

Représentation d'état des systèmes linéaires

S. Boisgérault, ISIA

October 15, 2002

Contents

1	Concept de modèle d'état et représentation interne	2
2	Modèle d'état linéaire sous forme standard	4
2.1	Système linéarisé tangent	5
2.1.1	Points d'équilibre, de fonctionnement, trajectoires admissibles.	5
2.1.2	Variables d'écart.	6
2.1.3	Système linéarisé tangent	6
2.2	Linéarisation exacte	7
3	Stabilité interne	8
3.1	Stabilité - Définitions	8
3.2	Stabilité des systèmes linéaires	9
3.2.1	Décomposition modale des systèmes linéaires	10
3.2.2	Stabilité des systèmes de Jordan.	10
3.2.3	Stabilité - analyse quantitative	12
3.3	Stabilité des systèmes nonlinéaires	12
4	Commandabilité	13
4.1	Critère de commandabilité de Kalman - Démonstration	13
4.2	Commandabilité - Exemples, Compléments	15
5	Retour d'état et placement de pôles	18
5.1	Énoncé du résultat principal	18
5.2	Démonstration	18
5.2.1	Utilisation de la forme canonique commandable	19
5.2.2	Obtention de la forme canonique commandable	19
6	Observabilité	20
7	Observateur - Structure observateur-commandeur	22
7.1	Observateur	22
7.2	Système global.	23
A	Algèbre linéaire	25
A.1	Valeur propres, vecteurs propres	25
A.2	Indices et réduction de Jordan	26

1 Concept de modèle d'état et représentation interne

Signaux et systèmes. Le terme **système** désigne tout modèle mathématique reliant entre elles plusieurs grandeurs. On parle de **système dynamique** lorsque ces grandeurs sont des **signaux temporels** (ou simplement **signaux**), c'est-à-dire varient avec le temps. La **dynamique** d'un système désigne alors son comportement, ou de façon plus large une description mathématique de ce comportement.

Les signaux sont des flux d'informations. Ils sont donc orientés et transmettent de l'information de l'extérieur du système vers celui-ci (signaux d'**entrée**), ou bien du système vers l'extérieur (signaux de **sortie**).

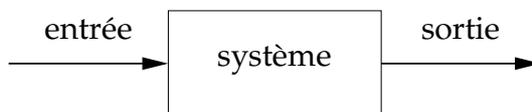


Figure 1: Représentation d'un système comme bloc diagramme. Les systèmes sont représentés par des blocs, les signaux par des flèches.

On peut opérer des distinctions sur les signaux d'entrée selon leur nature. Les signaux d'entrée que l'on peut contrôler sont des signaux de **commande**. A l'opposé, les signaux d'entrées indésirables sur lesquels on ne peut agir directement sont désignés comme des **perturbations**. Notons qu'un système peut très bien n'avoir aucune entrée ; il évolue alors indépendamment de son environnement : c'est un système dit **autonome**.

Etat et représentation interne. Un système est **statique** lorsque son signal de sortie à un instant t ne dépend que de la valeur de l'entrée au même instant. C'est une situation très particulière. Dans le cas général des systèmes dynamiques, l'évolution du système va également dépendre des entrées passées du système. L'information minimale, dépendante des interactions passées du système, et requise pour prévoir son avenir, c'est l'**état** du système. L'**espace d'état** (ou **espace des phases**) est l'ensemble des états possibles du système. Notons que nous avons supposé implicitement que les systèmes dynamiques étaient **causaux**, c'est-à-dire que leur comportement ne pouvait dépendre que de leur interactions passées et présentes avec l'environnement. S'il y a une dépendance en la valeur future des signaux d'entrée, on parle de système **non causal**.

Un modèle de dynamique déterminant explicitement l'évolution de l'état d'un système constitue une **représentation interne**. A l'opposé, un modèle qui relie directement signaux d'entrée et de sortie constitue une **représentation externe** du système.

EXEMPLE - SYSTÈME MASSE-RESSORT. La position $y \in \mathbb{R}$ d'un système masse-ressort d'axe vertical soumis à la gravité évolue selon la dynamique

$$m\ddot{y} + \nu\dot{y} + ky + mg = 0 \quad (1)$$

où m est la masse, ν le coefficient de friction, k la raideur du ressort et g l'intensité de la pesanteur. C'est un système dynamique autonome. Si l'on ajoute un dispositif permettant d'exercer une force u dans l'axe vertical, la dynamique devient

$$m\ddot{y} + \nu\dot{y} + ky + mg = u \quad (2)$$

Dans les deux cas, l'état contient nécessairement l'information sur la position y , mais cette donnée n'est pas suffisante pour prévoir l'évolution future du système. La connaissance de la vitesse \dot{y} est également nécessaire. Le couple $x = (y, \dot{y})$ décrit de façon minimale l'état du système et l'espace d'état est donc \mathbb{R}^2 .

En présence d'une friction non nulle, si l'on exerce une force constante u , la position du système se stabilise finalement autour d'une valeur fixe y . Si l'on n'est intéressé que par cette valeur finale et pas par le comportement transitoire de la position, on peut faire l'approximation que cette convergence est instantanée. Dans ce nouveau modèle, force exercée et position sont reliées par

$$ky + mg = u \quad (3)$$

Cette équation caractérise un système statique.

Systèmes de dimension finie. Lorsque l'état d'un système peut être représenté par un vecteur x de \mathbb{R}^n , on parle de **système de dimension finie**. Un système est à **temps continu** (ou simplement **continu**) lorsque la variable temps est un paramètre réel, à **temps discret** (ou simplement **discret**) si la variable temps est un paramètre entier. Lorsque l'on parle de système continu de dimension finie, on désigne presque toujours un système régi par une équation différentielle, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = g(t, x, u) \end{cases} \quad (4)$$

Le signal $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée, $y \in \mathbb{R}^p$ la sortie et le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ l'état du système. L'entier n est la dimension ou l'**ordre** du système. De façon analogue, un système discret de dimension finie désignera presque toujours un modèle régi par une équation de récurrence, de la forme

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(n, x_n, u_n) \\ y_n = g(n, x_n, u_n) \end{cases} \quad (5)$$

Le fait de présenter la dynamique d'un système continu sous la forme d'une équation différentielle *du premier ordre*, ou n'intervient que la dérivée première de x n'est pas restrictif ; une équation différentielle d'ordre k portant sur une variable y peut en effet être réécrite comme une équation du premier ordre portant sur le vecteur $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$. Une construction analogue s'applique aux systèmes discrets.

EXEMPLE - SYSTÈME MASSE-RESSORT. Considérons l'équation du second ordre scalaire (1). En introduisant la variable vitesse $v = \dot{y}$, on peut mettre la dynamique sous la forme d'une équation du premier ordre portant sur l'état $x = (y, v)$

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -(\nu/m)v - (k/m)y - (g/m) - (1/m)u \end{cases} \quad (6)$$

EXEMPLE - SYSTÈME À RETARD. La transmission de données s'accompagne fréquemment de retard. Lorsque le retard est une grandeur T constante, on parle de retard pur : la valeur de la sortie $y \in \mathbb{R}^m$ à l'instant t est la valeur qu'avait l'entrée $u \in \mathbb{R}^m$ T secondes plus tôt :

$$y(t) = u(t - T) \quad (7)$$

La mémoire du système à l'instant t est constituée par l'ensemble des valeurs $u(\tau)$ pour τ compris entre $t-T$ et t . L'état du système peut donc être caractérisé par la donnée d'une application

$$x : t \in [0, T] \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^m$$

qui stocke les valeurs de l'entrée pendant les T dernières secondes. Il ne s'agit donc pas d'un système de dimension finie.

2 Modèle d'état linéaire sous forme standard

Le plus souvent, nous serons amenés à étudier des systèmes continus de dimension finie, régis par une équation différentielle, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = g(t, x, u) \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{avec } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p \quad (9)$$

Malheureusement, les méthodes d'analyse et de conception de contrôleurs les plus puissantes et les plus systématiques ne s'appliquent qu'à une fraction de cette classe : les systèmes linéaires indépendants du temps. Leur forme standard est

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{avec } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p \quad (11)$$

Compte tenu des dimensions des vecteurs d'entrée, de sortie et d'état, on a

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{ et } D \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad (12)$$

Le reste de cette section est consacrée aux méthodes qui permettent de ramener l'étude d'un système non-linéaire général à celle d'un système linéaire standard.

2.1 Système linéarisé tangent

2.1.1 Points d'équilibre, de fonctionnement, trajectoires admissibles.

Placé en un **point d'équilibre** x^* à un instant quelconque, l'état d'un système dynamique autonome est **stationnaire**. Les points d'équilibre d'un système régi par $\dot{x} = f(t, x)$ sont donc caractérisés par

$$f(t, x^*) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (13)$$

Pour un système possédant une entrée u , on détermine les points d'équilibre en l'absence d'action sur le système, donc en posant $u = 0$. De façon plus générale, x^* est un **point de fonctionnement** d'un système d'entrée u s'il existe une commande constante u^* telle que l'état du système, placé à un instant quelconque en x^* , soit stationnaire. Dans le cas d'un système régi par l'équation $\dot{x} = f(t, x, u)$, les points de fonctionnement x^* sont caractérisés par la relation

$$\text{il existe } u^* \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } f(t, x^*, u^*) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (14)$$

Enfin, le signal $x^*(t)$ est une **trajectoire admissible** d'un système dynamique s'il existe une commande fonction du temps $u^*(t)$ telle que $x^*(t)$ soit solution du système. Autrement dit, toujours dans le cas où la dynamique est de la forme $\dot{x} = f(t, x, u)$

$$\text{il existe } u^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tel que } f(t, x^*(t), u^*(t)) = \dot{x}^* \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (15)$$

EXEMPLE - PENDULE SIMPLE. L'angle θ que fait un pendule simple avec la verticale évolue selon l'équation

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = u \quad (16)$$

lorsque m désigne la valeur de la masse ponctuelle à l'extrémité de l'axe de longueur l . La commande u est le couple exercé sur l'axe. On pourrait introduire la variable vitesse angulaire $v = \dot{\theta}$ et se ramener à un système du premier ordre en $x = (\theta, \dot{\theta})$ selon la méthode présentée à la section 1. Cela n'est toutefois pas indispensable pour déterminer les points de fonctionnement du système. En imposant un couple constant u , pour que l'état $(\theta, \dot{\theta})$ reste stationnaire, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$mgl \sin \theta = u \text{ et } \dot{\theta} = 0 \quad (17)$$

Selon la valeur de u , il peut donc exister

- deux points d'équilibre distincts $(\theta, \dot{\theta})$ si $|u| < mgl$.
- un unique point d'équilibre $(\theta, \dot{\theta}) = (\pm\pi/2, 0)$ si $u = \pm mgl$.
- aucun point d'équilibre si $|u| > mgl$.

2.1.2 Variables d'écart.

Il est clair que les points d'équilibre sont des cas particuliers de points de fonctionnement. Les points de fonctionnement sont eux-mêmes des cas particuliers de trajectoires admissibles. C'est donc cette dernière notion qui est la plus générale. Il est toutefois toujours possible de ramener le cas des trajectoires admissibles à l'étude de points d'équilibres en considérant la dynamique des **variables d'écart** d'état et d'entrée :

$$\Delta x(t) = x(t) - x^*(t) \text{ et } \Delta u(t) = u(t) - u^*(t) \quad (18)$$

Définissons la fonction Δf par

$$\Delta f(t, \Delta x, \Delta u) = f(t, x^*(t) + \Delta x, u^*(t) + \Delta u) - f(t, x^*(t), u^*(t)) \quad (19)$$

La trajectoire $x^*(t)$ du système $\dot{x} = f(t, x, u)$ est admissible et associée à l'entrée $u^*(t)$ si et seulement si la dynamique des variables d'écarts est donnée par

$$\frac{d(\Delta x)}{dt} = \Delta f(t, \Delta x, \Delta u) \quad (20)$$

L'origine $(\Delta x)^* = 0$ est alors par construction un point d'équilibre du système.

EXERCICE - PENDULE SIMPLE. Considérons à nouveau le pendule simple régit par l'équation (16). L'objectif de commande est de positionner le système dans la configuration géométrique stationnaire $\theta = \theta_d$ (indice d pour désiré). On cherche à évaluer les possibilités d'une commande proportionnelle dérivé sur l'erreur de position

$$u = -K_p(\theta - \theta_d) - K_d(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) \quad (21)$$

Est-ce qu'en général, la loi de commande (21) place un point d'équilibre du système en $(\theta, \dot{\theta}) = (\theta_d, 0)$? Expliquer néanmoins comment on peut choisir les paramètres K_d et K_p de telle sorte que

- Le système bouclé ne possède qu'un point d'équilibre
- L'erreur entre l'angle désiré et et l'angle effectif à l'équilibre soit inférieur à une seuil de tolérance $\varepsilon > 0$ arbitraire.

2.1.3 Système linéarisé tangent

Plutôt que d'étudier le système (8), pour lequel une solution explicite $x(t)$ sera rarement disponible, on peut préférer à ce modèle son approximation au premier ordre autour d'une trajectoire (admissible) de référence $x^*(t)$. Tant que l'état du système reste au voisinage de cette trajectoire, il est raisonnable de supposer que ce système linéarisé constitue une bonne approximation du système initial.

On obtient le système linéarisé tangent en partant des équations exactes caractérisant la dynamique des variables d'écarts. Si l'écart à la trajectoire de référence est faible, les variables d'écart Δx et Δu sont petites. L'approximation de Taylor du premier ordre de la dynamique semble alors légitime

$$\frac{d(\Delta x)}{dt} \simeq \Delta f(t, 0, 0) + \frac{\partial \Delta f(t, 0, 0)}{\partial \Delta x} \Delta x + \frac{\partial \Delta f(t, 0, 0)}{\partial \Delta u} \Delta u \quad (22)$$

Pour y le signal de sortie y , de façon analogue

$$y \simeq \Delta g(t, 0, 0) + \frac{\partial \Delta g(t, 0, 0)}{\partial \Delta x} \Delta x + \frac{\partial \Delta g(t, 0, 0)}{\partial \Delta u} \Delta u \quad (23)$$

En posant

$$A(t) = \left[\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta x} \right] (t, 0, 0), \quad B(t) = \left[\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta u} \right] (t, 0, 0) \quad (24)$$

$$C(t) = \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial \Delta x} \right] (t, 0, 0), \quad D(t) = \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial \Delta u} \right] (t, 0, 0) \quad (25)$$

c'est-à-dire

$$A(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] (t, x^*(t), u^*(t)), \quad B(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right] (t, x^*(t), u^*(t)) \quad (26)$$

$$C(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x} \right] (t, x^*(t), u^*(t)), \quad D(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial u} \right] (t, x^*(t), u^*(t)) \quad (27)$$

Le système linéarisé tangent s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Delta x &= A(t) \Delta x + B(t) \Delta u \\ \Delta y &= C(t) \Delta x + D(t) \Delta u \end{cases} \quad (28)$$

Dans le cas particulier important où f et g ne dépendent pas du temps, alors les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ sont indépendantes de t ⁽¹⁾, ce qui nous ramène à la forme standard (10).

2.2 Linéarisation exacte

Contrairement au procédé de linéarisation vu précédemment, la linéarisation exacte n'est pas une approximation. Son domaine de validité est donc global. Schématiquement, il s'agit d'effectuer des transformations sur les variables d'état, d'entrée et de sortie afin de rendre la dynamique du système linéaire. Considérons l'exemple élémentaire suivant

EXEMPLE - UN PENDULE SIMPLE. Un pendule de masse m et de longueur l , repéré par l'angle θ qu'il fait avec la verticale, soumis à un frottement visqueux de coefficient ν et à un couple u qui constitue la commande évolue selon $ml^2\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + mgl \sin \theta = u$. En posant

$$u = \omega + u_g, \quad \text{avec } u_g = mgl \sin \theta$$

on compense le terme de gravité qui est la seule non-linéarité du système. En fonction de la commande auxiliaire ω , la dynamique du système devient

$$ml^2\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} = \omega \quad (30)$$

¹On pourra se convaincre que cette propriété est vérifiée dans le cas plus général où f et g sont de la forme

$$\begin{cases} f(t, x, u) = f_1(x, u) + f_2(t) \\ g(t, x, u) = g_1(x, u) + g_2(t) \end{cases} \quad (29)$$

On peut alors rechercher une loi de commande ω qui réalise les objectifs de commande désirés par des techniques s'appliquant aux dynamiques linéaires, avant de calculer la loi de commande u associée. \triangle

Le diagramme bloc schématisant l'introduction de la commande auxiliaire est représenté en figure 2. Sur cet exemple, nous avons réalisé une **linéarisation par feedback statique** (ou retour statique, ou rétroaction statique) car le système d'entrée θ et de sortie u_g est statique. Pour réaliser une linéarisation exacte d'une dynamique, il peut être nécessaire d'introduire un feedback dynamique, ou de réaliser un changement de variables (inversible) sur l'état : ce n'est pas la dynamique de l'état x qui sera linéaire, mais celle d'une fonction $\xi = \phi(x)$.

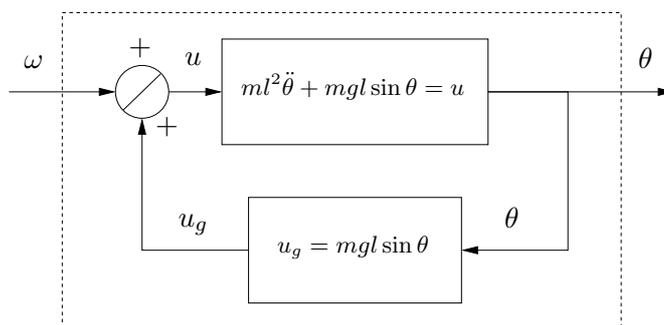


Figure 2: Schéma de compensation de la gravité du pendule

La théorie générale de la linéarisation exacte ne sera pas abordée dans le cadre de ce cours.

3 Stabilité interne

3.1 Stabilité - Définitions

La stabilité interne d'un système dynamique autonome de la forme

$$\dot{x} = f(x) \quad (31)$$

est une propriété qui caractérise le comportement à très long terme (on parle de comportement *asymptotique*) de l'état x . Cette notion ne concerne directement ni les entrées ni les sorties d'un système, contrairement à la définition de la stabilité externe ou entrée/sortie. Lorsque l'on parlera de la stabilité interne d'un système non autonome, on supposera que l'on n'exerce aucune commande et que le choix de la sortie n'a aucune importance, ce qui nous ramène à l'étude d'un système autonome.

Dans le cas général, les définitions appropriées, parfois qualifiées de stabilité au sens de Lyapunov, sont les suivantes: un système dynamique autonome d'état $x \in \mathbb{R}^n$ est

- **stable** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que pour toute condition initiale $x(0) = x_0$ vérifiant $|x_0| \leq \eta$, la trajectoire $x(t)$ existe pour tout $t \geq 0$ et vérifie

$$|x(t)| \leq \varepsilon \quad (32)$$

- **asymptotiquement stable** (ou a. stable en abrégé) si de plus pour toute condition initiale $x(0) = x_0$ suffisamment proche de l'origine, la trajectoire $x(t)$ est évanescence (c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$).
- **instable** s'il n'est pas stable.

Se limiter aux seuls systèmes autonomes linéaires (le second membre est de la forme $f(x) = Ax$) permet de simplifier les définitions de la stabilité interne : les définitions générales sont alors équivalentes aux définitions suivantes

Définition 1 Stabilité interne - Définition pour les systèmes linéaires. Un système dynamique linéaire autonome d'état $x \in \mathbb{R}^n$ est

- **stable** si pour toute condition initiale $x(0) = x_0$, la trajectoire $x(t)$ de l'état est bornée.
- **asymptotiquement stable** (ou a. stable en abrégé) si pour toute condition initiale $x(0) = x_0$, la trajectoire $x(t)$ de l'état est évanescence (c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$).
- **instable** s'il n'est pas stable.

3.2 Stabilité des systèmes linéaires

Caractériser la stabilité d'un système linéaire est une opération simple, qui peut être faite sur la base d'un critère purement algébrique. Notons

- $\sigma(A)$ le spectre d'une matrice A , c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres.
- $\nu(\lambda)$ l'indice de la valeur propre λ , c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $\text{Ker}(A - \lambda I)^{k+1} = \text{Ker}(A - \lambda I)^k$

Propriété 1 Le système linéaire autonome de dynamique

$$\dot{x} = Ax \tag{33}$$

- est **stable** si

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \Re(\lambda) \leq 0 \text{ et si } \Re(\lambda) = 0, \nu(\lambda) \leq 1 \tag{34}$$

- est **a. stable** si

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \Re(\lambda) < 0 \tag{35}$$

Remarque - Pôles d'un système linéaire. Les valeurs propres de A sont appelées **pôles** du système $\dot{x} = Ax$. Le terme pôle est également un terme employé dans le calcul de Laplace des systèmes linéaires : dans le cas des systèmes d'entrée et de sortie scalaire ($u \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), un pôle d'un système représenté par une fonction de transfert rationnelle

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, P, Q \text{ polynômes} \tag{36}$$

est une racine de Q . Ces deux notions de pôles sont très étroitement liées. On peut par exemple prouver le résultat suivant (exercice) : l'ensemble des pôles possibles des fonctions de transfert de u vers y du système

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (37)$$

$$\text{avec } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad (38)$$

lorsque B décrit $\mathbb{R}^{n \times 1}$ et C décrit $\mathbb{R}^{1 \times n}$ est exactement l'ensemble des valeurs propres de A .

Nous montrons dans les sections à venir la preuve de la propriété 1 en nous basant sur une décomposition du système en sous-systèmes évoluant en parallèle, sans interagir les uns avec les autres. Les dynamiques de ces sous-systèmes sont appelés **modes** du système complet.

La décomposition modale du système que nous considérons est fondée sur la réduction de Jordan de la matrice A . Nous rappelons les bases de cette réduction en annexe.

3.2.1 Décomposition modale des systèmes linéaires

La réduction de la matrice A sous la forme bloc-diagonale de Jordan (105) met en évidence l'existence de dynamiques découplées au sein du système $\dot{x} = Ax$. En effet, faisons le changement de variable

$$z = Px, \quad z = (z_1, \dots, z_p) \quad (39)$$

chaque z_i comprenant autant de variables que J_i a de colonnes (ou de lignes). La relation $\dot{x} = Ax$ se réécrit dans ces coordonnées $\dot{z} = P\dot{x} = PAx = [PAP^{-1}]z$, soit

$$\dot{z} = Jz \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{z}_1 &= J_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= J_2 z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_p &= J_p z_p \end{cases} \quad (40)$$

L'évolution d'une variable z_i est totalement indépendante de celle des autres variables z_j , ce qui caractérise une décomposition modale. De plus, il va de soi que le changement de variables $z = Px$ n'affecte pas la nature stable ou instable de la dynamique. On se convaincra alors aisément que

Lemme 1 Le système $\dot{x} = Ax$ est stable (resp. a. stable) si et seulement si les systèmes $\dot{z}_i = J_i z_i$ sont stables (resp. a. stables) pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

3.2.2 Stabilité des systèmes de Jordan.

Stabilité d'un système de Jordan. Déterminons à quelle condition un système de la forme

$$\dot{x} = Ax \quad \text{avec } A = J(\lambda, \nu) \quad (41)$$

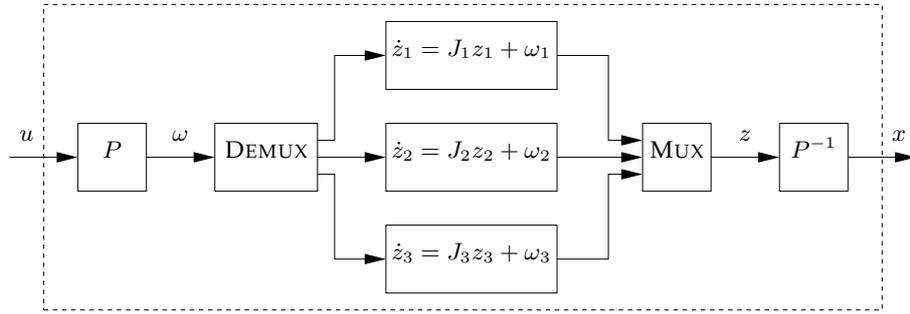


Figure 3: Une représentation par blocs du système $\dot{x} = Ax + u, y = x$, basée sur la décomposition de Jordan de A .

est stable. La forme particulière du système simplifie considérablement l'analyse. Posons $x = (x_1, \dots, x_\nu)$. L'équation vectorielle (41) se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{\nu-1} &= \lambda x_{\nu-1} + x_\nu \\ \dot{x}_\nu &= \lambda x_\nu \end{cases} \quad (42)$$

et ce système différentiel peut être résolu de bas en haut.

- Le système est instable si $\Re(\lambda) > 0$.

La dernière composante de x vérifie en effet

$$x_\nu(t) = e^{\lambda t} x_\nu(0) \text{ et donc } |e^{\lambda t} x_\nu(0)| = e^{\Re(\lambda)t} |x_\nu(0)| \quad (43)$$

- Le système est également instable si $\Re(\lambda) = 0$ et $\nu \geq 2$.

En effet, dans ce cas, on peut considérer la variable $x_{\nu-1}$. En utilisant la formule (43), on trouve que

$$x_{\nu-1}(t) = e^{\lambda t} (x_{\nu-1}(0) + t x_\nu(0)) \text{ donc } |x_{\nu-1}(t)| \sim t |x_\nu(0)| \text{ si } x_\nu(0) \neq 0 \quad (44)$$

- Dans les autres cas, le système est stable.

Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \{1, \dots, \nu\}$, x_k est de la forme

$$x_k(t) = e^{\lambda t} P(t) \quad (45)$$

où $P(t)$ est un polynôme dépendant des conditions initiales, mais de degré au plus égal à $\nu - k$. Le système est stable dans tous les cas ; si $\nu = 1$ et $\Re(\lambda) = 0$, $x(t)$ contient l'unique variable x_1 qui vérifie (43) et reste donc bornée. Si $\Re(\lambda) = -\sigma < 0$, l'exponentielle domine le polynôme et

$$|x_k(t)| = e^{-\sigma t} |P(t)| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \quad (46)$$

3.2.3 Stabilité - analyse quantitative

La propriété 1 nous permet de déterminer si un système est stable, a. stable ou encore instable en se basant sur la position des pôles de la dynamique. Cette position nous donne également une information quantitative sur la vitesse de convergence de l'état vers l'origine dans le cas asymptotiquement stable

Propriété 2 Considérons le système linéaire autonome

$$\dot{x} = Ax \quad (47)$$

supposé asymptotiquement stable. Il existe un $T > 0$ et $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (47) et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\|x(t)\| \leq K(\varepsilon)\|x(0)\| \exp\left(-\frac{t}{T+\varepsilon}\right), t \geq 0 \quad (48)$$

Le plus petit T satisfaisant cette propriété, appelé constante de temps du système, est donné par

$$-\frac{1}{T} = \max\{\Re(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\} \quad (49)$$

3.3 Stabilité des systèmes nonlinéaires

Il n'est pas question d'évoquer ici les méthodes de caractérisation de la stabilité propres au nonlinéaire, mais d'énoncer un résultat qui relie stabilité d'un système nonlinéaire et de son linéarisé.

Propriété 3 Considérons le système autonome de dynamique

$$\dot{x} = f(x) \quad (50)$$

et son linéarisé autour du point d'équilibre en x^*

$$\frac{d}{dt}\Delta x = A\Delta x, A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) \quad (51)$$

Le système nonlinéaire (50) est

- a. stable si son linéarisé tangent est a. stable
- instable si A possède (au moins) une valeur propre de partie réelle strictement positive

Notez que le deuxième point de cet énoncé diffère légèrement de l'assertion "le système est instable si son linéarisé tangent est instable" ... car cette assertion est fautive ! Dans le cas où le système linéarisé présente des pôles de partie réelle strictement négative et des pôles sur l'axe imaginaire, il peut être stable (mais pas a. stable) ou instable selon le cas (cf. ppté 1). Mais dans ce cas précis la stabilité ou l'instabilité du linéarisé ne donne aucune information sur la stabilité ou l'instabilité du système nonlinéaire original. Pour analyser ce cas limite, il est nécessaire d'utiliser les résultats de la théorie de la variété centrale, ce qui dépasse le cadre de ce cours.

4 Commandabilité

Considérons le système d'état $x \in \mathbb{R}^n$ et d'entrée $u \in \mathbb{R}^m$ dont la dynamique est donnée par

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (52)$$

Un état x de ce système est **accessible** s'il existe une commande u et un instant T tels que $x(0) = 0$ et $x(T) = x$. On note \mathcal{R} ou $\mathcal{R}(A, B)$ l'ensemble de tous les états accessibles. Le système (52) est **commandable** si tous les états x de \mathbb{R}^n sont accessibles. Il existe un critère simple, appelé critère de commandabilité de Kalman, pour déterminer ensemble des états accessibles et donc si le système est ou non commandable.

Ce critère constitue un test purement algébrique. Il est basé sur la **matrice de commandabilité** du système, définie comme

$$\mathcal{C} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (53)$$

Propriété 4 - Critère de commandabilité de Kalman. L'espace atteignable du système (52) se confond avec l'image de la matrice de commandabilité

$$\mathcal{R}(A, B) = \text{Im } \mathcal{C} \quad (54)$$

En particulier, le système est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est de rang n .

4.1 Critère de commandabilité de Kalman - Démonstration

La preuve de la proposition 4 que l'on présente dans cette section débouche sur un algorithme de construction de l'espace des états atteignables. On s'apercevra facilement que cette construction aboutit exactement à la formule (54).

Cette preuve n'est toutefois pas constructive : elle ne dit pas quelle commande choisir pour aller effectivement de l'origine à la configuration désirée du système².

La démonstration repose sur deux lemmes d'invariance³ suivants :

Lemme 2 - Invariance par combinaison linéaire. L'ensemble \mathcal{R} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration – Si l'état x est accessible, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λx l'est également. En effet, si u est une commande qui emmène l'état système du repos à x en T secondes, c'est-à-dire si

$$x = \int_0^T e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) dt \quad (55)$$

²Pour répondre à cette question, on pourra par exemple mettre le système sous forme canonique commandable (section 5.2), introduire une commande auxiliaire ω pour se ramener à la dynamique d'un intégrateur multiple et finalement utiliser la remarque de l'exemple INTÉGRATEUR MULTIPLE de la section 4.2 pour générer une commande polynomiale résolvant le problème.

³Un **point de vocabulaire** : un ensemble $E \subset F$ est dit *invariant* par une famille d'opération p -aire

$$\psi_\lambda : F \times \dots \times F \rightarrow F, \lambda \in \Lambda$$

si

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \psi_\lambda(x_1, \dots, x_p) \in E$$

Classiquement, on n'utilise pas la terminologie "invariant" mais "stable" ... on a ici préféré le terme "invariant" pour éviter toute confusion avec le concept de stabilité des systèmes dynamique.

alors, par linéarité du second membre en u , la commande λu conduit le système en λx . La preuve que la somme $x_1 + x_2$ de deux états accessibles est accessible utilise également la linéarité du second membre de (55). Le seul préalable, pour pouvoir utiliser (55), est de montrer que x_1 et x_2 peuvent être atteints dans le même temps T . Notons u_1 (resp. u_2) une commande qui amène le système à x_1 (resp. x_2) en T_1 (resp. T_2) secondes. Sans perte de généralité, on peut supposer que $T_1 \leq T_2$. La commande \tilde{u}_1 , définie par

$$\tilde{u}_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < T_2 - T_1 \\ u_1(t - T_2 + T_1) & \text{si } t \geq T_2 - T_1 \end{cases}$$

laisse tout d'abord le système au repos durant les premières $T_2 - T_1$ secondes, puis le mène en x_1 dans les T_1 secondes restantes. ■

Lemme 3 - Invariance par l'opération de dérivation. Si l'état $x \in \mathbb{R}^n$ est atteignable, $\dot{x} = Ax + Bu$ est également atteignable pour toute valeur de l'entrée $u \in \mathbb{R}^m$.

Démonstration – Soit x un état atteignable depuis $x = 0$ et u_1 une commande menant de 0 à x en T secondes. A partir de $t = T$, on choisit d'appliquer comme commande la valeur constante $u \in \mathbb{R}^m$. Pour tout $t \geq T$, $x(t) \in \mathcal{R}$, ce qui peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(t) e_i$$

pour une base $\{e_1, \dots, e_r\}$ quelconque mais fixe de \mathcal{R} . En dérivant cette relation (à droite) en $t = T$, on obtient

$$\dot{x}(T) = Ax(T) + Bu = \sum_{i=1}^r \frac{d\lambda_i}{dt}(T) e_i \in \mathcal{R}$$

ce qui prouve le résultat. ■

Propriété 5 - Algorithme de détermination de \mathcal{R} . L'espace \mathcal{R} peut être construit par l'algorithme suivant :

- Poser $\mathcal{R}_0 = \{0\}$
- Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, poser

$$\mathcal{R}_k = A(\mathcal{R}_{k-1}) + \text{Im } B \quad (56)$$

- Poser $\mathcal{R}(A, B) = \mathcal{R}_{n-1}$

Démonstration – Montrons dans un premier temps que les étapes décrites dans la construction 5 aboutissent à la construction d'un ensemble \mathcal{R}_{n-1} inclus dans \mathcal{R} . Il suffit pour cela de remarquer que

- L'ensemble $\{0\}$ est contenu dans \mathcal{R} puisque l'origine est accessible.
- Supposons que tous les états de \mathcal{R}_k sont accessibles, c'est-à-dire $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}$. Alors, par le lemme 3, pour tout $x \in \mathcal{R}_k$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, $Ax + Bu \in \mathcal{R}$, c'est-à-dire que $\mathcal{R}_{k+1} \subset \mathcal{R}$.

Par ailleurs, on pourra facilement se convaincre que

$$\mathcal{R}_k = \text{Im } [B, AB, \dots, A^k B], \quad \mathcal{R}_{n-1} = \text{Im } C$$

par conséquent, pour prouver la validité de la construction 5 comme pour prouver la forme classique du critère de Kalman, il suffit de montrer l'inclusion $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_{n-1}$. Pour cela nous utilisons le résultat suivant⁴

$$\text{pour tout } t \geq 0, \text{Im } e^{At}B \subset \text{Im } C \quad (57)$$

Soit x un état accessible. Il est nécessairement de la forme

$$x = \int_0^{+\infty} e^{A\tau} B u(t - \tau) d\tau$$

Pour tout vecteur ξ orthogonal à $\text{Im } C$, d'après (57), on a donc

$$\xi \cdot x = \int_0^{+\infty} \xi \cdot e^{A\tau} B u(t - \tau) d\tau = 0$$

et par conséquent, $x \in \text{Im } C$. ■

EXERCICE - ESPACE ATTEIGNABLE DANS LE TEMPS t . Notons \mathcal{R}_t l'ensemble des états accessibles à partir de l'origine dans le temps t . Montrer que si $0 < t_1 \leq t_2$, alors $\mathcal{R}_{t_1} \subset \mathcal{R}_{t_2}$. Montrer également que si $\mathcal{R}_{t_1} = \mathcal{R}_{t_2}$, alors $\mathcal{R}_{t_1} = \mathcal{R}_{t_2+k(t_2-t_1)}$ pour tout $k \geq 0$. En déduire que dans ce cas $\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_{t_1}$ pour tout $t \geq t_1$.

Montrons désormais par l'absurde que pour tout $t > 0$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_t$. Supposons au contraire qu'il existe $0 < t_1 < t_2$ tels que $N = \dim \mathcal{R}_{t_2} - \dim \mathcal{R}_{t_1} > 0$. Considérons une suite d'instant τ_i tels que $t_1 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N+1} < \tau_{N+2} = t_2$. Montrer qu'il existe au moins un k tel que $\mathcal{R}_{\tau_{k+1}} = \mathcal{R}_{\tau_k}$. Conclure. Δ

4.2 Commandabilité - Exemples, Compléments

EXEMPLE - SYSTÈME THERMIQUE. On modélise une pièce de forme carrée par quatre cellules numérotées et disposées selon le schéma de la figure 4. Au sein de chacune des cellules, on suppose la température uniforme. La source de chaleur, située dans la première cellule, délivre une quantité de chaleur par seconde réglable de q watts. Notons c la capacité calorifique de chaque cellule et κ un coefficient de caractérisant la conductivité thermique. Un modèle simple de l'évolution des températures T_1, T_2, T_3 et T_4 des quatre cellules est donné par le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{T}_1 &= -\frac{\kappa}{c}(2T_1 - T_2 - T_3) + \frac{1}{c}q \\ \dot{T}_2 &= -\frac{\kappa}{c}(2T_2 - T_1 - T_4) \\ \dot{T}_3 &= -\frac{\kappa}{c}(2T_3 - T_1 - T_4) \\ \dot{T}_4 &= -\frac{\kappa}{c}(2T_4 - T_2 - T_3) \end{cases} \quad (58)$$

⁴Le théorème de Cayley-Hamilton nous affirme que le polynôme caractéristique χ_A de A , de degré n , annule A

$$\chi_A(A) = 0, \text{ soit } A^n = a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I$$

Par conséquent, pour tout $k \geq n$, en appliquant plusieurs fois l'égalité de droite précédente, on peut trouver des coefficients b_{n-1}, \dots, b_1, b_0 tels que $A^k B = b_{n-1}A^{n-1}B + \dots + b_1AB + b_0B$. Par conséquent, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\text{Im } \sum_{k=1}^N \frac{(At)^k}{k!} B \subset \text{Im } C$$

et donc en passant à la limite sur N , $\text{Im } e^{At}B \subset \text{Im } C$.

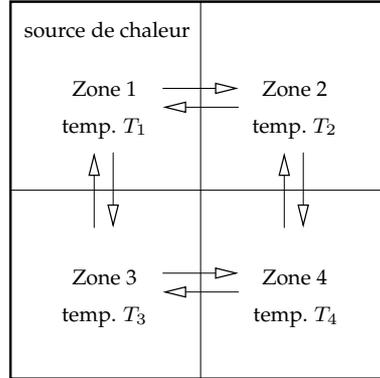


Figure 4: Géométrie de la pièce.

On souhaite savoir s'il est possible de trouver une commande de la source de chaleur qui permette d'atteindre un champ quelconque de température au sein de la pièce. Pour simplifier la résolution de ce problème de contrôlabilité, on pose

$$u = \frac{q}{c} \text{ et } \tau = \frac{\kappa}{c}t$$

Ces changements de variable de commande et d'échelle de temps ne perturbent en rien le caractère contrôlable ou non du système (58), mais simplifient la forme du modèle d'état $T = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ puisque l'on a

$$\frac{dT}{d\tau} = AT + Bu \quad (59)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Le calcul de la matrice de commandabilité aboutit à

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -20 \\ 0 & 1 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Les deuxième et troisième lignes sont identiques ; le rang de la matrice de commandabilité n'est pas 4 mais 3 et donc le système n'est pas commandable. Il est possible d'être plus précis : l'espace des états accessibles est donné par $\mathcal{R} = \text{Im}C$ et par conséquent, il est impossible d'agir sur la composante de T dans la direction d orthogonale à \mathcal{R} , caractérisée par $d^T C = 0$. Le vecteur $d = (0, 1, -1, 0)$ est solution de cette équation. Par conséquent, la commande u (ou q) n'a aucune influence sur l'évolution de $d^T T = T_2 - T_3$. C'est une conséquence des symétries du problème : sa géométrie est telle que si $T_2(t) = T_3(t)$ à $t = 0$ par exemple, alors cette égalité sera nécessairement vérifiée pour tout $t \geq 0$. \triangle

EXEMPLE - INTÉGRATEUR MULTIPLE. Considérons le système d'état $x \in \mathbb{R}^n$, d'entrée scalaire u et de dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u \end{cases} \quad (62)$$

Mettons le système sous la forme standard $\dot{x} = Ax + Bu$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Un calcul simple montre que la matrice de commandabilité est tout simplement la matrice identité. Le système est donc commandable.

Dans ce cas particulièrement simple, on aurait également pu s'en rendre compte directement. Pour atteindre l'état $x_d = (x_{1d}, \dots, x_{nd})$ à partir de l'origine, il suffit de choisir une fonction n fois différentiable $x_1(t)$ telle que

- $x_1(0) = 0, \dot{x}_1(t) = 0, \dots, x_1^{(n-1)}(0) = 0$
- $x_1(1) = x_{1d}, \dot{x}_1(1) = x_{2d}, \dots, x_1^{(n-1)}(1) = x_{nd}$

(un polynôme de degré $2n - 1$ peut très bien faire l'affaire), puis de choisir la commande $u(t) = x_1^{(n)}(t)$: elle mène effectivement de l'état de $x = 0$ à x_d en $t = 1$ seconde. \triangle

L'exemple de l'intégrateur multiple met en évidence qu'une seule entrée peut suffire à commander un système de taille arbitrairement grande ; tout est question de structure. Il est bien évident que l'on ne pourra pas commander tout l'état d'un système d'état $x = (x_1, x_2)$ dont la dynamique est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 = A_{22}x_2 \end{cases} \quad (64)$$

car il n'existe aucun moyen d'agir sur l'état x_2 . Cette situation n'est pas un exemple fortuit. Elle constitue au contraire le cas général : on peut montrer que si le système $\dot{x} = Ax + Bu$ n'est pas commandable, alors, après un changement de variables linéaire adéquat, on peut mettre le système sous la forme (64) avec un vecteur x_2 non trivial. On peut même s'assurer que le sous-système de dynamique

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u \quad (65)$$

est commandable. Dans ce cas, la taille de l'état x_2 de la dynamique non commandable est maximale.

EXERCICE - Montrer que si le système (65) est commandable, alors pour toute configuration initiale connue de x_1 et x_2 , il existe une commande u qui permette d'amener l'état x_1 du système (64) dans la configuration désirée.

5 Retour d'état et placement de pôles

5.1 Énoncé du résultat principal

Considérons le schéma de rétroaction représenté sur la figure 5. Remarquons que

- le contrôleur K est une simple matrice de gain statique.
- tout l'état est mesuré et est a priori utilisé dans le schéma de commande.

La dynamique globale de ce bouclage proportionnel donné par $u = -Kx + \omega$ s'écrit

$$\dot{x} = (A - BK)x + B\omega \quad (66)$$

Ce schéma est-il suffisamment général pour permettre de stabiliser le système initial par un choix judicieux de la matrice K ? La réponse est affirmative si le système est commandable car on peut alors placer arbitrairement les pôles du système bouclé. On peut donc réaliser la stabilisation du système, et ce avec une constante de temps arbitraire. Précisons ce que l'on entend précisément

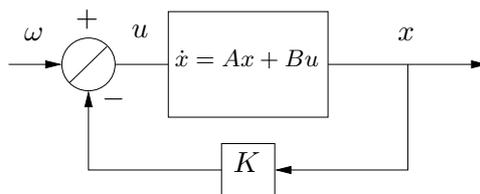


Figure 5: Rétroaction portant sur l'état complet du système.

par placement "arbitraire" des pôles

Propriété 6 - Placement de pôles. Soit Λ un ensemble de valeurs complexes assorties de leur multiplicité n_λ , la somme des multiplicités valant n . On suppose que si $\lambda \in \Lambda$, alors $\bar{\lambda} \in \Lambda$ et $n_{\bar{\lambda}} = n_\lambda$. Si le couple (A, B) est commandable, il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que

- Le spectre de $A - BK$ soit l'ensemble Λ :

$$\sigma(A - BK) = \Lambda \quad (67)$$

- La multiplicité de la valeur propre λ soit n_λ .

5.2 Démonstration

Bien que la propriété 6 soit tout à fait générale, pour des raisons de simplicité, on ne fera sa démonstration que dans le cas où le système n'a qu'une entrée scalaire.

5.2.1 Utilisation de la forme canonique commandable

Le principe de la démonstration est le suivant : montrer qu'il existe un changement de variable $z = Px$ tel que la dynamique du système se mette sous la forme dite *canonique commandable* :

$$\begin{cases} \dot{z}_n &= z_{n-1} \\ \dot{z}_{n-1} &= z_{n-2} \\ &\vdots \\ \dot{z}_1 &= a_n z_n + \dots + a_1 z_1 + u \end{cases} \quad (68)$$

Montrons tout de suite que si l'on obtient cette forme le problème est résolu. Remarquons que

- Les valeurs propres de $A-BK$ sont les racines du polynôme caractéristique χ_{A-BK} . On peut donc contrôler la position des pôles si l'on contrôle les coefficients du polynôme caractéristique de χ_{A-BK} .
- Le polynôme caractéristique d'une matrice n'est pas affecté par un changement de base. Pour toute matrice A carrée et toute matrice P inversible de même taille, $\chi_{A-BK} = \chi_{P(A-BK)P^{-1}}$.

Par conséquent, une fois montré que la dynamique du système initial se réécrit sous la forme (68) après changement de base, nous pouvons étudier directement cette forme. Ecrivons le retour d'état sous la forme générique (directement dans les nouvelles coordonnées)

$$u = -k_1 z_1 - \dots - k_n z_n \quad (69)$$

La dynamique (68) s'écrit alors sous la forme $\dot{z} = \bar{A}z$ avec

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 - k_1 & a_2 - k_2 & \dots & \dots & a_n - k_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

On montre par récurrence sur n que le polynôme caractéristique de \bar{A} est donné par

$$\chi_{\bar{A}}(\lambda) = \lambda^n + (k_1 - a_1)\lambda^{n-1} + \dots + (k_{n-1} - a_{n-1})\lambda + (k_n - a_n) \quad (71)$$

et par conséquent un choix adéquat des coefficients k_1, \dots, k_n permet bien de placer arbitrairement les racines de $\chi_{\bar{A}}$ et donc les pôles du système en boucle fermée.

5.2.2 Obtention de la forme canonique commandable

L'algorithme décrit dans la propriété 5 joue un rôle central dans la détermination de la base ou la dynamique du système prendra la forme (68). Nous considérons en effet les directions successives de l'espace commandable introduites par cet algorithme. Dans la mesure où le système est commandable

et n'a qu'une entrée scalaire, à chaque étape l'espace \mathcal{R}_k gagne une dimension, selon la direction $A^{k-1}B$. Notons ξ_k , avec $k \in \{1, \dots, n\}$, les composantes de x dans la base formée par ces directions et ξ le vecteur de composantes ces ξ_k

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k (A^{k-1}B) = C\xi \quad (72)$$

Notons $z_n = \xi_n$ la dernière variable obtenue par ce processus. Elle vérifie

$$z_n = LC^{-1}x \text{ avec } L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (73)$$

La relation $C^{-1}C = I$, donne en particulier

$$LC^{-1}B = 0, LC^{-1}AB = 0, \dots, LC^{-1}A^{n-2}B = 0, LC^{-1}A^{n-1}B = 1 \quad (74)$$

Par conséquent, en considérant les dérivées successives de z_n , on trouve

$$\begin{aligned} z_{n-1} &= \dot{z}_n = LC^{-1}\dot{x} = LC^{-1}(Ax + Bu) = [LC^{-1}A]x \\ z_2 &= \dot{z}_3 = [LC^{-1}A^{n-3}]\dot{x} = [LC^{-1}A^{n-2}]x \\ z_1 &= \dot{z}_2 = [LC^{-1}A^{n-2}]\dot{x} = [LC^{-1}A^{n-1}]x \\ \dot{z}_1 &= [LC^{-1}A^n]x + [LC^{-1}A^{n-1}]Bu = [LC^{-1}A^n]x + u \end{aligned}$$

L'égalité

$$\begin{bmatrix} z_n \\ \vdots \\ z_1 \end{bmatrix} = Px \text{ avec } P = \begin{bmatrix} LC^{-1} \\ \vdots \\ LC^{-1}A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (75)$$

définit bien un changement de base car P est inversible (exercice : calculer le produit PC et conclure) et la dynamique du vecteur $z = (z_1, \dots, z_n)$ prend bien la forme (68).

6 Observabilité

Considérons le système d'entrée $u \in \mathbb{R}^m$, d'état $x \in \mathbb{R}^n$ et de sortie $y \in \mathbb{R}^p$ caractérisé par les équations standard

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (76)$$

Deux vecteurs d'état x_1 et x_2 du système sont **discernables** s'il existe une commande u telle que les signaux de sorties $y_1(t), y_2(t)$ solutions du système (52) diffèrent lorsque les états initiaux correspondants $x_1(0) = x_1$ et $x_2(0) = x_2$ diffèrent. Dans le cas contraire, ils sont **indiscernables**. Le système sera dit **observable** si tous les états distincts du système sont discernables.

Notons \mathcal{I} l'ensemble des états indiscernables de 0. On montre facilement que c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Il est utile dans la mesure où deux états x_1 et x_2 sont indiscernables si et seulement si $x_2 - x_1$ est indiscernable de 0. Par conséquent, un système sera observable si et seulement si $\mathcal{I} = \{0\}$. Comme

dans le cas de la contrôlabilité, il existe un test algébrique simple déterminant si le système est observable. Il est basé sur la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (77)$$

Propriété 7 - Critère d'observabilité de Kalman. L'espace des états discernables de 0 du système (76) se confond avec le noyau de la matrice d'observabilité

$$\mathcal{I}(A, B) = \text{Ker } \mathcal{O} \quad (78)$$

En particulier, le système est observable si et seulement si la matrice d'observabilité est de rang n .

Démonstration – Pour toute entrée $C^\infty u$ (et en particulier 0), la sortie du système (76) est C^∞ . Or, les dérivées successives de y en $t = 0$ se calculent de la façon suivante :

$$y(0) = Cx_0 \quad (79)$$

$$\dot{y}(0) = C\dot{x}|_{t=0} = [CAx(t) + CBu(t)]|_{t=0} = CAx_0 + CBu_0 \quad (80)$$

$$\ddot{y}(0) = \frac{d}{dt}[CAx(t) + CBu(t)]|_{t=0} = CA^2x_0 + CABu(0) + CB\dot{u}(0) \quad (81)$$

$$\vdots \quad (82)$$

Cette série d'équations peut se réécrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \mathcal{O}x_0 + L \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \\ \vdots \\ u^{(n-2)}(0) \end{bmatrix} \quad (83)$$

En particulier, si x_0 est indiscernable de 0 et si on choisit $u \equiv 0$, alors on doit obtenir $y \equiv 0$. Par conséquent, tout état indiscernable de 0 doit être dans le noyau de \mathcal{O} .

Réciproquement, si x_0 est dans le noyau de \mathcal{O} , c'est-à-dire si

$$Cx_0 = 0, CAx_0 = 0, \dots, CA^{n-1}x_0 = 0$$

par le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, CA^n x_0 = 0 \text{ et donc } Ce^{At}x_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x_0 \equiv 0$$

Donc la sortie associée à la condition initiale $x(0) = x_0$ et à l'entrée y est donnée par

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau + Du(t) = 0 + \int_0^t Ce^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau + Du(t) \quad (84)$$

C'est la même que si x_0 était nul : x_0 est donc indiscernable de 0. ■

Comme pour la commandabilité, l'observabilité ou un défaut d'observabilité est plutôt une question de structure que de nombre de sorties. On montre

qu'un système est observable si et seulement si il existe un changement de variables linéaire tel que la dynamique du système se réécrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y = C_1x_1 \end{cases} \quad (85)$$

Cette structure met en évidence qu'il est impossible de retrouver la valeur de x_2 en n'observant que la sortie y . Il est toujours possible d'exhiber une décomposition telle que le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u \\ y = C_1x_1 \end{cases} \quad (86)$$

soit observable.

REMARQUE. Observabilité et commandabilité sont deux propriétés présentant de nombreuses analogies. En particulier, on retiendra la propriété suivante qui est importante dans l'étude des observateurs : le couple (A, B) est commandable si et seulement si le couple (\bar{A}, \bar{C}) , défini par

$$\bar{A} = A^T, \bar{C} = B^T \quad (87)$$

est observable.

7 Observateur - Structure observateur-commandeur

Dans cette section, on explique comment adapter le principe de commande de la section 5 lorsque l'état complet du système (52) n'est mesuré et que seule est disponible la valeur d'une sortie y . Le nouveau schéma de commande qui en résulte est le suivant

- On construit un **observateur** qui reconstruit en temps-réel une estimation \hat{x} de l'état x à partir de la sortie y .
- La valeur estimée \hat{x} est transmise à **commandeur** (ou contrôleur), conçu par exemple par les méthodes de la section 5 et qui utilise cette estimation comme s'il s'agissait de la vraie valeur de l'état.

7.1 Observateur

Pour estimer à partir de la connaissance de u et de y la valeur de l'état inconnu x du système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (88)$$

on utilise une structure de la forme

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases} \quad (89)$$

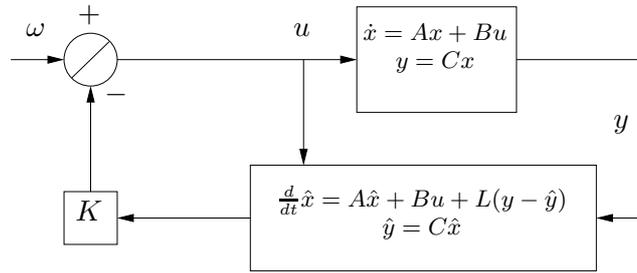


Figure 6: Structure observateur-commandeur

c'est-à-dire

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + LCx \quad (90)$$

On cherche à choisir la matrice L pour que l'estimation soit asymptotiquement exacte, c'est-à-dire que l'erreur d'estimation e soit évanescence

$$e = x - \hat{x} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \quad (91)$$

et dans un second temps pour pouvoir contrôler la vitesse à laquelle cette estimation tend vers 0.

Pour répondre à ces deux questions, on étudie la dynamique de l'erreur e : en soustrayant (88) et (90), on obtient

$$\dot{e} = (A - LC)e \quad (92)$$

Par conséquent, le problème se résume à placer les pôles de $A - LC$. Mais comme ces pôles sont également ceux de $(A - LC)^T = A^T - C^T L^T$, il s'agit de trouver une matrice $K = L^T$ qui permettent d'assigner le spectre de $A^T - C^T K$. Ce problème est analogue au problème de placement de pôle envisagé pour la partie commande de la section 5. On sait répondre à cette question lorsque le couple (A^T, C^T) est commandable, c'est-à-dire lorsque (A, C) est observable.

7.2 Système global.

Un calcul élémentaire montre que l'ensemble observateur-commandeur et système initial évolue selon les équations

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BKe \\ \dot{e} = (A - LC)e \end{cases} \quad (93)$$

c'est-à-dire selon

$$\dot{X} = MX \quad \text{avec } X = (x, e) \text{ et } M = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \quad (94)$$

Du fait de la structure bloc-triangulaire de M , le spectre de cette matrice n'est autre que la réunion des spectres de $A - BK$ et de $A - LC$. Par conséquent, si les gains du contrôleur ont été réglés pour stabiliser asymptotiquement le système en présence d'une mesure de l'état et si les gains de l'observateur ont été

réglés pour assurer la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation, la dynamique de l'ensemble système initial + observateur + contrôleur est également asymptotiquement stable. Il existe donc pour les systèmes linéaires un **principe de séparation** qui permet de concevoir indépendamment l'observateur et le contrôleur.

A Algèbre linéaire

L'image d'un sous-espace vectoriel E de \mathbb{C}^m par une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n déterminé par

$$A(E) = \{Ax, x \in E\} \quad (95)$$

Dans le cas où $E = \mathbb{C}^n$, ou $E = \mathbb{R}^n$ selon le contexte, cet espace est noté $\text{Im } A$

$$\text{Im } A = A(\mathbb{R}^n) \text{ ou } \text{Im } A = A(\mathbb{C}^n) \quad (96)$$

Le noyau d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^n , ou de \mathbb{R}^m selon le contexte, suivant

$$\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^m, Ax = 0\} \text{ ou } \text{Ker } A = \{x \in \mathbb{C}^m, Ax = 0\} \quad (97)$$

La somme $E_1 + \dots + E_p$ des sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_p de \mathbb{R}^n est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n défini par

$$E_1 + \dots + E_p = \{x_1 + \dots + x_p, (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\} \quad (98)$$

La somme est dite directe et notée $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ si

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, E_i \cap (E_1 + \dots + E_{i-1} + E_{i+1} + \dots + E_p) = \{0\} \quad (99)$$

A.1 Valeur propres, vecteurs propres

Le vecteur non nul $x \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ si

$$Ax = \lambda x \quad (100)$$

L'ensemble des valeurs propres associées à la matrice A est son spectre noté $\sigma(A)$. Les valeurs propres d'une matrice sont obtenues comme solutions de son polynôme caractéristique

$$\chi_A(s) = \det(sI - A) \quad (101)$$

La puissance $m(\lambda)$ de $(s - \lambda)$ apparaissant dans $\chi_A(s)$ est appelée multiplicité de λ . Pour toute valeur propre λ , le sous-espace-vectoriel $\text{Ker}(\lambda I - A)$ est appelé espace propre associé à λ . La matrice A est dite diagonalisable si il existe une base \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A , c'est-à-dire si

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(\lambda_1 I - A) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\lambda_p I - A), \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \quad (102)$$

Dans cette base de vecteurs propres A est représentée par une matrice diagonale. Les valeurs diagonales sont alors les valeurs propres de A , répétées avec leur multiplicité.

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix} P^{-1} \quad (103)$$

A.2 Indices et réduction de Jordan

Soit A une matrice à coefficients complexes $n \times n$. Pour toute valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$, on appelle indice de λ et on note $\nu(\lambda)$ le plus petit entier ν tel que

$$\text{Ker}(\lambda I - A)^{\nu+1} = \text{Ker}(\lambda I - A)^\nu$$

Le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(A - \lambda I)^{\nu(A)}$ est appelé espace caractéristique associé à λ . Il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables : cela se produit s'il existe une valeur propre λ de A tel que

$$\dim(\text{Ker}(\lambda I - A)) < m(\lambda)$$

Mais dans tous les cas, l'espace entier \mathbb{C}^n est somme directe des espaces caractéristiques de A :

$$\mathbb{C}^n = \text{Ker}(\lambda_1 I - A)^{\nu(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\lambda_r I - A)^{\nu(\lambda_r)}, \lambda_i \in \sigma(A) \quad (104)$$

et

$$\dim(\text{Ker}(\lambda I - A)^{\nu(A)}) = m(\lambda)$$

Cette décomposition permet de montrer l'existence de la décomposition de Jordan d'une matrice A : en sélectionnant une base de \mathbb{R}^n constituée de certains vecteurs des espaces caractéristiques de A , on peut montrer qu'il existe toujours une matrice inversible P de $\mathbb{C}^{n \times n}$ telle que

$$A = P \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_p \end{bmatrix} P^{-1} \quad (105)$$

les blocs J_1, J_2, \dots, J_p , dits blocs de Jordan, étant tous de la forme

$$J(\lambda, \nu) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}, J(\lambda, \nu) \text{ de taille } \nu \times \nu \quad (106)$$

De plus

- Les valeurs de λ apparaissant dans les blocs de Jordan sont exactement les valeurs propres de la matrice A . Le nombre de fois où λ_i apparaît est égal à sa multiplicité.
- La taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre λ est égale à l'indice associé $\nu(\lambda)$.

B Equations différentielles linéaires

Soit A une matrice à coefficients complexes, de taille $n \times n$. La solution du problème

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (107)$$

est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}u(\tau) d\tau \quad (108)$$

$$= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A\tau}u(t-\tau) d\tau \quad (109)$$

L'exponentielle de matrice joue donc un rôle central dans la résolution de tels systèmes. Dans le cas général, l'exponentielle d'une matrice carrée A n'est pas la matrice que l'on obtient en remplaçant chaque coefficient par son exponentielle. On peut la calculer

- Par la formule

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n \quad (110)$$

qui est peu pratique, à moins que A soit nilpotente, auquel cas la somme devient finie.

- En faisant la réduction de la matrice A : si A est diagonalisable et vérifie

$$A = P^{-1}DP, \quad P \text{ inversible}, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

alors

$$e^A = P^{-1} \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P$$

Lorsque ce n'est pas le cas, la forme de Jordan associée à A qui elle existe toujours permet encore de calculer e^A .

- ... et en résolvant le système (107) ! Si l'on sait trouver sa solution pour toute condition initiale x_0 lorsque $u \equiv 0$, alors on connaît e^{At} pour tout t .

