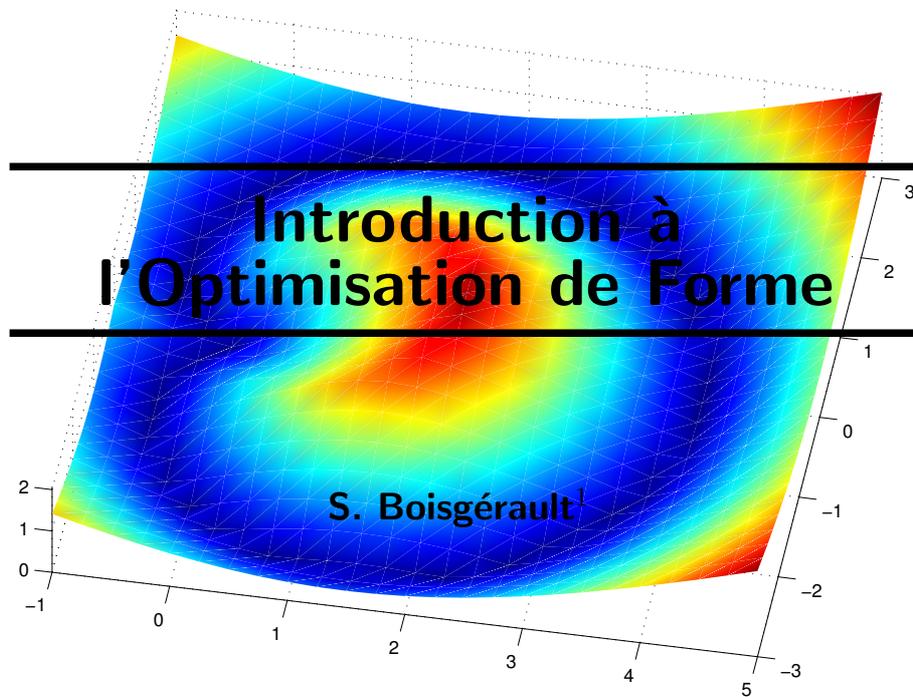




ECOLE DES MINES
DE PARIS
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
APPLIQUÉES
Sophia-Antipolis, France



¹CMA, Ecole des Mines de Paris, 2004 route des Lucioles B.P. 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex, France. © Tél : 04-92-38-71-67. ✉ E-Mail : Sebastien.Boisgerault@sophia.inria.fr.

Pourquoi l'Optimisation de Forme ?

L'Optimisation de Forme est la branche de l'Optimisation consacrée aux problèmes dont les variables sont de nature géométrique. Les deux problèmes classiques suivants relèvent donc de la discipline :

- **Le problème isopérimétrique ou problème de Didon²**. Parmi les ensembles du plan d'un périmètre donné, déterminer ceux de surface maximale. Bien que ce problème ait été étudié dès Zénodore (2ème siècle avant J.C.), la preuve rigoureuse que la forme optimale soit le disque ne fut apportée qu'en 1841 par Steiner.

- **Le problème du solide de moindre résistance**, issu des *Philosophiae naturalis principia mathematica* d'Isaac Newton (1687). Quelle forme donner à un corps pour que son déplacement dans une atmosphère raréfiée induise une résistance à l'avancement minimale ?

De nombreuses applications contemporaines de l'Optimisation de Forme sont apparentées à l'un ou l'autre de ces problèmes. Dans la première situation, le critère à maximiser est fonction explicite de la géométrie. C'est le cas dans certains problèmes d'Imagerie comme la détermination de contours actifs, en Optique Géométrique, etc. Dans la forme moderne du problème de Newton³ en revanche, le critère étudié dépend de la géométrie à travers la solution d'une équation aux dérivées partielles. On retrouve ce même schéma dans de nombreuses situations en Mécanique des Fluides, mais aussi en Mécanique des Solides, en Thermique, en Electromagnétisme, etc.

²Didon est la fondatrice légendaire de Carthage évoquée dans l'Enéide de Virgile. Débarquant en Afrique, on lui confia autant de terre qu'elle pourrait en enclorre dans la peau d'une vache. Elle fit découper la peau en fines lanières qui, assemblées bout à bout, formèrent un cordon de grande longueur délimitant la région où fut construite Carthage.

³La modélisation originelle des *Principia* néglige les interactions au sein du fluide. Elle ne tient compte que de la quantité de mouvement transmise par les particules du fluide lors du choc avec le corps.

1 Géométrie et fonction distance orientée

1.1 Fonction distance orientée : définition

Notations et Rappels. Dans la suite, on identifie tout élément $x = (x_1, \dots, x_N)$ de \mathbb{R}^N avec le vecteur colonne associé ; x^* désigne le vecteur transposé de x .

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad x^* = [x_1 \quad \cdots \quad x_N] \quad (1)$$

La notation $x \cdot y$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^N et la notation $|x|$ la norme associée

$$x \cdot y = x^*y = \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad \text{et} \quad |x|^2 = x \cdot x = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (2)$$

La boule ouverte de centre x et de rayon r est définie

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, |x - y| < r\} \quad (3)$$

Pour un ensemble A de \mathbb{R}^N donné, la distance d'un point x à A satisfait

$$d_A(x) = \begin{cases} \inf_{y \in A} |x - y| & \text{si } A \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } A = \emptyset \end{cases} \quad (4)$$

L'adhérence, la frontière et l'intérieur de A sont donnés respectivement par

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^N, d_A(x) = 0\}, \quad \partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{C}A} \quad \text{et} \quad \text{int}(A) = \bar{A} - \partial A$$

Premières définitions. On note b_A la fonction *distance orientée* à l'ensemble A , définie par

$$b_A(x) = \begin{cases} d_A(x) & \text{si } x \in \mathbb{C}A \\ -d_{\mathbb{C}A}(x) & \text{si } x \in A \end{cases} \quad (5)$$

Les terminologies de *distance signée* et de *distance algébrique* à la frontière de A sont parfois employées pour désigner le même objet. L'*ensemble des projections* d'un point x sur ∂A est défini par

$$\Pi_{\partial A}(x) = \{p \in \partial A, |p - x| = |b_A(x)|\} \quad (6)$$

Il est non vide dès lors que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \mathbb{R}^N$.

1.2 Fonction distance orientée : squelette et dérivées

L'étude des dérivées de la fonction b_A fournit de nombreuses informations sur l'ensemble A . Tout d'abord, la régularité de la fonction distance est reliée de façon simple à celle de l'ensemble associé. Ensuite, ses dérivées successives permettent d'accéder aux objets géométriques tels que la normale extérieure, la courbure.

Différentiabilité de b_A . Squelette. La fonction b_A est différentiable en un point $x \notin \partial A$ si et seulement si l'ensemble $\Pi_{\partial A}(x)$ se réduit à un singleton $\{p(x)\}$. Dans ce cas, on a la relation

$$p(x) = x - b_A(x)\nabla b_A(x) \text{ ou encore } \nabla b_A(x) = \frac{x - p(x)}{b_A(x)} \quad (7)$$

L'ensemble des points où b_A n'est pas différentiable est appelé *squelette* de A . Il diffère toutefois de l'objet usuel de la Morphologie Mathématique.

Normale, Courbure. Soit A un ensemble de \mathbb{R}^N et $x \in \partial A$. Sous réserve d'existence des expressions, on note

$$n(x) = \nabla b_A(x) \text{ et } H(x) = \frac{1}{N-1}\kappa b_A(x) \quad (8)$$

Le vecteur $n(x)$ est appelé *normale extérieure* à A en x et $H(x)$ est la *courbure moyenne* de ∂A en x .

1.3 Régularité des domaines géométriques

Définition classique. Soit ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , de frontière γ et $k \geq 1$. L'ensemble ω est un *domaine de classe \mathcal{C}^k* s'il est localement en dessous du graphe d'une fonction \mathcal{C}^k : pour tout point $x \in \gamma$, il existe un $r > 0$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R})$, telle que, après un éventuel changement de base orthonormée, on ait

$$\omega \cap C(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N, f(y_1, \dots, y_{N-1}) < y_N\} \cap C(x, r)$$

Définition par la fonction distance. On dispose, lorsque $k \geq 2$, d'une caractérisation des domaines \mathcal{C}^k particulièrement simple par le biais de leur fonction distance : l'ensemble ω est de classe \mathcal{C}^k si et seulement si b_ω est de classe \mathcal{C}^k sur un voisinage de γ . En raison de du caractère borné de ω , on peut imposer que ce voisinage soit *tubulaire*, c'est-à-dire de la forme

$$U_h(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^N, d_\gamma(x) < h\} \quad (9)$$

Cette caractérisation n'est plus valable lorsque $k = 1$; si la fonction distance orientée est \mathcal{C}^1 le domaine est toujours de classe \mathcal{C}^1 , mais la réciproque est fautive.

Relations XXX. Soit ω un ouvert \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^N et U un voisinage tubulaire de $\partial\omega$ sur lequel b_ω soit de classe \mathcal{C}^2 . Notons i l'application identité de \mathbb{R}^N et I la matrice identité $N \times N$. Notons également $p_\omega : U \rightarrow \partial\omega$ la projection sur $\partial\omega$ et pour tout $x \in \partial\omega$, $P_\omega(x)$ la matrice de projection sur le plan tangent à $\partial\omega$ en x . En tout point de U , on a

$$p_\omega = i - b_\omega \nabla b_\omega \quad (10)$$

$$P_\omega \circ p_\omega = I - \nabla b_\omega \nabla b_\omega^* \quad (11)$$

$$|\nabla b_\omega| = 1 \quad (12)$$

$$\nabla b_\omega = n_\omega \circ p_\omega = \nabla b_\omega \circ p_\omega \quad (13)$$

$$D^2b_\omega \nabla b_\omega = 0 \quad (14)$$

$$[I + b_\omega D^2b_\omega \circ p_\omega] D^2b_\omega = D^2b_\omega \circ p_\omega \quad (15)$$

Preuve : En tout point de U n'appartenant pas à $\partial\omega$, la formule (7) implique $|\nabla b_\omega| = 1$. Par continuité de ∇b_ω , cette équation est également satisfaite sur $\partial\omega$, d'où (12).

Soit x un point de U n'appartenant pas à $\partial\omega$. Le segment $[x, p_\omega(x)]$ est inclu dans U . Posons $x_t = p_\omega(x) + t(x - p_\omega(x))$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $p_\omega(x_t) = p_\omega(x)$, par conséquent, $b_\omega(x_t) = tb_\omega(x)$. En dérivant cette relation en $t = 0$, on obtient $\nabla b_\omega(p_\omega(x)) \cdot (x - p_\omega(x)) = b_\omega(x)$, soit $\nabla b_\omega(p_\omega(x)) \cdot \nabla b_\omega(x) = 1$. Ces deux vecteurs étant de norme 1, il sont égaux. Les relations (13) s'en déduisent immédiatement.

L'égalité (12) se réécrit $|\nabla b_\omega|^2 = 1$; la différentiation de cette relation donne (14). L'égalité (13) se réécrit $\nabla b_\omega = \nabla b_\omega \circ (i - b_\omega \nabla b_\omega)$. En différentiant cette relation, on obtient $D^2b_\omega = [D^2b_\omega \circ p_\omega][I - \nabla b_\omega \nabla b_\omega^* - b_\omega D^2b_\omega]$ ou comme $[D^2b_\omega \circ p_\omega] \nabla b_\omega = [D^2b_\omega \nabla b_\omega] \circ p_\omega = 0$, $D^2b_\omega = [D^2b_\omega \circ p_\omega][I - b_\omega D^2b_\omega]$. La relation (15) s'en déduit.

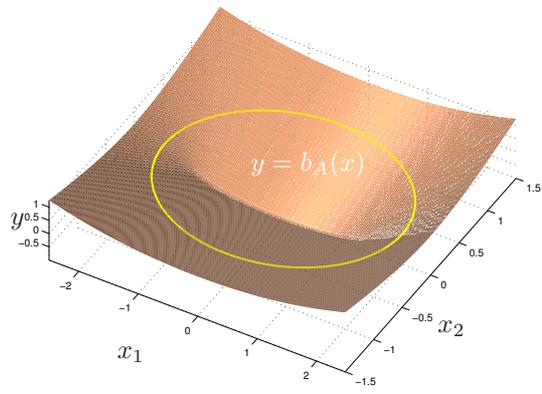


Figure 1: Graphe de b_ω associé à un domaine elliptique

2 Fonctions définies sur le bord d'un domaine

2.1 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

Rappel. Par la suite, E est un espace vectoriel muni de la norme $\|\cdot\|_E$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ un multi-entier. On appelle *ordre* de α l'entier $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. Pour une application f définie sur un voisinage de $x \in \mathbb{R}^N$ et à valeurs dans E , on pose

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

lorsque le second membre est bien défini.

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^N . $\mathcal{C}^k(U; E)$ désigne l'ensemble des fonctions de U dans E dont les dérivées partielles d'ordre inférieur à k existent et sont continues.

La régularité de fonctions définies sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ non nécessairement ouvert peut être caractérisée par la régularité maximale de ses extensions : on dira une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ appartient à $\mathcal{C}^k(A; E)$ si il existe un voisinage ouvert U de A et une fonction $F \in \mathcal{C}^k(U; E)$ dont la restriction à A soit f .

Lorsque A est un compact *stable* de \mathbb{R}^N , c'est-à-dire lorsque $\text{int}(A)$ est dense dans A , l'espace $\mathcal{C}^k(A; E)$ peut être muni d'une norme. En effet, pour toute fonction f de $\mathcal{C}^k(A; E)$, la restriction de f à $\text{int}(A)$ détermine de façon unique les valeurs de $\partial^\alpha F$ sur A pour toute extension F de f de classe \mathcal{C}^k . On définit alors la norme

$$\|f\|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha F\|_0 \quad \text{où} \quad \|F\|_0 = \sup_{x \in A} \|F(x)\|_E$$

Par la suite, pour tout $x \in \partial A$, on notera par commodité $\partial^\alpha f(x)$ la valeur $\partial^\alpha F(x)$.

2.2 Calcul Différentiel Tangentiel

Notations. Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^N dont la normale extérieure en $x \in \partial A$ soit définie et pour toute fonction scalaire f suffisamment régulière, on définit les dérivées normale de f en x d'ordre 1 et 2 par

$$\frac{\partial f}{\partial n}(x) = \langle \nabla f(x), n(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}(x) = {}^t n(x) \cdot D^2 f(x) \cdot n(x) \quad (16)$$

Si f est un tenseur, ces dérivées normales sont calculées coefficient par coefficient.

Opérateurs différentiels tangentiels. On utilisera essentiellement dans la suite les analogues tangentiels du gradient et de la divergence. Soit ω un domaine \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^N . Le *gradient tangentiel* d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\gamma; \mathbb{R})$, noté $\nabla_\gamma f$, est défini par

$$\nabla_\gamma f = \nabla F|_\gamma - \frac{\partial F}{\partial n} n \quad (17)$$

où F est une fonction de classe \mathcal{C}^1 prolongeant f dans un voisinage de γ . La *divergence tangentielle* d'une fonction $V \in \mathcal{C}^1(\gamma; \mathbb{R}^N)$, notée $\text{div}_\gamma V$, est définie par

$$\text{div}_\gamma V = \text{div} W|_\gamma - \left\langle \frac{\partial W}{\partial n}, n \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \quad (18)$$

W étant une extension \mathcal{C}^1 de V dans un voisinage de γ . Dans les deux cas, on peut montrer que les définitions ne dépendent pas de l'extension choisie. En particulier lorsque ω est un domaine de classe \mathcal{C}^2 , des extensions de classe \mathcal{C}^1 privilégiées de f et V sont $F = f \circ p$ et $W = V \circ p$. On obtient alors :

Justifier.

$$\nabla_\gamma f = \nabla(f \circ p)|_\gamma \text{ et } \operatorname{div}_\gamma V = \operatorname{div}(V \circ p)|_\gamma \quad (19)$$

Justifier.

Utiliser l'expression

$$P_\gamma = I - n \otimes n.$$

Définir D_γ .

Définir (avant)

le plan tangent

$T_x \gamma$?

2.3 Analyse Vectorielle

Notations. Par la suite \mathcal{H}^k désigne mesure de Hausdorff de dimension k . La valeur $\mathcal{H}^k(A)$ se confond la "surface k -dimensionnelle" de A lorsque cet ensemble est suffisamment régulier ; en particulier, dans \mathbb{R}^N , \mathcal{H}^N coïncide avec la mesure de Lebesgue, notée dx .

Formules de Stokes et de Green. Rappelons un résultat classique : si ω est un domaine de \mathbb{R}^N et $V \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R}^N)$, alors on a la relation suivante, appelée **formule de Stokes** :

$$\int_\omega \operatorname{div} V \, dx = \int_\gamma \langle V, n \rangle_{\mathbb{R}^N} \, d\mathcal{H}^{N-1} \quad (20)$$

En appliquant la formule de Stokes au vecteur fV et non plus V , et en remarquant que $\operatorname{div}(fV) = f \cdot \operatorname{div} V + \langle \nabla f, V \rangle$, on obtient la **formule de Green** :

$$\int_\omega f \cdot \operatorname{div} V \, dx = \int_\gamma \langle V, n \rangle \, d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\omega \langle \nabla f, V \rangle \, dx \quad (21)$$

Cette formule peut être considérée comme une généralisation de l'intégration par parties au cas multi-dimensionnel. Elle possède des analogues "de bord" :

Si $V \in \mathcal{C}^1(\gamma; \mathbb{R}^N)$ est tangent à γ , c'est-à-dire si $\langle V, n \rangle = 0$, on a

$$\int_\gamma f \cdot \operatorname{div}_\gamma V \, d\mathcal{H}^{N-1} = - \int_\gamma \langle \nabla_\gamma f, V \rangle \, d\mathcal{H}^{N-1} \quad (22)$$

On parlera donc de **Formule de Green tangentielle**. Noter qu'un terme de (21) n'a pas d'équivalent ici du fait de l'absence de "bord" de γ .



G. Stokes
(1819-1903)

George Stokes a développé de nombreuses techniques mathématiques pour la physique et fit ainsi avancer de manière considérable la physique mathématique en Angleterre. Parmi les thèmes qu'il étudia, on peut citer le mouvement des fluides incompressibles, des solides élastiques, la théorie de la lumière, les phénomènes de fluorescence, ou encore la géodésie. Son nom reste en particulier attaché à la loi qui régit le comportement des fluides visqueux.

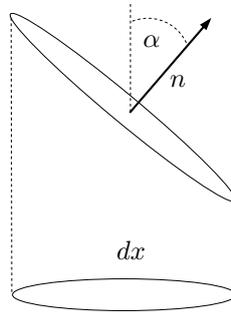
La date de naissance de **George Green** est inconnue mais il fut baptisé le 14 juillet 1793. Sa scolarité s'est limitée à 4 trimestres en 1801-1802 ! Bien que l'origine de ses compétences en mathématiques demeure un mystère, sa contribution au développement des méthodes mathématiques pour la physique, en particulier à la théorie du potentiel, est de tout premier ordre. Il ne quitta le moulin qu'il possédait et où il travaillait qu'à l'âge de 40 ans pour étudier à Cambridge.

(Informations issues de <http://www.math.bme.hu/mathhist/>).

Exercices

EXERCICE I - PROBLÈME DE NEWTON. On cherche à déterminer les formes efficaces d'un corps se déplaçant à vitesse constante dans un fluide. Le modèle d'interaction fluide/corps est simplifié au maximum : dans le référentiel du solide, le flux vertical transporte une quantité de mouvement P par unité de surface et par seconde. On suppose que les particules fluides n'interagissent pas entre elles et que le choc sur le corps est parfaitement élastique. La forme de l'objet est d'autant plus adaptée que la résistance à l'avancement, aussi appelée trainée, est faible.

1. On considère une portion élémentaire de l'obstacle, de surface projetée sur le plan horizontal dx . La normale n fait avec le plan vertical un angle α .



Montrer que la composante verticale de la force exercée sur cette surface est donnée par

$$df = -P(1 + \cos 2\alpha)dx \quad (23)$$

2. La forme est déterminée par le graphe de la fonction continument différentiable $u : \omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dédurre de la question précédente et de l'identité

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (24)$$

que la composante verticale de la force totale exercée sur l'obstacle est

$$F = \int df = -2P \int_{\omega} \frac{dx}{1 + |\nabla u|^2} \quad (25)$$

3. On fait désormais une hypothèse supplémentaire d'axisymétrie sur l'objet : la fonction u est définie sur $\omega = B(0, L)$ et supposée de la forme

$$u(x_1, x_2) = y(|x|) \quad (26)$$

où y est une fonction de $[0, L]$ dans \mathbb{R} . Montrer que la force F s'écrit comme

$$F(y) = -4\pi P \int \frac{r dr}{1 + y'(r)^2} \quad (27)$$

4. On note S l'espace des fonctions $\psi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ continument différentiables. Cet espace est muni de la norme

$$\|\psi\| = \max_{r \in [0, L]} |\psi(r)| + \max_{r \in [0, L]} |\psi'(r)| \quad (28)$$

Montrer que la différentielle de l'application $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ existe en tout point et que

$$dF(y) \cdot h = 8\pi P \int \frac{ry'(r)}{1 + y'(r)^2} h'(r) dr \quad (29)$$

5. En déduire par intégration par parties que si $h(0) = h(L) = 0$, on a

$$dF(y) \cdot h = \int_0^L G_y(r) h(r) dr \quad \text{avec} \quad G_y(r) = -8\pi P \left(\frac{ry'(r)}{1 + y'(r)^2} \right)' \quad (30)$$

Quelles sont les petites déformations de la surface qui vont diminuer la résistance à l'avancement ?

EXERCICE II - FONCTION DISTANCE ORIENTÉE - AUTRES DÉFINITIONS Soit A un ensemble de \mathbb{R}^N .

1. Montrer que $b_A = d_A - d_{\mathbb{C}A}$.
2. Montrer que $b_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \partial A$. En déduire que

$$b_A(x) = \begin{cases} d_A(x) & \text{si } x \in \text{int}(\mathbb{C}A) \\ 0 & \text{si } x \in \partial A \\ -d_{\mathbb{C}A}(x) & \text{si } x \in \text{int}(A) \end{cases}$$

EXERCICE III - DISTANCE SIGNÉE - ENSEMBLE DES PROJECTIONS Soient A et B deux sous-ensembles de \mathbb{R}^N .

1. Montrer que si $A \neq \emptyset$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, il existe $p \in \bar{A}$ tel que $\|p - x\|_{\mathbb{R}^N} = d_A(x)$. Montrer que si $x \in \mathbb{C}A$, un tel p appartient nécessairement à la frontière de A . En déduire que si $B \neq \emptyset$ et $B \neq \mathbb{R}^N$, alors $\Pi_{\partial B}(x)$ est non vide.
2. Montrer que $d_A = d_{\bar{A}}$. Déduire de ce résultat et de la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{C}A$, $d_A(x) = d_{\partial A}(x)$. En conclure que

$$b_B = -\sigma_B \cdot d_{\partial B} \text{ avec } \sigma_B = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{C}B \end{cases}$$

La fonction σ_B est appelée *signe* de l'ensemble B .

EXERCICE IV - INCLUSIONS ET INÉGALITÉS Soient A et B deux ensembles de \mathbb{R}^N .

1. Montrer que $b_A \leq b_B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$ et $\overline{\mathbb{C}A} \subset \overline{\mathbb{C}B}$ et en déduire que

$$b_A = b_B \iff \bar{B} = \bar{A} \text{ et } \overline{\mathbb{C}A} = \overline{\mathbb{C}B} \iff \bar{B} = \bar{A} \text{ et } \partial A = \partial B$$

EXERCICE V - SQUELETTE Soit A un ouvert de \mathbb{R}^N . Notons $S^b(A)$ l'ensemble des points du squelette de A appartenant à A (c'est-à-dire le squelette intérieur). On désire comparer cet ensemble au squelette $S^m(A)$ de la morphologie mathématique dont on rappelle la définition :

Soit $\mathfrak{B}(A)$ l'ensemble des boules ouvertes incluses dans A . Le *squelette morphologique* $S^m(A)$ est l'ensemble des centres des boules ouvertes maximales de $\mathfrak{B}(A)$ ⁴.

On montre dans la première partie l'inclusion $S^b(A) \subset S^m(A)$. Un contre-exemple à l'inclusion réciproque est donné dans la deuxième section.

1. Inclusion directe. Soit $x \in S^b(A)$. En utilisant éventuellement une similitude directe, on peut toujours supposer que $\{e_N, -e_N\} \subset \Pi_{\partial A}(x)$ avec $e_N = (0, \dots, 0, 1)$, ce que l'on fera par la suite. Le point x est alors de la forme $x = (\xi, 0)$ pour un $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$.

A. Montrer que la seule boule maximale *éventuelle* de $\mathfrak{B}(A)$ centrée en x est donnée par

$$B_\xi = B((0, \xi), \rho(\|\xi\|)) \text{ avec } \rho(\kappa) = \sqrt{1 + \|\kappa\|^2} \quad (31)$$

B. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, ρ satisfait $\rho(b) - \rho(a) < |b - a|$.

C. Soit B une boule de A contenant B_ξ . Montrer que B est de la forme B_ζ pour un $\zeta \in \mathbb{R}^{N-1}$. Montrer que si $\zeta \neq \xi$, le point

$$y = \left(\xi - \rho(\|\xi\|) \frac{\zeta - \xi}{\|\zeta - \xi\|}, 0 \right)$$

appartient à $\overline{B_\xi}$ mais pas à $\overline{B_\zeta}$. Conclure.

2. Contre-exemple de l'inclusion réciproque. Soit A l'ensemble de \mathbb{R}^2 suivant

$$A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 > x_1^2/2\}$$

A. Montrer que si B est une boule de $\mathfrak{B}(A)$ telle que $(0, 0) \in \partial B$, alors son centre est d'abscisse nulle. En déduire que $B(e_1, 1)$ est maximale dans $\mathfrak{B}(A)$.

B. Montrer que $\Pi_{\partial A}(e_1) = \{(0, 0)\}$. Conclure.

EXERCICE VI - Soit A un ensemble de \mathbb{R}^N .

1. Montrer qu'en tout point x extérieur au squelette de A , on a

$$\|\nabla b_A(x)\| = 1 \quad (32)$$

2. Supposons que b_A soit deux fois différentiable au point $x \in \partial A$. Montrer que $D^2 b_\omega \cdot n = 0$. En déduire que pour tout $x \in \gamma$, $\Pi_x = D^2 b_\omega(x)$ définit un endomorphisme symétrique de l'espace tangent à γ en x .

Π_x est appelé *endomorphisme de Weingarten*, ses sous-espaces propres *directions principales* et les valeurs propres correspondantes sont les courbures associées. $H(x)$ apparaît donc comme la moyenne arithmétique de ces courbures.

⁴Une boule B_0 de $\mathfrak{B}(A)$ est dite maximale si pour tout $B \in \mathfrak{B}(A)$, $B_0 \subset B$ implique $B_0 = B$.

EXERCICE VII - LIGNES DE NIVEAU DE LA FONCTION DISTANCE Soit A un ensemble de \mathbb{R}^N . On cherche à caractériser la régularité des lignes de niveau de b_A en dehors de l'adhérence du squelette.

1. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^N ne contenant aucun point du squelette de A . Montrer que si la fonction b_A n'est pas continument différentiable sur U alors il existe un $x \in U$, un vecteur unitaire u différent de $\nabla b_A(x)$ et une suite x_n tendant vers x telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nabla b_A(x_n) = u$$

Montrer que la suite $y_n = p(x_n)$ appartient à ∂A et converge vers un y distinct de $p(x)$ et tel que $|b_A(x)| = \|x - y\|_{\mathbb{R}^N}$. Conclure.

2. L'ensemble U désigne désormais le plus grand ouvert de \mathbb{R}^N ne contenant pas de point du squelette de A . Soit L_λ la ligne de niveau λ de la fonction b_A

$$L_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N, b_A(x) = \lambda\} \quad (33)$$

Montrer que $L_\lambda \cap U$ est localement le graphe d'une fonction \mathcal{C}^1 .

3. Déterminer un ensemble A dont le squelette soit une ligne de niveau de b_A de classe \mathcal{C}^1 .

EXERCICE VIII - Soit ω le domaine de \mathbb{R}^2 défini par ses intersections avec les ensembles A_1, A_2 et A_3 (cf. figure 2).

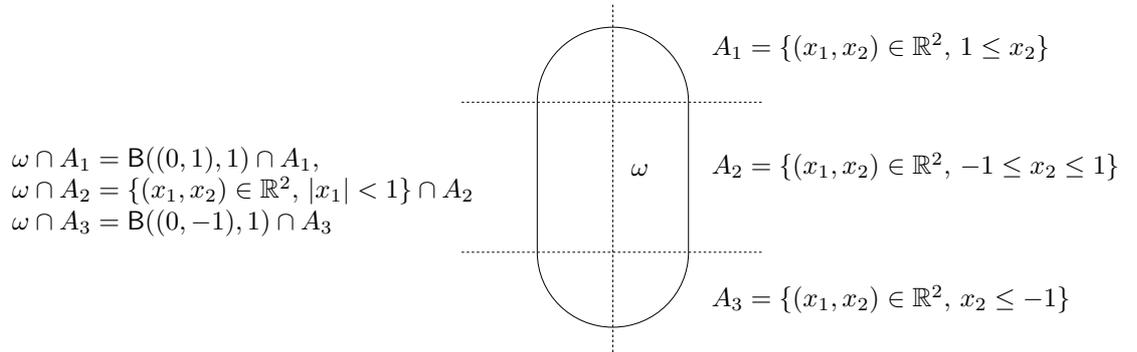


Figure 2: Le domaine ω .

1. Montrer que l'on a

$$b_\omega(x) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2} - 1 & \text{si } x \in A_1 \\ |x_1| - 1 & \text{si } x \in A_2 \\ \sqrt{x_1^2 + (x_2 + 1)^2} - 1 & \text{si } x \in A_3 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble S défini par $S = \{x \in \mathbb{R}^2, b_\omega(x) \leq -1\}$

2. Montrer que si $x \notin S$, b_ω est différentiable en x si et seulement si $(b_\omega + 1)^2$ est différentiable en x . En déduire que $\nabla b_\omega(x)$ existe et est continu sur $\mathbb{C}S$. La fonction b_ω est-elle différentiable en $x \in S$?

3. Montrer que ω est un domaine \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 qui n'est pas \mathcal{C}^2 .

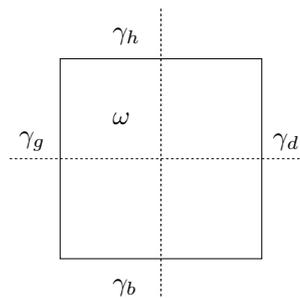
EXERCICE IX - Montrer que si ω est un domaine \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^N , $k \geq 1$, alors $n \in \mathcal{C}^{k-1}(\gamma; \mathbb{R}^m)$ et que si $k \geq 2$, $H \in \mathcal{C}^{k-2}(\gamma; \mathbb{R})$.

EXERCICE X - Considérons le domaine ω de \mathbb{R}^2 défini par

$$\omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \max(|x_1|, |x_2|) < 1\}$$

On pose

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \gamma \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = 1\} \\ \gamma_g &= \gamma \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = -1\} \\ \gamma_h &= \gamma \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = 1\} \\ \gamma_b &= \gamma \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = -1\} \end{aligned}$$



1. Montrer que le domaine ω n'est pas \mathcal{C}^1 , mais que la normale extérieure à ω est définie (\mathcal{H}^1 -)presque partout sur γ .
2. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R})$, alors

$$\int_{\omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx = \int_{\gamma_a} f d\mathcal{H}^1 - \int_{\gamma_g} f d\mathcal{H}^1$$

et déterminer une formule analogue faisant intervenir $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

3. En déduire que la formule de Stokes reste valide dans le domaine ω .

EXERCICE XI - Soit ω un domaine \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^N .

1. Montrer que la formule de Stokes est équivalente à la formule suivante, valable pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R})$:

$$\int_{\omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\gamma} f n_i d\mathcal{H}^{N-1} \quad (34)$$

(n_i désigne la i -ème composante de la normale dans la base canonique de \mathbb{R}^N).

2. Soit $\sigma : \bar{\omega} \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On appelle divergence de σ l'application à valeurs vectorielles définie par

$$(\operatorname{div} \sigma)_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} \quad (35)$$

Utiliser la question précédente pour prouver la formule de Stokes matricielle

$$\int_{\omega} \operatorname{div} \sigma dx = \int_{\gamma} \sigma \cdot n d\mathcal{H}^{N-1} \quad (36)$$

EXERCICE XII - Soit ω un domaine \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^N .

1. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R})$, on a

$$\int_{\omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\omega} \kappa u \cdot v dx \quad (37)$$

2. En déduire que si u et v sont des champs de $\mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R})$, alors

$$\int_{\omega} (u \cdot \kappa v - \kappa u \cdot v) dx = \int_{\gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v \right) d\mathcal{H}^{N-1} \quad (38)$$

EXERCICE XIII - Soit ω un domaine \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^N et x un point de γ . On considère une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$ telle que $e_N = n(x)$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\gamma; \mathbb{R})$. Déterminer l'expression de $\nabla_{\gamma} f$ en x dans la base \mathcal{B} .
2. Même question avec $V \in \mathcal{C}^1(\gamma; \mathbb{R}^N)$ et l'opérateur div_{γ} .

EXERCICE XIV - Soit ω un domaine \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^N .

1. Montrer que si $V \in \mathcal{C}^1(\gamma; \mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{C}^1(\gamma; \mathbb{R})$, on a

$$\text{div}_{\gamma}(fV) = f \cdot \text{div}_{\gamma} V + \langle \nabla_{\gamma} f, V \rangle$$

2. Montrer que $\text{div}_{\gamma} n = (N-1)H$ (on rappelle que $D^2 b_{\omega} \cdot n = 0$, cf. exercice 2.3)
3. En déduire que si V n'est pas tangent à γ , la formule (22) devient

$$\int_{\gamma} f \cdot \text{div}_{\gamma} V d\mathcal{H}^{N-1} = - \int_{\gamma} \langle \nabla_{\gamma} f, V \rangle d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\gamma} (N-1)H f \langle V, n \rangle d\mathcal{H}^{N-1} \quad (39)$$

Attention, on peut avoir envie d'utiliser $\nabla b = \nabla(b \circ p)$. Preuve ?

EXERCICE XV - Soit ω un domaine \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^N et $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R})$ dont la restriction à γ soit nulle.

1. Montrer que l'on a $\nabla u|_{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial n} n$.

EXERCICE XVI - OPÉRATEUR DE LAPLACE-BELTRAMI Soit ω un domaine \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^N . On définit l'opérateur $\kappa_{\gamma} : \mathcal{C}^2(\gamma, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\gamma, \mathbb{R})$ par

$$\kappa_{\gamma} u = \text{div}_{\gamma} (\nabla_{\gamma} u)$$

1. Montrer pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R})$ la décomposition

$$\kappa u = \kappa_{\gamma} u + (N-1)H \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$$

Même remarque. Que se passe-t'il si on passe-t'il si on passe par "op" ? Non, OK, la ca serait pas malin...

3 Déformations - Méthode des Vitesses

On considère dans cette section un domaine ω de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) de référence : il caractérise la géométrie *a priori* de notre problème. On souhaite envisager des déformations de ce domaine tout en restant à l'intérieur d'un domaine D^5 . L'ensemble D , supposé également \mathcal{C}^k , est appelé *fourre-tout*⁶. On définit l'espace des vitesses \mathcal{V} associé par

$$\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{C}^k(\overline{D}; \mathbb{R}^N)), \langle V, n_D \rangle = 0 \text{ sur } \partial D\} \quad (40)$$

On appelle alors *flot* associé à un champ $V \in \mathcal{V}$ et on note $[s \mapsto T_s^V]$, ou simplement $[s \mapsto T_s]$, la seule application de $[0, T]$ dans $\mathcal{C}^k(\overline{D}; \mathbb{R}^N)$ qui soit solution de

$$\partial_s T_s = V(s) \circ T_s, \quad T_0 = I_d \quad (41)$$

Le paramètre réel s est appelé *paramètre de déformation*. Afin de préciser les choses, introduisons le champ \mathbf{V} défini par $\mathbf{V}(s, x) = V(s)(x)$. L'appartenance de V à $\mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{C}^k(\overline{D}; \mathbb{R}^N))$ se traduit par la régularité suivante de \mathbf{V} :

Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$ tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \leq k$, on a $\partial_x^\alpha \mathbf{V} \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \overline{D}; \mathbb{R}^N)$

Pour un $x \in \overline{D}$ donné posons $X(s) = T_s(x)$. Alors l'application $[s \mapsto X(s)]$ est l'unique solution du **Problème de Cauchy** associé à \mathbf{V} et à la condition initiale x :

$$\begin{cases} \dot{X}(s) = \mathbf{V}(s, X(s)) \\ X(0) = x \end{cases}$$

(\dot{X} désignant la dérivée de X par rapport à s).

Le flot $[s \mapsto T_s]$ possède les propriétés suivantes :

• **Déformation:** pour tout $s \in [0, T]$, T_s et T_s^{-1} sont des bijections de \overline{D} dans \overline{D} de classe \mathcal{C}^k . L'ensemble ω_s , appelé *domaine transporté* ou *perturbé* défini par

$$\omega_s = T_s(\omega) \quad (42)$$

est un domaine \mathcal{C}^k . De plus, sa frontière $\gamma_s = \partial\omega_s$ est l'image de γ par le flot, c'est-à-dire que $\gamma_s = T_s(\gamma)$. On notera \mathfrak{D}_ω (ou simplement \mathfrak{D}) l'ensemble des domaines que l'on peut obtenir par déformation du domaine initial ω :

$$\mathfrak{D} = \{T_s^V(\omega), s \in [0, T], V \in \mathcal{V}\} \quad (43)$$

• **Régularité du flot :** $[s \mapsto T_s] \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{C}^k(\overline{D}; \mathbb{R}^N))$ et $[s \mapsto T_s^{-1}] \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{C}^k(\overline{D}; \mathbb{R}^N))$. De plus, $[s \mapsto DT_s]$ est solution de

$$\partial_s DT_s = [DV(s) \circ T_s] \cdot DT_s, \quad DT_0 = I_d \quad (44)$$

On définit alors les grandeurs $\gamma(s)$ et $\omega(s)$ dont l'utilité apparaîtra dans par la suite : $M(T) = \det(DT)^t DT^{-1}$ désignant la comatrice de DT , on pose

$$\gamma(s) = \det(DT_s) \text{ et } \omega(s) = ||M(T_s) \cdot n|| \quad (45)$$

⁵On peut également imposer d'autres types de contrainte sur les domaines déformés : se reporter à l'exercice 4.3

⁶*holdall* en anglais

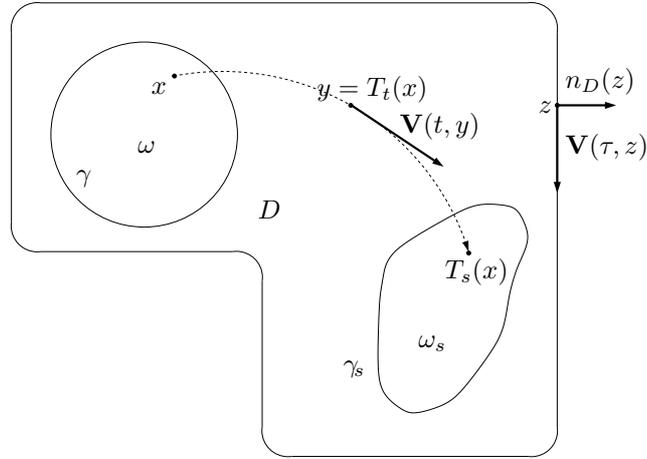


Figure 3: Une déformation du domaine ω .

4 Fonctionnelles de domaine

4.1 Définitions

On appelle *fonctionnelle de domaine* toute fonction J de \mathfrak{D} dans \mathbb{R} .

Si pour tout $V \in \mathcal{V}$, l'application $s \mapsto J(\omega_s)$ est dérivable en 0, on dit que J est *dérivable par rapport au domaine*⁷. On appelle *dérivée eulérienne* de J dans la direction V et on note $dJ(\omega; V)$ (ou $J'(\omega)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le champ V) la valeur

$$dJ(\omega; V) = \frac{d}{ds} J(\omega_s) \Big|_{s=0} \quad (46)$$

Si de plus la dérivée eulérienne est linéaire continue en $V \in \mathcal{V}$, alors on appelle alors *gradient de forme* de J en ω et on note $\nabla J(\omega)$ l'application

$$\nabla J(\omega) : V \mapsto dJ(\omega; V) \quad (47)$$

4.2 Gradients de forme usuels I

Deux familles de critères sont d'un usage courant : ce sont les fonctionnelles du type

$$J(\omega) = \int_{\omega} f dx \quad \text{et} \quad J(\omega) = \int_{\gamma} f d\mathcal{H}^{N-1} \quad (48)$$

La première catégorie constitue les *fonctionnelles distribuées* et la seconde les *fonctionnelles de bord*. Lorsque $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D}; \mathbb{R}^m)$, les deux critères (48) sont dérivables par rapport au domaine et l'on a :

$$\left(\int_{\omega} f dx \right)' = \int_{\gamma} f \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1} \quad (49)$$

$$\left(\int_{\gamma} f d\mathcal{H}^{N-1} \right)' = \int_{\gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial n} + (N-1)Hf \right) \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1} \quad (50)$$

⁷Cette définition de la dérivabilité qui n'impose que l'existence de la dérivée directionnelle est peu exigeante. La dérivabilité par rapport au domaine *plus* l'existence du gradient de forme s'apparente à une différentiabilité au sens de Gateaux.

La formule (49) est parfois appelée **Formule de Reynolds**. Par analogie, on appellera l'équation (50) **Formule de Reynolds tangentielle**.

Démonstration : On suppose que f est scalaire (le cas général s'en déduit directement). Remarquons tout d'abord que le changement de variables $y = T_s^{-1}(x)$ donne l'égalité

$$J(\omega_s) = \int_{\omega_s} f(x) dx = \int_{\omega} f \circ T_s(y) \gamma(s)(y) dy$$

Comme $[s \mapsto f \circ T_s \gamma(s)] \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{C}^0(\overline{D}; \mathbb{R}))$, on peut utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral dans le domaine fixe ω . Par ailleurs on a

$$\frac{\partial}{\partial s} [(f \circ T_s) \gamma(s)]|_{s=0} = \langle \nabla f, V(0) \rangle + f \cdot \operatorname{div} V(0) = \operatorname{div} (fV(0))$$

par la formule de Stokes, on obtient donc

$$\left(\int_{\omega} f dx \right)' = \int_{\omega} \operatorname{div} (fV(0)) dx = \int_{\gamma} f \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1}$$

L'équivalent tangentiel de cette formule s'obtient suivant un principe analogue ; le même changement de variables donne

$$\int_{\gamma_s} f(y) d\mathcal{H}^{N-1}(y) = \int_{\gamma} f \circ T_s(y) \omega(s)(y) d\mathcal{H}^{N-1}(y)$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial s} [(f \circ T_s) \omega(s)]|_{s=0} = \langle \nabla f, V(0) \rangle_{\mathbb{R}^N} + f \cdot \operatorname{div}_{\gamma} V(0)$$

Comme on a

$$\int_{\gamma} f \cdot \operatorname{div}_{\gamma} V(0) d\mathcal{H}^{N-1} = - \int_{\gamma} \langle \nabla_{\gamma} f, V(0) \rangle d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\gamma} (N-1) H f \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1} \quad (51)$$

(cf. exercice 2.3) et que d'autre part $\nabla f - \nabla_{\gamma} f = \frac{\partial f}{\partial n} n$, on obtient le résultat désiré. ■

4.3 Théorème de structure

Le fait que la seule dépendance en V qui apparaisse dans l'expression du gradient de la fonctionnelle de domaine de l'exercice 4.3 soit $\langle V(0), n \rangle$ n'est pas un hasard. De façon générale, on a le résultat suivant :



O. Reynolds
(1842-1912)

Osborne Reynolds was a mathematics graduate of Cambridge in 1867 and became the first professor of engineering in Manchester in 1868. He held this post until he retired in 1905. He became a Fellow of the Royal Society in 1877 and, 11 years later, won their Royal Medal.

His early work was on magnetism and electricity but he soon concentrated on hydraulics and hydrodynamics. In 1886 he formulated a theory of lubrication and three years later he developed the standard mathematical framework used in the study of turbulence. The 'Reynolds number' used in modelling fluid flow is named after him.

(Informations issues de <http://www.math.bme.hu/mathhist/>).

Théorème 1 (Structure du gradient - Hadamard) Soit J une fonctionnelle de domaine dont le gradient existe en $\omega \in \mathfrak{D}$. Ce gradient ne dépend de V qu'à travers $\langle V(0), n \rangle$:

V et W étant deux vitesses de \mathcal{V} , $\langle V(0), n \rangle = \langle W(0), n \rangle$ implique $\nabla J(\omega)(V) = \nabla J(\omega)(W)$.

On écrit symboliquement le gradient sous la forme

$$\nabla J(\omega)(V) = \int_{\gamma} g \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1} \quad (52)$$

Dans les "bons cas", g est effectivement une fonction sommable sur γ et l'écriture sous la forme (52) du gradient est pleinement justifiée. Dans le cas général, l'abus de notation que l'on fait est analogue à celui qui consiste à utiliser l'expression

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \kappa_0(x) \varphi(x) dx$$

au lieu de $\varphi(0) = \kappa_0(\varphi)$ lorsque κ_0 est la mesure (ou distribution) de Dirac. Dans notre cas, c'est le cadre des distributions d'ordre fini qui s'avère adéquat.

Démonstration :

• $dJ(\omega; V)$ ne dépend que de $V(0)$: on construit la suite de champs de vitesse $V_n \in \mathcal{V}$ définis par

$$V_m(s) = \begin{cases} V(s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/n \\ V(1/n) & \text{si } s > 1/n \end{cases}$$

Clairement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $dJ(\omega; V) = dJ(\omega; V_n)$. De plus, $V_n \rightarrow V(0)$ dans $\mathcal{V}^{(8)}$. Par continuité de $\nabla J(\omega)$, on obtient $dJ(\omega; V) = dJ(\omega; V(0))$.

• $dJ(\omega; V)$ ne dépend que de $\langle V(0), n \rangle$: il suffit de montrer que $\langle V(0), n \rangle = 0$ implique $dJ(\omega; V(0)) = 0$. Or, si $V(0)$ est tangent à γ , alors clairement pour tout s , $\omega = \omega_s$. En conséquence, $J(\omega_s) = J(\omega)$ et $dJ(\omega; V(0)) = 0$. ■

⁸avec l'abus de notation suivant : $V(0)$ désigne l'application constante $s \mapsto V(0)$.

Exercices

EXERCICE XVII - En imposant que V appartienne à un sous-ensemble de \mathcal{V} , on peut considérer des familles plus restrictives de déformation. Déterminer le sous-ensemble adapté aux situations suivantes :

1. Le domaine ω de référence ne subit que des translations.
2. Le sous-ensemble S de ω appartient à tous les domaines perturbés.
3. Le volume de ω est préservé par la transformation (cf. exercice 4.3).

EXERCICE XVIII - On suppose que pour tout $s \in [0, T]$, $\omega_s = \omega$ (le domaine n'est pas déformé).

1. Est-ce que nécessairement V est nul sur tout D (et pour tout s) ?
2. Est-ce que nécessairement la restriction de V à γ est nulle ?

EXERCICE XIX - STABILITÉ PAR LE FLOT Montrer que l'ensemble \mathfrak{D} est stable par le flot, c'est-à-dire que pour tout $\omega' \in \mathfrak{D}_\omega$, $V \in \mathcal{V}$, et $s \in [0, T]$, on a $T_s^V(\omega') \in \mathcal{V}$.

EXERCICE XX - Soit D un domaine \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^N et $V \in \mathcal{V}$.

1. Montrer que $[s \mapsto \gamma(s)] \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{C}^{k-1}(\overline{D}; \mathbb{R}^N))$. Que vaut $\gamma'(0)$?
2. Montrer que pour tout $s \in [0, T]$, $\gamma(s) > 0$.

EXERCICE XXI - INVARIANTS TOPOLOGIQUES Soit D un domaine de \mathbb{R}^2 et ω un domaine tel que $\overline{\omega} \subset D$.

1. Montrer que pour tout $\omega' \in \mathfrak{D}$, l'ensemble ω' a le même nombre de composantes connexes que ω .
2. La présence d'un ou plusieurs "trous" dans un domaine ω se caractérise par l'existence de chemins fermés de ω qui ne sont pas homotopes à 0 dans ω^9 . Montrer que si ω n'a aucun trou (i.e. est simplement connexe), alors il en est de même de tout $\omega' \in \mathfrak{D}$.

EXERCICE XXII - PERTURBATION DE L'IDENTITÉ Il s'agit d'une alternative à la méthode des vitesses pour générer des déformations de domaines. Cette méthode consiste à associer au domaine initial ω , supposé \mathcal{C}^k , et à une direction de perturbation $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, un domaine perturbé $\omega + u$ défini par

$$\omega + u = (I_d + u)(\omega) = \{x + u(x), x \in \omega\}$$

Soit D un domaine de \mathbb{R}^N contenant $\overline{\omega}$. On suppose que le support de l'application u est inclus dans D .

1. Montrer que si $\|u\|_{\mathcal{C}^1}$ est assez petit, alors pour tout $s \in [0, T]$, $I_d + su$ est une bijection de $\overline{\omega}$ dans \overline{D} et $I_d + su$ ainsi que $(I_d + su)^{-1}$ sont de classe \mathcal{C}^k .
2. On pose $V(s) = u \circ (I_d + su)^{-1}$. Montrer que $V \in \mathcal{V}$ et que le flot $[s \mapsto T_s]$ associé à V est égal à $[s \mapsto I_d + su]$.

⁹se reporter à l'enseignement "Fonctions d'une variable complexe" pour les définitions de ces notions.

EXERCICE XXIII - Soit φ une application \mathcal{C}^1 de $[0, T] \times \mathbb{R}^N$ dans \mathbb{R} . Notons $\Sigma = \varphi^{-1}(\{0\})$. On fait l'hypothèse que $\nabla_x \varphi$ ne s'annule pas sur Σ . Définissons la famille de domaines ω_s par $\omega_s = \{x \in \mathbb{R}^N, \varphi(s, x) > 0\}$. On suppose également que pour tout $s \in [0, T]$, $\bar{\omega}_s$ est un sous-ensemble du domaine D de classe \mathcal{C}^1 .

1. Montrer que si $\mathbf{V}|_{\Sigma} = -\frac{\nabla_x \varphi}{\|\nabla_x \varphi\|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{\Sigma}$ alors $T_s^V(\omega) = \omega_s$ pour tout $s \in [0, T]$.

EXERCICE XXIV - Considérons la fonctionnelle de domaine J définie pour tout $\omega \in \mathfrak{D}$ par

$$J(\omega) = \int_{\omega} dx \quad (53)$$

Le réel $J(\omega)$ est tout simplement la mesure de Lebesgue de ω (c'est en particulier la surface en dimension 2 et le volume en dimension 3).

1. Soit $V \in \mathcal{V}$. Montrer que $J(\omega_s) = \int_{\omega} \gamma(s) dx$ où $\gamma(s)$ est donnée par (45).
2. En déduire que

$$J'(\omega) = \int_{\omega} \operatorname{div} V(0) dx = \int_{\gamma} \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1}$$

EXERCICE XXV - PROBLÈME ISOPÉRIMÉTRIQUE Il s'agit de déterminer quel domaine ω de \mathbb{R}^3 maximise le volume à surface constante ; nous nous intéresserons ici au problème lié suivant : minimiser la surface à volume constant.

1. Comment caractériser les champs V tels que le volume de ω_s ne dépende pas de s ? (On pourra utiliser les résultats de l'exercice 4.3)
2. Montrer que

$$\left(\int_{\gamma} d\mathcal{H}^{N-1} \right)' = 2 \int_{\gamma} H \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1}$$

3. En déduire que les boules sont les seuls domaines optimaux possibles.

5 Dérivée de Champs

5.1 Dérivées de Forme - Approches Eulerienne et Lagrangienne

Considérons une application f qui à un domaine $\omega \in \mathfrak{D}$ de classe \mathcal{C}^k associe un champ f_ω défini sur ω (c'est-à-dire une application de ω dans \mathbb{R}^m). La difficulté pour définir la dérivée de forme de f consiste dans le fait que lorsque ω varie, f_ω n'appartient pas à un espace fixe ; on propose ici deux solutions pour contourner ce problème : soit on considère un prolongement de chaque f_ω à $\mathcal{C}^k(\overline{D}; \mathbb{R}^m)$ (approche eulérienne), soit on "ramène" par transport les champs f_ω dans ω (approche convective ou lagrangienne). Dans les deux cas, on se retrouve dans un espace fixe dans lequel on peut dériver. Les deux caractérisations suivantes sont équivalentes.

On dira que f est *différentiable par rapport au domaine* dans \mathcal{C}^k si :

• **Caractérisation Eulérienne :** pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{C}^k(\overline{D}))$ telle que l'on ait

$$f_{\omega_s} = F(s)|_{\omega_s} \quad (54)$$

• **Caractérisation Lagrangienne :** pour tout $V \in \mathcal{V}$, l'application $[s \mapsto f(\omega_s) \circ T_s]$ est \mathcal{C}^1 à valeurs dans $\mathcal{C}^k(\overline{\omega}; \mathbb{R}^m)$, de dérivée notée \dot{f}_ω et appelée *dérivée particulaire* ou *lagrangienne*.

On appelle alors *dérivée de forme de f* en ω et on note f'_ω (ou simplement f') le champ défini sur ω par

$$f'_\omega = F'(0)|_\omega = \dot{f}_\omega - Df_\omega \cdot V(0) \quad (55)$$

5.2 Gradient de forme usuels II

Reprenons l'étude menée dans la section 4.2 lorsque f est un champ qui dépend de ω . Supposons plus précisément que f est dérivable par rapport au domaine dans $\mathcal{C}^1(\overline{D}; \mathbb{R}^m)$. Alors, les fonctionnelles distribuées et de bord associées sont dérivables par rapport au domaine et l'on a

$$\left(\int_\omega f dx \right)' = \int_\omega f' dx + \int_\gamma f \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1} \quad (56)$$

$$\left(\int_\gamma f d\mathcal{H}^{N-1} \right)' = \int_\gamma f' d\mathcal{H}^{N-1} + \int_\gamma \left(\frac{\partial f}{\partial n} + (N-1)Hf \right) \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1} \quad (57)$$

Démonstration : Elle suit le cheminement de la démonstration de la section 4.2 avec uniquement les deux adaptations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left[(f_{\omega_s} \circ T_s) \gamma(s) \right] |_{s=0} &= \dot{f}_\omega + f_\omega \cdot \operatorname{div} V(0) \\ &= f'_\omega + \langle \nabla f_\omega, V(0) \rangle + f_\omega \cdot \operatorname{div} V(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left[(f_{\omega_s} \circ T_s) \omega(s) \right] |_{s=0} &= \dot{f}_\omega + f_\omega \cdot \operatorname{div}_\gamma V(0) \\ &= f'_\omega + \langle \nabla f_\omega, V(0) \rangle + f_\omega \cdot \operatorname{div}_\gamma V(0) \end{aligned}$$

■

6 Optimisation de Forme et Equations aux Dérivées Partielles

Dans de très nombreux problèmes d'optimisation de forme, la fonctionnelle que l'on considère dépend du domaine au travers de la solution d'une Equation aux Dérivées Partielles. On recherche à appliquer la démarche suivante :

- On essaie de montrer que le ou les champs solution du problème sont dérivables par rapport au domaine : il s'agit d'un résultat de *sensibilité* par rapport à la géométrie.
- On calcule *explicitement* le gradient de forme de la fonctionnelle de domaine par l'introduction d'une équation adjointe.

Considérons comme problème type l'**Equation de la chaleur** avec une condition aux limites de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \kappa u = f & \text{dans } \omega \\ u = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases} \quad (58)$$

On suppose que le champ f ne dépend pas de ω , c'est-à-dire que $f' = 0$. Alors, si les données ω et f sont suffisamment régulières, la solution u de ce problème est dérivable par rapport au domaine dans \mathcal{C}^2 . De plus, la dérivée de forme u' est solution du système

$$\begin{cases} \kappa u' = 0 & \text{dans } \omega \\ u' = -\frac{\partial u}{\partial n} \langle V(0), n \rangle & \text{sur } \gamma \end{cases} \quad (59)$$

Démonstration : On admettra la différentiabilité de u par rapport au domaine.

Choisissons un $V \in \mathcal{V}$ et considérons une extension U de u dans $\mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{C}^2(\overline{D}; \mathbb{R}))$. Posons $F = \kappa U$. Comme $U(s)|_{\omega_s} = u(\omega_s)$ par construction, on a également $F(s)|_{\omega_s} = f(\omega_s)$; le champ F est donc une extension de f . De plus comme on a $\frac{\partial}{\partial s} \kappa U = \kappa \frac{\partial U}{\partial s}$ on en conclut que $\kappa U'(s) = F'(s)$ et donc que $\kappa u' = f'$ dans ω .

Déterminons la valeur de u' sur γ . Pour tout $x \in \gamma$, $T_s(x) \in \gamma_s$ et par conséquent, on a identiquement $U(s)(T_s(x)) = 0$. En dérivant en $s = 0$, on obtient $\langle \nabla U(0)(x), V(0)(x) \rangle + U'(0)(x) = 0$ d'où $U'(0) = -\langle \nabla U(0), V(0) \rangle$ sur γ et donc $u'(0) = -\langle \nabla u(0), V(0) \rangle = -\frac{\partial u}{\partial n} \langle V(0), n \rangle$ (se reporter à l'exercice 2.3). ■

Déterminons la dérivée de forme associée au critère

$$J(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\omega} |u - u_d|^2 dx \quad (60)$$

critère qui mesure l'écart (quadratique) entre la température effective u dans ω et une consigne, la température désirée u_d , définie dans D . La formule de Reynolds de la section 5.2 donne immédiatement

$$J'(\omega) = \int_{\omega} u'(u - u_d) dx + \frac{1}{2} \int_{\gamma} |u_d|^2 \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1}$$

Toutefois cette formule est peut satisfaisante si on cherche à évaluer la dérivée eulérienne pour plusieurs directions V . En effet, pour chaque V , il sera nécessaire

de recalculer une estimation de u' à partir de l'équation (59), ce qui est très coûteux numériquement. L'introduction d'un système adjoint à (58) et d'une solution p de ce système permet de contourner cette difficulté : considérons p , solution du système

$$\begin{cases} \kappa p = u - u_d & \text{dans } \omega \\ p = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases} \quad (61)$$

On a alors

$$dJ(\omega; V) = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{2} |u_d|^2 - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1} \quad (62)$$

et la détermination de $dJ(\omega; V)$ ne nécessite plus que la résolution de deux EDPs, indépendamment du nombre de directions V considérées.

Démonstration : On a

$$\int_{\omega} u'(u - u_d) dx = \int_{\omega} u' \cdot \kappa p dx$$

Or comme $\kappa p = \operatorname{div} \nabla p$, par la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\omega} u'(u - u_d) dx &= - \int_{\omega} \langle \nabla u', \nabla p \rangle dx + \int_{\gamma} u' \frac{\partial p}{\partial n} d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= - \int_{\omega} \langle \nabla u', \nabla p \rangle dx - \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial n} \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^{N-1} \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\omega} \langle \nabla u', \nabla p \rangle dx &= \int_{\omega} \kappa u' p dx - \int_{\gamma} \frac{\partial u'}{\partial n} p d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Exercices

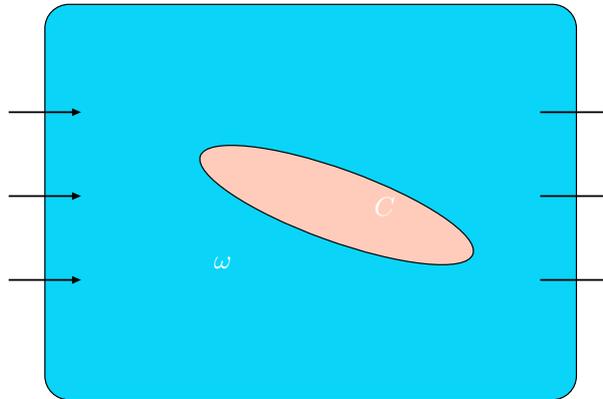
EXERCICE XXVI - Déterminer la condition aux limites satisfaite par u' dans les deux cas suivants :

1. on remplace la condition de Dirichlet homogène $u|_\gamma = 0$ par une condition de Dirichlet non homogène $u|_\gamma = g$ ou $g \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R}^N)$.
2. on remplace la condition de Dirichlet homogène $u|_\gamma$ par une condition de Neumann homogène $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

EXERCICE XXVII - Reprendre le calcul du gradient de forme précédent avec la fonctionnelle de domaine

$$J(\omega) = \int_{\omega} \|\nabla u\|^2 dx$$

EXERCICE XXVIII - PROBLÈME DE STOKES On cherche à rendre compte de la situation où un corps se déplace à une vitesse constante $v \in \mathbb{R}^3$ au sein d'un fluide. C désigne l'ensemble (fermé) de \mathbb{R}^3 associé au corps ; D est un fourre-tout contenant ce corps et le fluide est supposé emplir le domaine $\omega = D - C$.



Lorsque les phénomènes visqueux sont prépondérants vis-à-vis des effets convectifs, les champs de vitesse u et de pression p sont déterminés de façon satisfaisante dans le référentiel lié au corps comme solution des **Equations de Stokes** :

$$\begin{aligned}
 -\nu \kappa u + \nabla p &= 0 && \text{dans } \omega \\
 \operatorname{div} u &= 0 && \text{dans } \omega \\
 u &= 0 && \text{sur } \partial C \\
 u &= -v && \text{sur } \partial D
 \end{aligned} \tag{63}$$

On cherche à modifier la géométrie du corps (et donc de ω) pour minimiser la résistance à l'avancement dans le fluide :

Notons $\sigma = pI_d - \nu(Du + {}^t Du)$ le tenseur des contraintes. La force F

s'exerçant sur le corps est alors déterminée par

$$F = - \int_{\partial C} \sigma \cdot n \, d\mathcal{H}^2$$

et sa composante dans la direction de la vitesse $-v$ constitue la trainée $T = \left\langle F, -\frac{v}{\|v\|} \right\rangle$.

1. Préalable. A et B étant deux matrices 3×3 , on définit leur contraction d'ordre 2 par

$$A \cdot \cdot B = \text{tr}({}^t A \cdot B) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \cdot B_{ij} \quad (64)$$

A. Adapter les formules de l'exercice 2.3 au cas vectoriel : montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ alors

$$\int_{\omega} Du \cdot \cdot Dv \, dx = \int_{\gamma} \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \right\rangle d\mathcal{H}^2 - \int_{\omega} \langle \kappa u, v \rangle \, dx \quad (65)$$

En déduire que si u et v sont dans $\mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$, on a

$$\int_{\omega} \langle u, \kappa v \rangle - \langle \kappa u, v \rangle \, dx = \int_{\gamma} \left\langle u, \frac{\partial v}{\partial n} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \right\rangle d\mathcal{H}^2 \quad (66)$$

B. Reprendre également l'exercice 2.3. Montrer que sur la frontière de ω , pour tout $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$, on a

$$Du = Du \cdot n {}^t n = \frac{\partial u}{\partial n} {}^t n \quad (67)$$

et en déduire que si u est solution du système (72) alors on a de plus

$${}^t Du \cdot n = 0 \text{ et donc } \sigma \cdot n = pn - \nu \frac{\partial u}{\partial n} \quad (68)$$

2. Expression distribuée de la puissance. Pour étudier les variations de la trainée T , on considère la puissance $P = -\langle F, v \rangle$ communiquée par le corps au fluide.

A. Montrer que la puissance admet l'expression distribuée suivante :

$$P(\omega) = \nu \int_{\omega} Du \cdot \cdot Du \, dx$$

(on montrera que $\langle F, v \rangle = - \int_{\gamma} \langle \sigma \cdot n, u + v \rangle d\mathcal{H}^2$ avant de se ramener à une expression distribuée)

3. Dérivée de forme des solutions.

A. Montrer que u' et p' sont solutions de

$$\begin{aligned} -\nu\kappa u' + \nabla p' &= 0 && \text{dans } \omega \\ \operatorname{div} u' &= 0 && \text{dans } \omega \\ u' &= -\frac{\partial u}{\partial n} \langle V(0), n \rangle && \text{sur } \gamma \end{aligned} \quad (69)$$

• Montrer que

$$P'(\omega) = 2\nu \int_{\omega} Du \cdot Du' dx + \nu \int_{\gamma} \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^2$$

4. Problème adjoint. Introduisons les champs η et π , solutions du système adjoint :

$$\begin{aligned} -\nu\kappa\eta + \nabla\pi &= 2\nu\kappa u && \text{dans } \omega \\ \operatorname{div} \eta &= 0 && \text{dans } \omega \\ \eta &= 0 && \text{sur } \partial C \\ \eta &= 0 && \text{sur } \partial D \end{aligned} \quad (70)$$

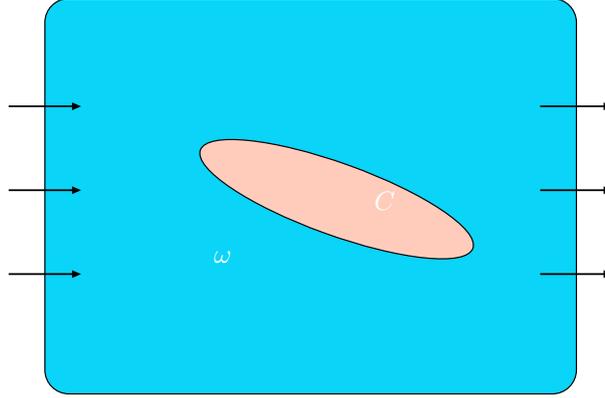
• Montrer que

$$2\nu \int_{\omega} \langle \kappa u, u' \rangle dx = \int_{\gamma} \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^2$$

et en déduire l'expression suivante de la dérivée de forme de P :

$$P'(\omega) = -\nu \int_{\gamma} \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u + \eta}{\partial n} \right\rangle \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^2 \quad (71)$$

EXERCICE XXIX - PROBLÈME DE NEWTON - APPROCHE MODERNE. Nous cherchons à rendre compte de la situation où un corps se déplace à une vitesse constante $v \in \mathbb{R}^3$ au sein d'un fluide. C désigne l'ensemble (fermé) de \mathbb{R}^3 associé au corps ; D est une région de conceptions contenant ce solide et le fluide est supposé emplir le domaine $\omega = D - C$.



Lorsque les phénomènes visqueux sont prépondérants vis-à-vis des effets convectifs, les champs de vitesse u et de pression p sont déterminés de façon satisfaisante dans le référentiel lié au corps comme solution des **Equations de Stokes**

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + \nabla p &= 0 & \text{dans } \omega \\ \operatorname{div} u &= 0 & \text{dans } \omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial C \\ u &= -v & \text{sur } \partial D \end{aligned} \quad (72)$$

La matrice σ du tenseur des contraintes s'écrit

$$\sigma = pI_d - \nu(Du + Du^T) \quad (73)$$

La force F s'exerçant sur le corps est alors déterminée par

$$F(\omega) = - \int_{\partial C} \sigma n \, d\mathcal{H}^2 \quad (74)$$

et sa composante dans la direction de la vitesse $-v$ constitue la trainée

$$T(\omega) = -F \cdot \frac{v}{\|v\|} \quad (75)$$

1. Préalable. A et B étant deux matrices 3×3 , on définit leur contraction d'ordre 2 par

$$A \cdot \cdot B = \operatorname{tr}({}^t A \cdot B) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \cdot B_{ij} \quad (76)$$

Montrer que sur la frontière de ω , pour tout $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$, on a

$$Du = Du \cdot n {}^t n = \frac{\partial u}{\partial n} n^T \quad (77)$$

et en déduire que si u est solution du système (72) alors on a de plus

$$Du^T n = 0 \text{ et donc } \sigma n = pn - \nu \frac{\partial u}{\partial n} \quad (78)$$

2. Expression distribuée de la puissance. Pour étudier les variations de la trainée T , on considère la puissance $P = -\langle F, v \rangle$ communiquée par le corps au fluide.

A. Montrer que la puissance admet l'expression distribuée suivante :

$$P(\omega) = \nu \int_{\omega} Du \cdot Du \, dx$$

(on montrera que $\langle F, v \rangle = -\int_{\gamma} \langle \sigma \cdot n, u + v \rangle d\mathcal{H}^2$ avant de se ramener à une expression distribuée)

3. Dérivée de forme des solutions.

A. Montrer que u' et p' sont solutions de

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u' + \nabla p' &= 0 && \text{dans } \omega \\ \operatorname{div} u' &= 0 && \text{dans } \omega \\ u' &= -\frac{\partial u}{\partial n} \langle V(0), n \rangle && \text{sur } \gamma \end{aligned} \quad (79)$$

• Montrer que

$$P'(\omega) = 2\nu \int_{\omega} Du \cdot Du' \, dx + \nu \int_{\gamma} \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle \langle V(0), n \rangle d\mathcal{H}^2$$

Sébastien Boisgérault
CMA, Ecole des Mines de Paris
INRIA, 2004 route des Lucioles
B.P. 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex, France.
© 04-92-38-71-67
✉ Sebastien.Boisgerault@sophia.inria.fr