes

- Il ne passe pas par -1 .
- Il fait autant de tours autour de -1 dans le sens contraire des aiguilles d'une montre que $P(s)K(s)$ compte de pôles instables.

Démonstration – La fonction de transfert du système en boucle fermée est donnée par la relation

$$H(s) = \frac{P(s)}{1 + K(s)P(s)} \quad (37)$$

Remarquons que

- les zéros de $1 + P(s)K(s)$ sont exactement les pôles de $H(s)$; en effet, si $1 + P(s)K(s) = 0$, en l'absence de simplification possible entre un zéro de $P(s)$ et un pôle de $K(s)$, $P(s)$ doit être non nul et donc $H(s) = +\infty$. Réciproquement, si s n'était pas un zéro de $1 + PK$, mais était un pôle de $H(s)$, cela impliquerait que c'est aussi un pôle de $P(s)$. Mais alors, en l'absence de simplification entre les pôles de $P(s)$ et les zéros de $K(s)$, on aurait

$$H(s) = \frac{P(s)}{1 + K(s)P(s)} \sim \frac{P(s)}{K(s)P(s)} = \frac{1}{K(s)} \neq +\infty$$

puisque $K(s) \neq 0$.

- les pôles de $1 + P(s)K(s)$ sont les pôles du produit $P(s)K(s)$, c'est-à-dire de la boucle ouverte.

Considérons le lieu de Nyquist de $P(s)K(s)$. S'il passe par -1 à la pulsation ω , alors $1 + PK(s)$ admet un zéro en $i\omega$ et donc $H(i\omega)$ admet un pôle sur l'axe imaginaire, donc instable.

Dans le cas contraire, on applique le lemme de Cauchy (lemme 1) à la fonction de transfert $H(s)$ en choisissant pour domaine U le demi-plan droit ouvert et pour γ le chemin $\omega \in \mathbb{R} \mapsto i\omega$. Cette extension au domaine non-borné est valide puisque $1 + PK(\infty) \neq 0$.

On a écarté le cas où le lieu de Nyquist passait par -1 donc $1 + PK$ n'a pas de 0 sur la frontière de U . De plus, d'après les hypothèses faites, $1 + PK$ n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire.

Donc, le nombre de tours N que fait le lacet $[1 + PK] \circ \gamma$ autour de 0, c'est-à-dire le nombre de tours que fait $[KP] \circ \gamma$ autour de -1 est égal à la différence

$$N = Z_{1+KP} - P_{1+KP} = P_H - P_P$$

Par conséquent, comme le système bouclé est stable si et seulement si il ne possède aucun pôle dans le demi-plan droit, c'est-à-dire quand $P_H = 0$, le résultat est démontré. ■

3.2 Critère de Nyquist - Utilisation et extensions.

Plusieurs remarques s'imposent

REMARQUE - CAS USUEL : SYSTÈME STABLE. Très souvent, le système en boucle ouverte est déjà stable. La rétroaction n'a pour but que d'améliorer ses performances. Dans ce cas, le produit $P(s)K(s)$ n'a aucun pôle instable et par conséquent, lorsque ses hypothèses sont simplifiées, le critère de Nyquist nous affirme que

Propriété 4 - Forme simplifiée pour les boucles ouvertes stables. le système en boucle fermée est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de la boucle ouverte ne fait pas le tour de -1 .

Attention à l'interprétation de l'expression "ne fait pas le tour de -1 "!³

REMARQUE - CAS D'UN FEEDBACK PROPORTIONNEL (POSITIF). Considérons pour plus de simplicité la situation standard décrite précédemment dans le cas des systèmes stables en boucle ouverte. Pour des raisons de performance, on souhaite appliquer un feedback mais en se limitant à des contrôleurs proportionnels, de gain K positifs. Pour $K = 0$, le système est en boucle ouverte, et donc stable. Jusqu'à quelle valeur peut-on augmenter K sans le déstabiliser? Pour le savoir, on peut tracer le lieu de Nyquist de $KP(s)$ en augmentant progressivement la valeur de K . Graphiquement, cela correspond simplement à dilater d'un facteur K le lieu de Nyquist de $P(s)$, c'est-à-dire du système à contrôler. Si une instabilité apparaît, elle est caractérisée par le premier passage d'un point de la courbe par -1 . On cherche donc à résoudre

$$\min_{K \geq 0} K, \text{ tel que } \exists \omega, KP(i\omega) = -1 \quad (38)$$

Comme cette dernière équation est équivalente à $P(i\omega) = -1/K$, en posant $M = 1/K$, ce problème devient

$$\max_{M > 0} M, \text{ tel que } \exists \omega, P(i\omega) = -M \quad (39)$$

En bref, on détermine l'ensemble des pulsations ω telles que $P(i\omega)$ soit réel et strictement négatif; on sélectionne la pulsation (critique) ω_c qui correspond à la valeur la plus négative. La valeur limite (ou critique) du gain K_c à partir duquel le système est déstabilisé est alors donnée par la relation

$$K_c = -1/P(i\omega_c) \quad (40)$$

EXEMPLE - UN SYSTÈME OSCILLANT. Intéressons-nous à la régulation d'un système donné par la fonction de transfert

$$P_1(s) = \frac{47.37}{0.1s^3 + 1.377s^2 + 7.718s + 39.48} \quad (41)$$

Il s'agit d'un système du second ordre stable, sans zéro. Il est caractérisé par un gain statique de $+20\%$, une pseudo-période d'oscillation de $T_1 = 1 \text{ s}^{(4)}$ et un facteur d'amortissement de $\xi = 0.3$. Malgré le caractère très oscillant de

3. Une formulation plus précise serait "le nombre algébrique de tours faits autour de -1 est nul". Si les tours effectués dans un sens sont compensés par un nombre égal de tours faits dans l'autre sens, le système en boucle fermée est stable. Cela correspond à une situation possible mais très peu fréquente: il faudrait en particulier que la phase du système passe par 180 degrés (à un multiple de 360 degrés près) pour plusieurs pulsations ω , ce qui est impossible si le système est minimum de phase par exemple.

4. La pulsation naturelle (en l'absence d'amortissement) du système est donnée par $\omega_n = 2\pi/T_1$.

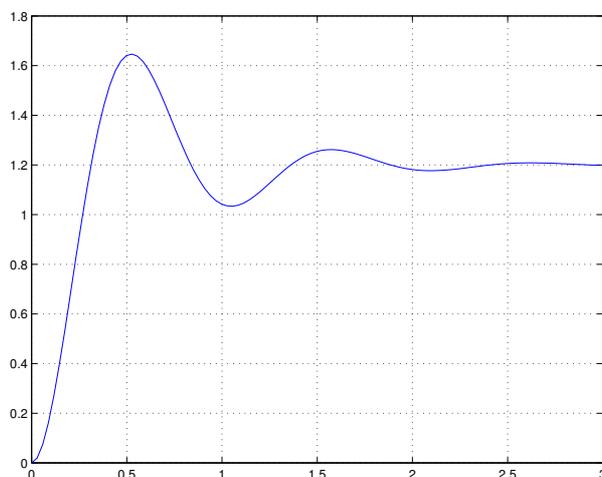


FIG. 11 – Réponse indicielle du second ordre.

ce système, l'examen du lieu de Nyquist, représenté en fig. 12 (et l'application standard du critère pour les systèmes stables en boucle ouverte) montre qu'aucun feedback proportionnel ne peut le déstabiliser puisque le lieu de Nyquist ne coupe pas la demi-droite (ouverte) des valeurs réelles strictement négatives. Une analyse plus fine du système qui nous concerne montre que

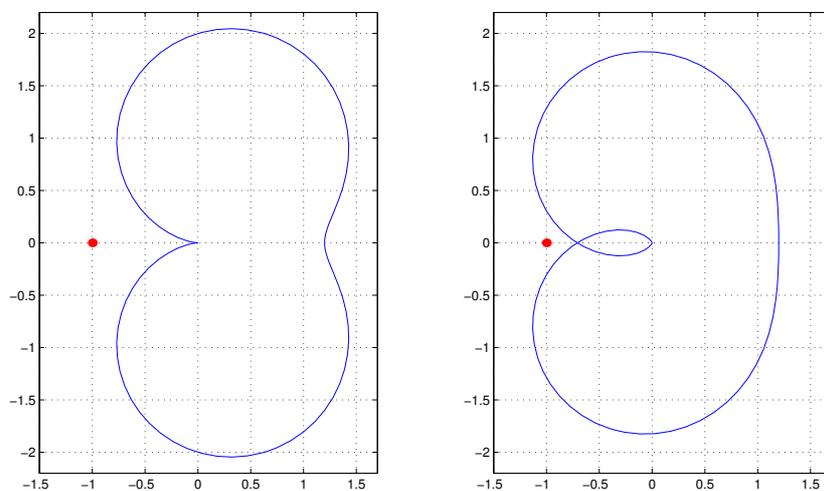


FIG. 12 – Diagrammes de Nyquist de $P_1(s)$ (à gauche) et de $P_2(s)$ (à droite).

l'on a négligé une dynamique du premier ordre rapide (temps caractéristique $T_2 = 0.1$ s) dans le système précédent : une fonction de transfert plus proche des propriétés du système est donc donnée par

$$P_2(s) = P_1(s) \frac{1}{0.1s + 1} \quad (42)$$

L'analyse du nouveau lieu Nyquist (fig. 12) montre alors que le gain critique $K_c = 1.4$ déstabilise le système. La pulsation critique associée est $\omega_c = 8.8$ rad/s; pour des valeurs du feedback proches de K_c , on verra donc apparaître un signal quasi-sinusoïdal de fréquence 1.4 Hz.

3.2.1 Conditions d'applications du théorème de Nyquist.

Revenons sur la nature des deux hypothèses nécessaires à l'utilisation du critère de Nyquist.

Présence de pôles de PK sur l'axe imaginaire. Lorsqu'il existe un tel pôle en $\lambda = i\omega_p$, on ne peut pas appliquer le théorème 3 tel quel. Cette situation est gênante dans la mesure où une stratégie de régulation classique préconise d'ajouter un pôle en $s = 0$ au système lorsque celui-ci n'en possède pas. Nous présentons donc une extension du critère de Nyquist qui permette de prendre en compte ce cas.

Notons qu'il est facile de caractériser graphiquement la présence d'un pôle imaginaire $\lambda = \pm i\omega_p$ sur le diagramme de Nyquist ou de Bode : elle correspond à un lieu de Nyquist non borné, ou bien à un gain infini à la pulsation ω_p . Nous pouvons être plus précis : si au voisinage de λ , $P(s)K(s)$ est équivalente à

$$P(s)K(s) \sim \frac{Ae^{i\phi}}{(s - i\omega_p)^n}, \quad A > 0 \quad (43)$$

Alors le lieu de Nyquist présente les deux directions asymptotiques suivantes

$$\begin{aligned} \theta &= \phi + n\pi/2 & \text{quand } \omega \rightarrow \omega_p^- \\ \theta &= \phi - n\pi/2 & \text{quand } \omega \rightarrow \omega_p^+ \end{aligned} \quad (44)$$

Au voisinage de $s = \lambda$, la boucle fermée a le même comportement que la fraction rationnelle $1/K(s)$

$$\frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} \sim \frac{1}{K(s)}$$

et par conséquent, il ne s'agit pas d'un pôle de la boucle fermée. Par suite, il existe nécessairement un voisinage (suffisamment petit) de ce point où l'on est certain que la boucle fermée ne présente aucun pôle. Par conséquent, on peut se contenter de tester la présence de pôles instables dans une zone qui contient le demi-plan droit à l'exception de petits voisinages sphériques de $s = \lambda$.

Il faut donc modifier le tracé du lieu de Nyquist pour tenir compte de cette modification. On peut paramétrer l'arc de cercle centré en λ et de rayon r qui permet d'éviter le passage par λ par

$$\gamma(\theta) = \lambda + re^{i\theta}, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (45)$$

L'image de γ par $1 + PK$ est asymptotiquement confondue, lorsque r tend vers 0, avec

$$[1 + PK] \circ \gamma(\theta) \sim \frac{A}{r^n} e^{i(\phi - n\theta)} \quad (46)$$

C'est donc un arc de cercle dont le rayon A/r^n tend vers $+\infty$ et qui décrit, dans le sens des aiguilles d'une montre, l'arc dont l'angle évolue continuellement entre

$$\text{de } \phi + n\frac{\pi}{2} \text{ à } \phi - n\frac{\pi}{2} \quad (47)$$

La "chirurgie" à effectuer sur le lieu de Nyquist consiste donc à

- Sélectionner un pôle imaginaire pur de PK .
- Déterminer sa multiplicité n .
- Repérer les branches asymptotiques associées à ω_p^- et ω_p^+ et supprimer les parties dont la distance à l'origine sont supérieures à un rayon R suffisamment grand.
- Relier les extrémités des arcs ω_p^- à ω_p^+ ainsi générés par un arc de cercle de rayon R faisant $n/2$ tours dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Reprendre cette procédure pour les pôles imaginaires purs restant.

EXEMPLE - UN SIMPLE INTÉGRATEUR. La fonction de transfert du système est

$$P(s) = \frac{1}{s}$$

On cherche à savoir si un retour proportionnel de gain $K > 0$ peut stabiliser ce système. Pour le système $KP(s)$

$$\omega_p = 0, \phi = 0 \text{ et } n = 1$$

Le lieu de Nyquist de $KP(s)$ décrit l'axe imaginaire. Lorsque ω évolue de $-\infty$ à $+\infty$, $\omega \mapsto K/i\omega$ évolue de 0^+ à $+i\infty$, puis de $-\infty$ à 0^- . Appliquer la procédure décrite plus haut consiste à ne conserver que le segment $[-iR, iR]$ et à relier iR et $-iR$ (dans cet ordre) par un demi-cercle décrit dans le sens des aiguilles d'un montre, donc dans le demi-plan droit.

Le lieu de Nyquist ainsi modifié ne fait le tour de -1 pour aucune valeur de K positive. Comme le système en boucle ouverte ne contient aucun pôle dans le demi-plan droit hormis en 0 , cela signifie que la boucle fermée est stable.

Existence de simplifications pôle-zéro dans le produit PK . Un contrôleur $K(s)$ qui provoque une simplification pôle-zéro du produit $P(s)K(s)$ introduit un mode caché (*hidden mode*) au sein de la dynamique globale, c'est-à-dire qu'une grandeur du système devient soit inaccessible à la mesure, soit impossible à modifier.

Nous reviendrons en détail sur ce phénomène dans l'étude du modèle d'état des systèmes dynamiques lors du chapitre suivant. Contentons-nous à ce stade de montrer sur un exemple que les stratégies de commande basées sur les simplifications pôles-zéros ne sont pas robustes par rapport aux incertitudes existant sur le modèle et doivent donc a priori être évitées.

EXEMPLE - SIMPLIFICATION PÔLE-ZÉRO ET ROBUSTESSE DE LA COMMANDE. Une simplification pôle-zéro survient dans le produit $P(s)K(s)$ en particulier lorsque l'on cherche un contrôleur qui doit réaliser une inversion exacte de la dynamique, c'est-à-dire tel que

$$\frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} = 1 \tag{48}$$

Dans ce cas, le système bouclé est idéal puisqu'il reproduit de façon exacte en sortie la consigne reçue en entrée. Le contrôleur $K(s)$ qui satisfait cette relation

est donné par

$$K(s) = 1 - \frac{1}{P(s)} \quad (49)$$

ce qui met en évidence que les zéros de $P(s)$ sont les pôles de $K(s)$. Prenons par exemple le système

$$P(s) = \frac{s-1}{s+10} \quad (50)$$

de temps caractéristique $T = 0.1$ s et de gain statique -1 . Le contrôleur déterminé par la relation (49) est

$$K(s) = -\frac{11}{s-1} \quad (51)$$

Imaginons maintenant que le système n'est pas été parfaitement identifié et qu'au lieu d'être caractérisé par la fonction de transfert (50), il l'est par

$$P(s) = \frac{s - (1 + \varepsilon)}{s + 10} \text{ avec } 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (52)$$

ce qui ne représente qu'une erreur d'identification mineure du modèle. La fonction de transfert réelle de la boucle fermée avec le contrôleur précédent est donnée par

$$H(s) = \frac{s^2 - (2 + \varepsilon)s + (1 + \varepsilon)}{s^2 - 2s + (1 + 11\varepsilon)} \quad (53)$$

La boucle fermée présente donc une instabilité de constante de temps $T = 1$ seconde! Dans la stratégie mise en oeuvre, la qualité de la régulation est beaucoup trop sensible aux erreurs de modèle pour pouvoir être acceptable.

3.3 Marges de stabilité

Dans le processus de conception d'un régulateur, en plus de respecter les objectifs de précision, il est nécessaire d'assurer la stabilité du système bouclé. Cette dernière vérification est encore insuffisante. Il faut en effet s'attendre à ce que les conditions réelles d'utilisation du contrôleur diffèrent, dans le meilleur des cas légèrement, du modèle mathématique utilisé pour la conception ; il est possible que le modèle du système à commander ait été simplifié ou identifié de manière approximative, que le processus d'acquisition des mesures induise un retard dans l'application de la commande, etc.

Par conséquent, il convient de concevoir le contrôleur de telle sorte que le système commandé soit suffisamment éloigné de l'instabilité. Plusieurs mesures de cette distance existent : ce sont les marges de stabilité, que l'on présente dans cette section.

3.3.1 Principe général.

Considérons un système $P(s)$ à commander et $K(s)$ un contrôleur conçu de telle sorte que le système série, de fonction de transfert $L(s) = P(s)K(s)$, soit stable par rétroaction unitaire.

Imaginons désormais que cette configuration nominale soit soumise à des variations, fonction d'un paramètre réel λ . La fonction de transfert de la boucle ouverte est notée $L_\lambda(s)$; lorsque $\lambda = \lambda_0$, le système est dans la configuration nominale.

Nous supposons que les variations de $L_\lambda(s)$ dépendent continument du paramètre λ et que de plus pour tout λ

- Les hypothèses du critère de Nyquist associé à la boucle ouverte $L_\lambda(s)$ sont vérifiées.
- Le système $L_\lambda(s)$ a le même nombre de pôles instables que $L_{\lambda_0}(s)$.

Sous ces hypothèses, pour que la configuration correspondant à $\lambda = \lambda_1$ soit instable en boucle fermée, il faut que le lieu de Nyquist de $L_{\lambda_1}(s)$ passe par le point -1 ou bien qu'il effectue autour de -1 un nombre de tours différent de celui effectué par $\omega \in \mathbb{R} \mapsto L_\lambda(i\omega)$ qui lui est stable. Mais dans ce dernier cas, il existe nécessairement une valeur λ , intermédiaire entre λ_0 et λ_1 telle que $\omega \in \mathbb{R} \mapsto L_\lambda(i\omega)$ passe par -1 .

Par conséquent, si initialement on a $\lambda = \lambda_0$, tant que les variations de λ ne font pas passer le lieu de Nyquist de L_λ par -1 , le système est stable en boucle fermée. Un moyen de se protéger des instabilités dues à des variations du modèle est donc d'éloigner le lieu de Nyquist de L_{λ_0} de -1 . Toutes les marges de stabilité mesurent d'une façon ou d'une autre la distance du lieu de Nyquist de la boucle ouverte au point -1 .

3.3.2 Marge de gain, marge de phase.

Les marges de gain et de phase d'un système $L(s)$, supposé stable par une rétroaction unitaire, sont définies comme suit

- La marge de gain M_K est le plus petit gain $K > 1$ qui, en série avec le système, déstabilise la boucle fermée, c'est-à-dire tel que le lieu de Ny-

quist $\omega \mapsto KG(i\omega)$ passe par -1 . Analytiquement,

$$\frac{1}{M_K} = \max\{|L(i\omega)|, \omega \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } L(i\omega) \in -1, 0[\}\} \quad (54)$$

- La marge de phase M_ϕ est le plus petit retard de phase $\phi > 0$ déstabilisant la boucle fermée, c'est-à-dire tel que la portion du lieu de Nyquist de pulsation positive $\omega \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-i\phi}L(i\omega)$ passe par -1 . Analytiquement,

$$M_\phi = \min\{\pi - \angle L(i\omega), \omega \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } |L(i\omega)| = 1\} \quad (55)$$

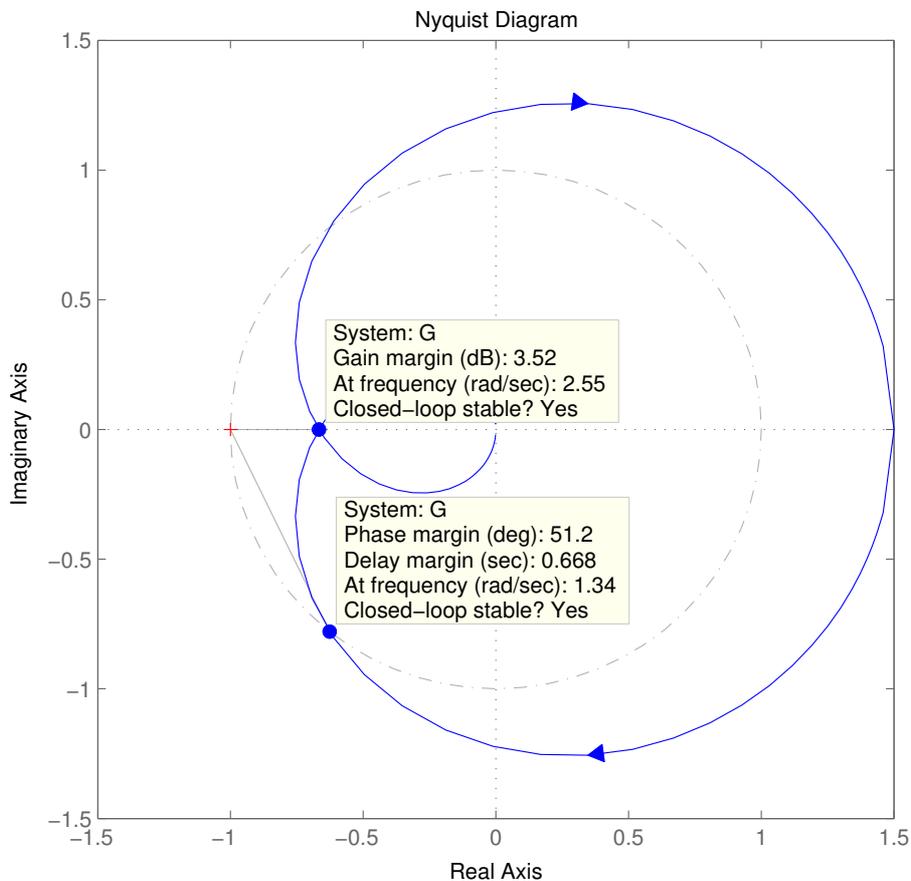


FIG. 13 – Diagramme de Nyquist de $G(s) = -2 \frac{(s-1.5)}{(s+1)(s+2)}$. La marge de gain est l'inverse de la distance entre le point bleu sur l'axe réel et 0. La marge de phase est l'angle entre le vecteur joignant 0 au point bleu inférieur (distance à 0 égale à 1) et le vecteur joignant 0 à -1 .

Dans le cas où aucune amplification (resp. aucun retard de phase) ne peut déstabiliser le système en boucle fermée, on dit que la marge de gain (resp. la marge de phase) est infinie. Les définitions que nous avons données des marges de gain et de phase sont parfois complexifiées ; en l'état actuel des définitions, nous n'avons aucune information sur la facilité avec laquelle une atténuation

de la boucle ouverte ($K < 1$) ou une avance de phase permet de déstabiliser le système. Il arrive donc parfois que l'on remplace les chiffres M_K et M_ϕ par des intervalles désignant les zones de stabilité.

Les marges de gain et de phase ne caractérisent qu'imparfaitement la distance du lieu de Nyquist de la boucle ouverte au point -1 . Elles sont pourtant très utilisées car leur détermination à partir du diagramme de Bode de la boucle ouverte est aisée. Les étapes clés consistent en effet à déterminer les pulsations ω telles que $|G(i\omega)| = 0$ dB (détermination de la marge de phase) et $\angle G(i\omega) = -180$ degrés (détermination de la marge de gain).

EXEMPLE. Le système de fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.5)(s + 1)(s + 3)} \quad (56)$$

est stable en boucle ouverte. L'examen de son lieu de Nyquist ou de son diagramme de Bode (fig. 14) montre qu'il l'est également par rétroaction unitaire.

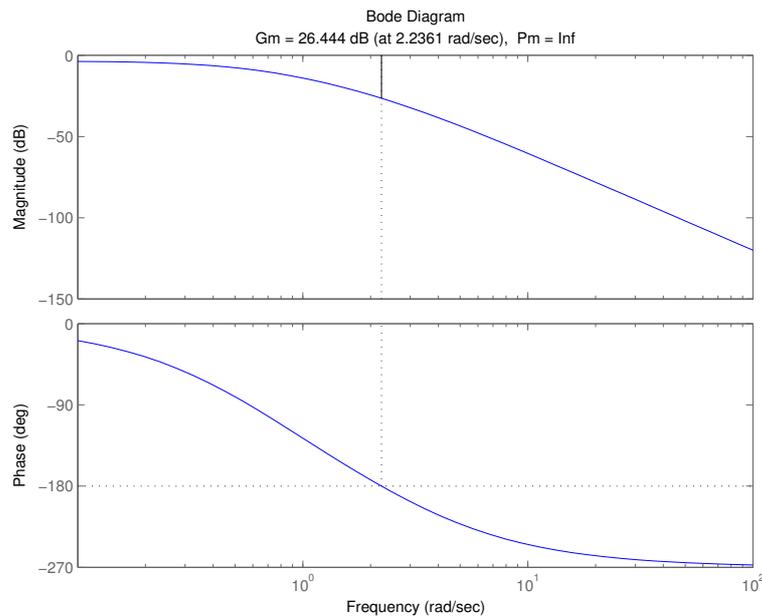


FIG. 14 – Diagramme de Bode de $G(s)$. Marge de gain.

Quelle que soit la pulsation ω , son gain en dB est strictement inférieur à 0 : sa bande passante est vide. Sa marge de phase est donc infinie car aucune rotation du lieu de Nyquist ne peut le faire passer par -1 . On détermine sa marge de gain en repérant les pulsations pour lesquelles la phase vaut -180 degrés. En l'occurrence, cela n'arrive que pour une pulsation : $\omega_c = 2.2$ rad/sec. A cette pulsation, le gain du système est de -26.4 dB ; il faudrait donc amplifier le système d'un facteur 21 ($+26.4$ dB) pour que, à cette pulsation, le gain soit égal à 1 et ainsi déstabiliser la boucle fermée. La marge de phase est donc $M_K = 21$.

Si nous souhaitons augmenter la précision du système en boucle fermée, nous pouvons amplifier le système par le gain $K = 10$: cela est inférieur à la marge de gain et n'entraînera donc pas d'instabilité. La marge de gain résiduelle du système $KG(s)$ sera alors $26.4 - 20 \log_{10} 10 = +6.4$ dB.

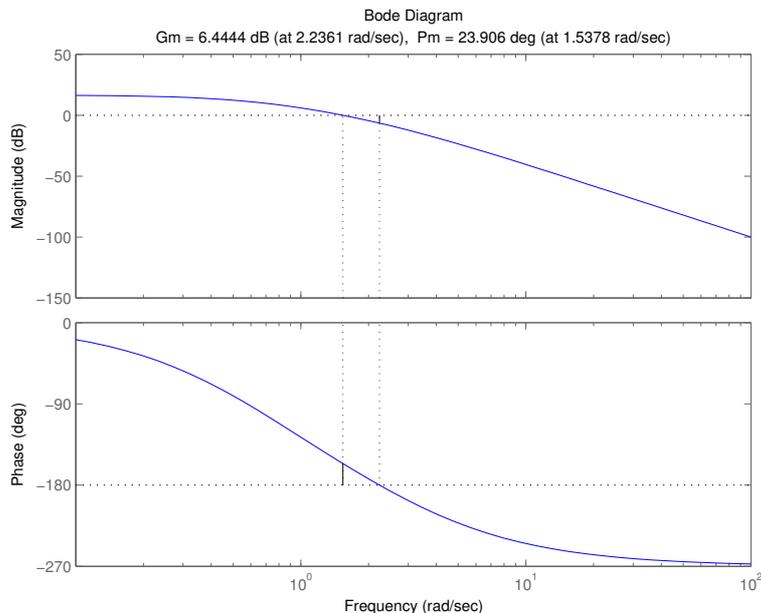


FIG. 15 – Diagramme de Bode de $KG(s)$ avec $K = 10$. Marge de gain, marge de phase.

Le système $KG(s)$ n'a toutefois plus de marge de phase infinie : la bande passante du système s'étend désormais de 0 à 1.5 rad/s (cf. fig. 15). Par définition, à cette pulsation de coupure $\omega_c = 1.5$ rad/s, le gain $|KG(i\omega)|$ vaut 1. Le diagramme de Bode nous informe que $\angle G(i\omega_c) = -156$ degrés. Par conséquent, la marge de phase du système est donnée par $M_\phi = 180 - 156 = 24$ degrés.

Montrons ce que cela implique comme stabilité par rapport aux retards dans la boucle. Un retard de T secondes introduisant une multiplication de la réponse harmonique par $e^{-i\omega T}$, le module de la réponse harmonique de la boucle ouverte n'est pas perturbé, et la phase est retardée de ωT radians. Cela cause une instabilité quand le point initialement situé en $KG(i\omega)$ atteint -1 , c'est-à-dire lorsque $\omega T = M_\phi$. Tout retard de durée inférieure à $T = 24/1.5 = 16$ secondes préserve donc la stabilité de la boucle fermée.

3.3.3 Marge de module.

Sa définition est plus simple que celle des marges de gain ou de phase et se prête mieux à une analyse systématique de la robustesse des systèmes. Elle est définie comme la distance du lieu de Nyquist de la boucle ouverte au point -1 :

$$M_m = \inf_{\omega \in \mathbb{R}} |1 + L(i\omega)| \quad (57)$$

EXEMPLE. Si le système de fonction de transfert $L(s)$ est stable et possède une marge de module M_m alors le système perturbé de la figure 16 est encore stable si $|\varepsilon| < M_m$. En effet la distance entre le lieu de Nyquist de la boucle

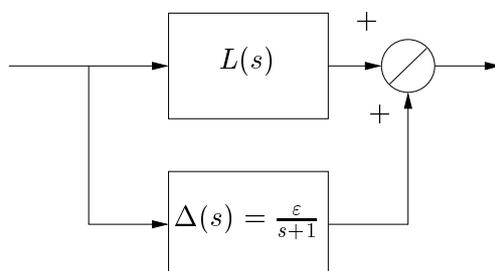


FIG. 16 – Système perturbé.

ouverte perturbée $\omega \mapsto L_{\Delta}(i\omega) = L(i\omega) + \Delta(i\omega)$ et le point -1 est donnée par $|1 + L(i\omega) + \Delta(i\omega)|$. Or,

$$|1 + L(i\omega) + \Delta(i\omega)| \geq |1 + L(i\omega)| - |\Delta(i\omega)| \quad (58)$$

$$\geq \inf_{\omega} |1 + L(i\omega)| - \sup_{i\omega} |\Delta(i\omega)| = M_m - |\varepsilon| \quad (59)$$

Par conséquent, si $|\varepsilon| < M_m$, $|1 + L_{\Delta}(i\omega)| > 0$ et la stabilité est assurée.

4 Conception de contrôleurs

Les sections précédentes nous ont montré les deux grandes catégories d'objectifs d'un problème de commande. Les objectifs de précision peuvent être caractérisés par des seuils maximaux sur le temps d'élévation et/ou le temps d'établissement en réponse à un échelon, une erreur statique maximale, etc. Les objectifs de stabilité peuvent être caractérisés par différentes marges.

Nous chercherons dans la suite à satisfaire ces objectifs de commande en se limitant aux structures de contrôle composées (cf. fig. 10)

- d'un contrôleur $K(s)$ en position de précompensateur
- d'une rétroaction unitaire

Dans ce schéma, la commande exercée est calculée à partir de l'évolution de l'erreur $e = y - u$ entre la sortie effective et le signal de consigne, c'est-à-dire la sortie souhaitée. Dans le domaine de Laplace, ce schéma se traduit par les relations

$$\begin{cases} Y(s) = P(s)U(s) \\ E(s) = Y(s) - U(s) \\ U(s) = -K(s)E(s) \end{cases} \quad (60)$$

Nous nous intéressons dans cette section aux méthodes de détermination du contrôleur $K(s)$ adéquat. Nous présentons quelques systèmes élémentaires et paramétrables dont la combinaison permet de résoudre les problèmes de commande de complexité faible ou moyenne.

4.1 Contrôleur proportionnel.

Fréquemment, l'utilisation d'un seul contrôleur proportionnel ne permet pas de satisfaire les objectifs de la régulation : l'augmentation du gain améliore certes le temps de réponse du système, mais finit par dégrader les marges de stabilité, puis par rendre le système instable.

Mettons ce phénomène en évidence lorsque

- Le système est stable en boucle ouverte.
- Son gain est grossièrement décroissant.
- La phase du système passe par -180 degrés (à 360 degrés près).

C'est une situation plus que courante qui pourtant va générer le phénomène décrit ci-dessus. On pourra se reporter à l'exemple de la section 3.3.2 représenté sur les figures 14 et 15 pour un portrait de cette situation typique. Si l'on applique une amplification très faible à ce type de système, on peut s'arranger pour que le gain résultant soit inférieur à 0 dB à toute pulsation. Le système après bouclage unitaire est alors stable puisque le lieu de Nyquist de la boucle ouverte ne peut encercler -1 . Si l'on augmente l'amplification, on fait apparaître un début de bande passante aux faibles pulsations. Puis, en augmentant le gain, on élargit la bande passante du système, c'est-à-dire que l'on décale la pulsation de coupure vers la droite ... et on la rapproche de la pulsation ou la phase du système vaut -180 degrés, en réduisant de ce fait la marge de phase. Lorsque la pulsation de coupure correspond à ce point limite, le lieu de Nyquist passe par -1 et le système bouclé devient instable.

Si les marges sont trop dégradées lorsque la bande passante devient assez large pour obtenir un système assez rapide, le seul contrôleur proportionnel n'est pas une option satisfaisante. Cette première étape de régulation devra être complétée par l'adjonction d'un correcteur destiné à restaurer ces marges et/ou à améliorer la précision du système bouclé. Les contrôleurs à avance ou à retard de phase, présentés dans les section suivantes, sont dans les situations simples de bons candidats pour réaliser cette seconde étape.

4.2 Contrôleur proportionnel-dérivé ou à avance de phase

Plutôt que de présenter l'utilisation des contrôleurs proportionnel dérivé, de fonction de transfert du type

$$K(s) = K_p + K_d s \quad (61)$$

on préfère se consacrer aux **correcteurs à avance de phase** (*lead compensator*) qui peuvent être perçus comme de simples proportionnel-dérivé dont on aurait limité l'action du terme dérivé à une certaine bande de pulsation $[0, \omega_d]$ ⁽⁵⁾.

Pour réaliser cette limitation, on introduit la fonction de transfert

$$P(s) = \frac{s\omega_d}{s + \omega_d}$$

qui caractérise un filtre passe-bas de gain statique unitaire et pulsation de coupure proche de ω_d . On modifie alors le contrôleur proportionnel-dérivé standard en posant

$$K(s) = K_p + (K_d s)P(s) \quad (62)$$

5. ce qui est de toute façon indispensable dans la pratique, ne serait-ce que pour éviter d'amplifier la composante haute fréquence des bruits de mesure

Avec

$$K = K_p, T = \frac{1}{\omega_c} + \frac{K_d}{K_p}, a = \frac{K_p}{K_p + K_d \omega_c} \quad (63)$$

on met en évidence des paramètres de design plus pratiques ; le contrôleur est alors mis sous la forme standard des correcteurs à avance de phase

$$K(s) = K \frac{Ts + 1}{aTs + 1}, a < 1 \quad (64)$$

La terminologie de correcteur à avance de phase (*lead compensator*) provient du fait que placé en série avec un système linéaire, il ajoute à la phase de ce système la valeur positive suivante

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \angle(iT\omega + 1) - \angle(iaT\omega + 1) \\ &= \arctan(T\omega) - \arctan(aT\omega) \end{aligned}$$

Ce déphasage, positif pour tout $\omega \in \mathbb{R}_+$, est maximal pour la pulsation $\omega_m = 1/(\sqrt{a}T)$ où l'on a

$$\sin \phi_m = \sin \phi(\omega_m) = \frac{1-a}{1+a} \quad (65)$$

Le diagramme de Bode d'un compensateur à avance de phase est représenté sur la figure 17.

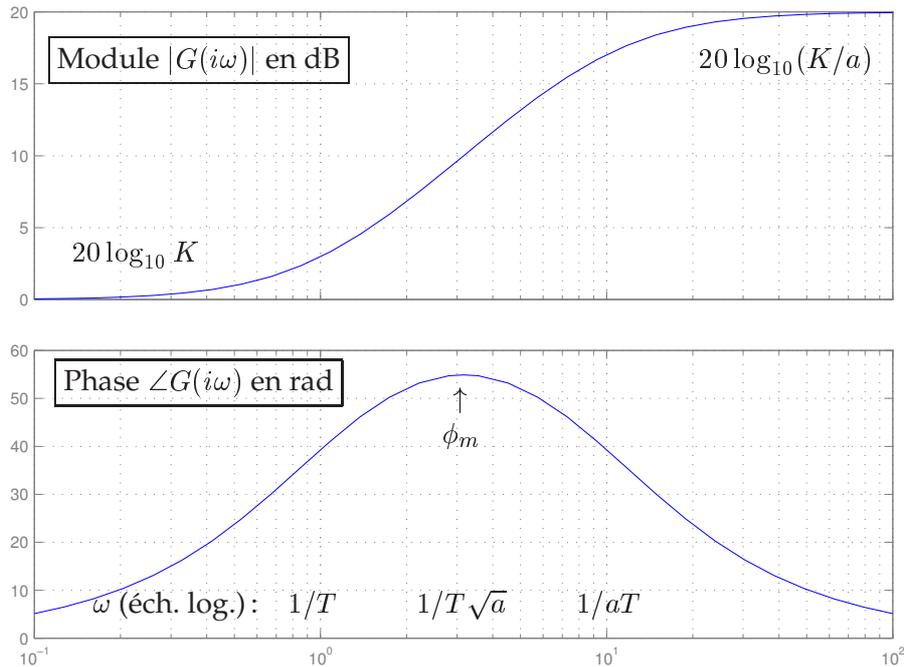


FIG. 17 – Diagramme de Bode d'un correcteur à avance de phase (valeurs numériques : $K = 1, T = 1, a = 1/10$).

Il est impossible de dresser le portrait de toutes les situations où un correcteur à avance de phase peut être utilisé. Nous nous contentons de décrire son utilisation dans un cas typique, et nous encourageons le lecteur à examiner avec attention la démarche qui justifie son emploi.

Une situation standard. Nous supposons dans cette section que le système à contrôler, de fonction de transfert $P(s)$, est tel que

- Le gain $P(i\omega)$ est une fonction grossièrement décroissante de la phase ; il atteint une seule fois la valeur de 0 dB à la pulsation ω_c . Autour de cette pulsation ω_c , la pente du gain sur une échelle logarithmique est proche de -40 dB/décade⁶.
- La phase $\angle G(i\omega)$ du système décroît grossièrement à partir de 0 en $\omega = 0$ mais varie peu autour de ω_c .

L'emploi d'un correcteur à avance de phase se justifie lorsque la marge de phase du système est insuffisante, c'est-à-dire lorsque la phase de $G(i\omega_c)$ est trop proche de -180 degrés. C'est une situation que l'on rencontre couramment lorsque l'on a essayé dans une première étape de réguler le système au moins d'une seule correction proportionnelle.

L'introduction d'un correcteur à avance de phase en série avec le système décrit précédemment va tendre à

- Augmenter la bande passante du système : le passage du gain par 0 dB aura lieu à une pulsation $\omega'_c > \omega$.
- Améliorer la marge de phase du système.

Pour faire en sorte que la correction se fasse sentir avant le passage par 0 dB du système, on prendra T tel que

$$\frac{1}{T} \leq \omega_c, \text{ c'est-à-dire } \omega_c T \geq 1 \quad (69)$$

à partir de la pulsation $\omega = 1/T$, la pente n'est plus -40 dB/décade mais -20 dB/décade; un calcul élémentaire montre que la pulsation de coupure du système ainsi compensé est donnée par

$$\omega'_c = \omega_c(\omega_c T) \quad (70)$$

6. Cette hypothèse semble arbitraire et mérite une brève explication. Elle est partiellement justifiée par le résultat de Bode suivant :

Considérons un système de fonction de transfert $G(s)$ est stable, à minimum de phase et de gain statique positif. Alors la connaissance du module $|G(i\omega)|$ détermine la valeur de la phase $\angle G(i\omega)$. Notons $N(\omega)$ le nombre qui multiplié à 20 dB/décade détermine la pente du gain en ω

$$N(\omega) = \frac{1}{20} \frac{d(|G(i\omega)| \text{ en dB})}{d \log_{10} \omega} = \frac{d|G(i\omega)|}{d\omega} \frac{\omega}{|G(i\omega)|} \quad (66)$$

Alors, la phase du système en ω_0 est déterminée par

$$\angle G(i\omega_0) \text{ en rad} = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega) p_{\omega_0}(\omega) d\omega \quad (67)$$

où p_{ω_0} est une fonction de pondération d'intégrale égale à 1 qui prend des valeurs sensiblement non nulles autour de ω_0 uniquement. Par conséquent, si la pente du module varie peu autour de ω , on peut faire l'approximation

$$\angle G(i\omega) \simeq \frac{\pi}{2} N(\omega) \quad (68)$$

On pourra revoir avec profit les diagrammes asymptotiques des systèmes du premier ordre pour se convaincre qu'ils vérifient parfaitement cette dernière relation.

Une conséquence majeure de cette relation est que lorsque la phase de $G(i\omega)$ vaut -180 degrés, $N(\omega)$ est proche de -2 et la pente du gain à la pulsation ω est sensiblement égale à -40 dB/décade.

ce qui détermine le paramètre T de façon unique. Si l'on choisit alors a de telle sorte que le maximum de ϕ soit atteint en ω'_c , c'est-à-dire si l'on pose

$$a = \frac{1}{(\omega_c T)^4} \quad (71)$$

on ajoute donc à la phase en ω'_c la valeur ϕ donnée par (65). Pour obtenir une avance de phase maximale de l'ordre de 45 degrés en ω'_c , on est ainsi conduit à prendre

$$a = 0.17 \text{ et } \omega_c T = 1.55 \quad (72)$$

Un réglage plus fin des paramètres a et T peut ensuite être effectué.

EXEMPLE - UN SYSTÈME DU TROISIÈME ORDRE. Considérons le système de fonction de transfert

$$P(s) = \frac{0.01}{(s + 1)(10s + 1)(100s + 1)}$$

Pour améliorer le temps de réponse du système (de l'ordre de 100 secondes), on le met en série avec un gain statique $K > 0$ puis on réalise un feedback unitaire. Le système ainsi bouclé est stable pour $K = 1$ et jusqu'à $K = 12$ (sa marge de gain). En pratique, le gain $K = 4$ améliore le temps de réponse d'un facteur 10 mais introduit un dépassement de +50% en réponse à un échelon !

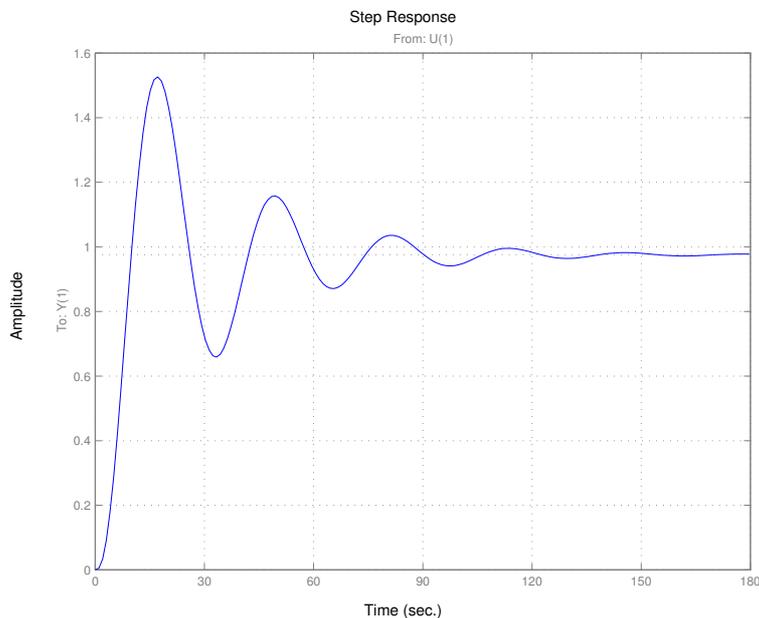


FIG. 18 – Réponse indicielle du système après feedback (amplification de $K = 4$ dans la boucle directe).

Cela est confirmée par l'insuffisance de la marge de phase du système, à peine 20 degrés. Le gain du système passe alors par 0 en $\omega_c = 0.19$ rad/sec comme le montre le diagramme de Bode de $KP(s)$ (fig 19).

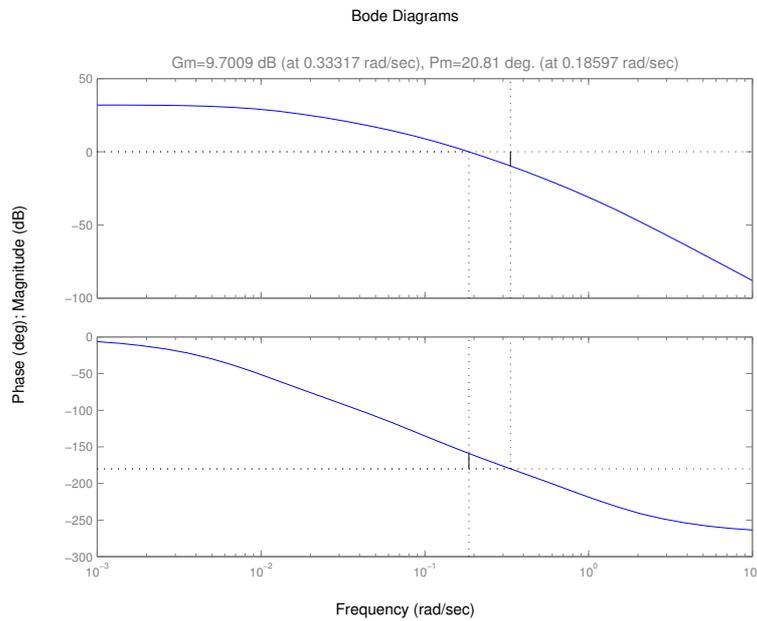


FIG. 19 – Diagramme de Bode du système $KP(s)$ avec $K = 4$.

Un correcteur à avance de phase doit permettre de restaurer une marge de phase acceptable et d'augmenter encore la bande passante du système pour accélérer la réponse du système bouclé.

Jouons sur le choix du paramètre T et déterminons en conséquence a par la formule (71). Avec $\omega_c T = 1.55$, on obtient une marge de phase de 48 degrés. Nos estimations prévoyaient une phase de $45 + 20 = 65$ degrés, mais elles supposaient la phase du système initial constante. Or, plus on repousse la nouvelle fréquence de coupure à droite de ω_c , c'est-à-dire plus on augmente le produit $\omega_c T$, moins on peut négliger le retard de phase additionnel dû au système initial.

Une phase d'essai-erreur montre que la marge de phase maximale, 59 degrés, est obtenue pour $\omega_c T$ entre 2.5 et 3. La réponse impulsionnelle du système bouclé présente alors un temps de réponse à 10% de 2.35 et un dépassement de 5% (cf figure 20).

4.3 Contrôleur proportionnel-intégral ou à retard de phase

Le contrôleur à retard de phase peut être considéré comme l'implémentation effective d'un contrôleur proportionnel-intégral (PI). La fonction de transfert d'un tel contrôleur est en effet de la forme

$$K(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} \quad (73)$$

Ce contrôleur présente un pôle en $s = 0$ et est donc instable. Si l'on souhaite pallier à cet inconvénient, on peut lui substituer le système de la forme

$$K(s) = K_p + K_i \frac{1}{s + \varepsilon} \quad (74)$$

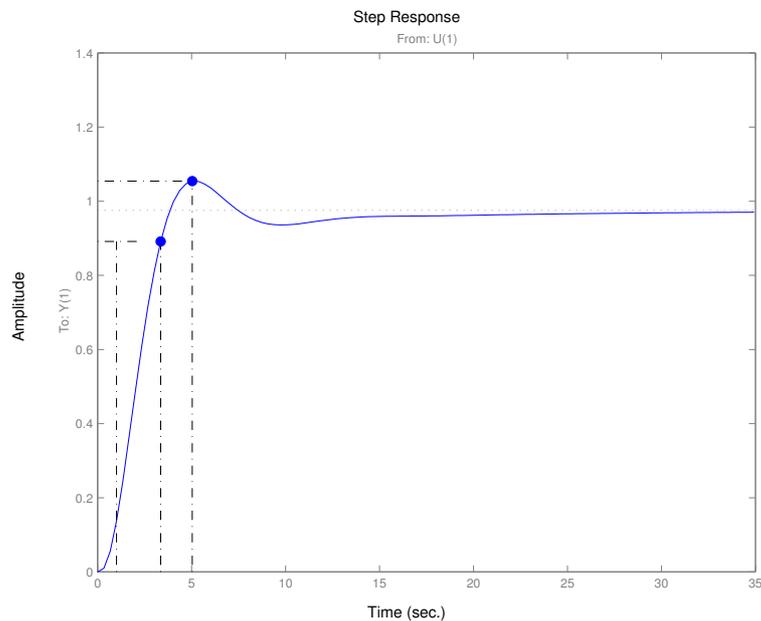


FIG. 20 – Réponse indicielle du système corrigé par un correcteur à avance de phase, après feedback unitaire.

avec un $\varepsilon > 0$ petit. Un calcul élémentaire montre qu'en posant

$$K = \frac{K_p \varepsilon + K_i}{\varepsilon}, T = \frac{K_p}{K_p \varepsilon + K_i} \text{ et } a = \frac{K_p \varepsilon + K_i}{K_p \varepsilon} \quad (75)$$

on met le contrôleur sous la forme standard des contrôleurs à retard de phase (*lag compensator*), c'est-à-dire

$$K(s) = K \frac{Ts + 1}{aTs + 1}, a > 1 \quad (76)$$

Nous limiterons donc notre étude aux seuls compensateurs à retard de phase, dont le diagramme de Bode est représenté sur la figure 21. L'utilisation de ces correcteurs est destinée à

- Améliorer la précision du système à basse fréquence, en particulier diminuer l'erreur statique.
- Restaurer des marges de stabilité suffisantes, au prix d'une diminution de sa bande passante.

Il n'existe pas de méthode générale de réglage des correcteurs à retard de phase. Montrons sur un exemple comment on peut choisir les valeurs des paramètres d'un tel régulateur.

EXEMPLE. Considérons le système de fonction de transfert

$$P(s) = -\frac{s - 1}{(s + 1)(s + 10)} \quad (77)$$

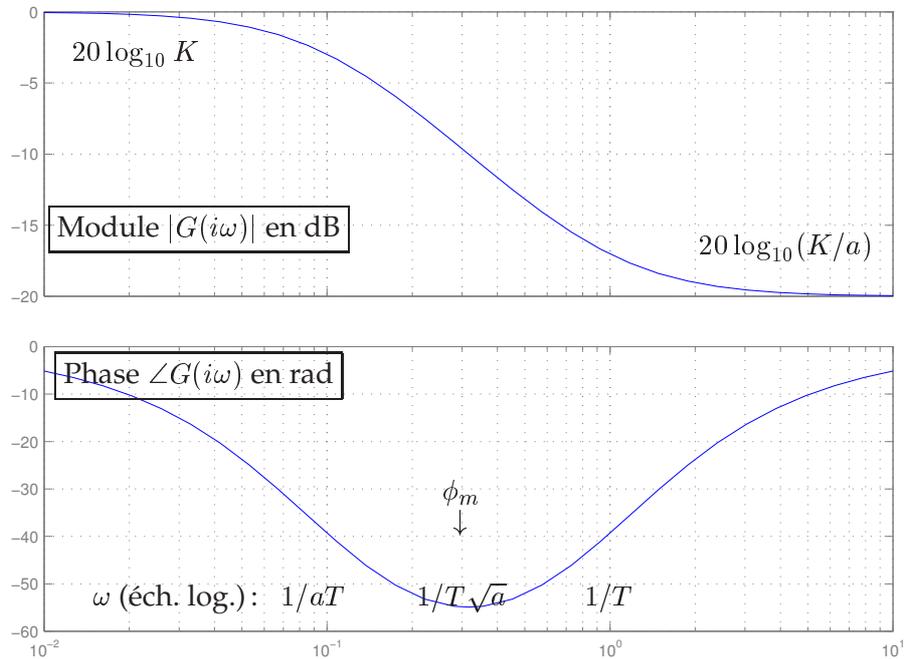


FIG. 21 – Diagramme de Bode d'un correcteur à retard de phase (valeurs numériques : $K = 1, T = 1, a = 10$).

La marge de gain de ce système vaut 11. Par conséquent, réaliser une amplification proportionnelle d'un facteur $K \in [0,11[$, suivie d'une rétroaction unitaire ne permet pas d'augmenter sensiblement la bande passante du système et le gain statique $K P(0)$ reste limité à 1.1. L'erreur statique est donc de $1/(1 + 1.1)$ soit de l'ordre de 50% dans le meilleur des cas.

Choisissons $K = 10$, ce qui est très proche de l'instabilité et nécessitera ultérieurement une correction. Préoccupons-nous pour l'instant uniquement d'améliorer la performance du système à basse fréquence au moyen d'un correcteur à retard de phase. Posons $K/a = 1$ et $T = 2$: avec ce choix, l'ajout du correcteur (dans la boucle directe) n'aura quasiment pas d'influence sur le système pour les pulsations $\omega \geq 1/T = 0.5$ rad/sec. Par contre, en posant $a = 10$, pour $\omega \leq 0.1$ rad/sec, le gain du système est augmenté de $20 \log K = 20$ dB, et par conséquent, l'erreur statique devient inférieure à 10%.

En conservant cette précision statique, occupons-nous de la restauration des marges de stabilité : faisons chuter le gain pour que le passage du gain par 0 dB ait lieu à une pulsation où la phase est très supérieure à -180 degrés. Changeons la valeur des paramètres en $K/a = 0.5$ et $K = 10$: le gain statique est préservé, mais au-delà de $\omega = 0.5$ rad/sec, le gain est système est divisé par deux. Les marges de phases et de gain, qui valaient respectivement 1 et 2 degrés sont améliorées : elles valent désormais 2 et 60 degrés.

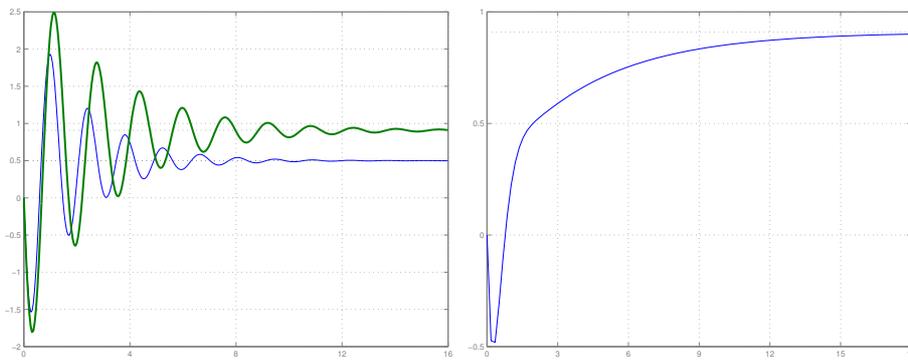


FIG. 22 – Réponses du système à un échelon unitaire. A gauche - Trait fin : correcteur proportionnel. Trait gras : correcteur à retard de phase, 1er jeu de paramètres. A droite - correcteur à retard de phase, 2ème jeu de paramètres.